ВЕСТНИК Тамбовского Университета

Научно-теоретический и практический журнал

Серия: Естественные и технические науки

Том 16, вып. 4, 2011

Журнал основан 5 февраля 1996 г.

Журнал Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук

СОДЕРЖАНИЕ

Материалы международной конференции
«КОЛМОГОРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – V.
Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2011)»
10–14 октября 2011 г., Тамбов

Учредитель: ГОУВПО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д.э.н., проф. В.М. Юрьев.
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: д.филол.н., проф. Н.Н. Болдырев (зам. гл. редактора), д.т.н., проф. А.А. Арзамасцев (науч. редактор серии), И.В. Ильина (отв. секретарь), к.ф.-м.н., доц. А.А. Артемов, д.ф.-м.н., проф. А.И. Булгаков, д.ф.-м.н., проф. Ю.И. Головин, д.ф.-м.н., проф. Е.С. Жуковский, к.биол.н., доц. Г.А. Лада, д.ф.-м.н., проф. Г.И. Малашонок, д.ф.-м.н., проф. В.Ф. Молчанов, к.филос.н., проф. В.Н. Окатов, д.мед.н., проф. Э.М. Османов, д.с/х.н., проф. А.М. Пучнин, д.ф.-м.н., проф. В.А. Федоров, д.х.н., проф. Л.Е. Цыганкова, д.пед.н., проф. М.С. Чванова, д.ф.-м.н., проф. А.А. Шибков

Адрес редакции: 392000, г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33, комн. 303. Тел. редакции: (4752) 72-34-34 доб. 0440. Тел. научного редактора серии: (4752) 53-72-39. Факс (4752) 71-03-07. Интернет: www.chat.ru/tsureports.

Журнал зарегистрирован Министерством РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовой коммуникации.

Свидетельство о регистрации ПИ №77-17334.

Индекс 83372 в каталоге агентства «Роспечать».

Редактор английских текстов Е.А. Панасенко.
Компьютерное макетирование И.В. Ильина, Е.В. Корчагина.

Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. — Тамбов, 2011. — Т. 16. — Вып. 4. — 236 с. — ISSN 1810-0198.

Подписано в печать 02.08.2011. Усл. печ. л. 27,55. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная. Гарнитура TimesNR. Отпечатано на копировальных аппаратах. Тираж 1000 экз. Заказ № 1500. Цена свободная.

Оригинал-макет подготовлен в редакции журнала. Лицензия ИД №02973 от 06.10.2000. 392000, г. Тамбов, Интернациональная, 33. Отпечатано в Издательском доме ТГУ им. Г.Р. Державина. 392008, г. Тамбов, Советская, 190г.

© Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, 2011
© Журнал «Вестник Тамбовского Университета», 2011. При перепечатке, а также при цитировании материалов ссылка на журнал обязательна
© Арзамасцев А.А., дизайн журнала и макет обложки, 1996

производить оценку изменения информационной эффективности ТКС в окрестности точки ее состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клейнрок Л.* Вычислительные системы с очередями: Пер. с англ./ Под ред. Б.С.Цыбакова. М.: Мир, 1979. V. 600 с.

2. *Пасечников И.И.* Методология анализа и синтеза предельно нагруженных информационных сетей. М.: Машиностроение-1, 2004. 216 с.

3 *Пасечников И.И.* Анализ и методология повышения информационной эффективности телекоммуникационных систем и сетей. Монография. Тамбов.: Издательский дом ТГУ им. Г.Р.Державина

4. *Григоренко С.А., Пасечников И.И.* Построение метрического тензора для ортогональной модели телекоммуникационной сети // Инфокоммуникационные технологии в науке, здравоохранении и образовании: сборник научных трудов IV международного научного конгресса «Нейробиотелеком-2010». СПб.: «ТЕЛЕДОМ» ГОУВПО СПбГУТ, 2010. С. 37–42.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

Grigorenko S.A., Pasechnikov I.I. The evaluation of the informational efficiency of telecommunication networks with use of a metric tensor. The article analyzes methods for evaluation of the effectiveness of information systems and telecommunications networks. Justified the using of application of the cybernetic power parameter in the information network and the influence of components of the metric tensor on its value.

Григоренко Сергей Анатольевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: aib@tsu.tmb.ru.

Пасечников Иван Иванович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и информационных технологий, e-mail: aib@tsu.tmb.ru.

УДК 517.5

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

© А.С. Демышев, В.И. Родионов

Ключевые слова: непрерывно дифференцируемая функция; предел по множеству; симплекс.

Определено понятие дифференцируемой в себе функции многих переменных. Доказаны необходимые и достаточные условия дифференцируемости в себе.

1. Пусть $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое ограниченное открытое множество, а множество Ω таково, что $\Omega_0 \subseteq \Omega \subseteq \overline{\Omega}_0$. Совокупность $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ называется *разбиением* множества Ω, если все Ω_k — непустые открытые множества, $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\bigcup\limits_k \overline{\Omega}_k = \overline{\Omega}$.

Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если существует вектор $v \in \mathbb{R}^n$ такой, что $f(y)-f(x) = (v\,, y-x)$ для всех $x, y \in \Omega$. Функция $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ называется *кусочно-линейной*, если существует такое разбиение $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ множества Ω, что при каждом $k = 1, \ldots, m$

функция-сужение $f_k \doteq f|_{\overline{\Omega}_k}$ линейна на $\overline{\Omega}_k$. Непрерывная функция $f:\ \Omega \to \mathbb{R}$ называется *кусочно-линейной*, если существует кусочно-линейная функция $\mathrm{g}\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ такая, что $f(x) = \mathrm{g}(x)$ для всех $x \in \Omega$.

Функция $f:\ \Omega_0 \to \mathbb{R}$ называется *непрерывно дифференцируемой*, если для всех $x \in \Omega_0$ существует $\operatorname{grad} f(x)$ и функция $\operatorname{grad} f(\cdot):\ \Omega_0 \to \mathbb{R}^n$ непрерывна. Непрерывная функция $f:\ \Omega \to \mathbb{R}$ называется *гладкой*, если функция-сужение $f:\ \Omega_0 \to \mathbb{R}$ является непрерывно дифференцируемой и существует непрерывная векторная функция $\mathrm{g}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ такая, что $\operatorname{grad} f(x) = \mathrm{g}(x)$ для всех $x \in \Omega_0$. Функция $f:\ \Omega \to \mathbb{R}$ называется *кусочно-гладкой*, если существует такое разбиение $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ множества Ω, что при каждом $k = 1, \ldots, m$ функция-сужение $f_k \doteq f|_{\overline{\Omega}_k}$ является гладкой на $\overline{\Omega}_k$.

2. Пусть множество Ω_*^{n+1} состоит из таких упорядоченных наборов $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$, $x_i \in \Omega$, что векторы $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ (где $\Delta x_i \doteq x_i - x_0$) образуют ортогональный репер с началом в точке x_0, причем выпуклая оболочка $\operatorname{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ содержится в Ω. Совокупности $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$ называем (*допустимыми*) *симплексами.* Пространство Ω_*^{n+1} является метрическим с метрикой $\varrho\left(\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle, \langle x_0', x_1', \ldots, x_n'\rangle\right) \doteq \max\limits_{i=0,1,\ldots,n} \| x_i - x_i' \|$.

Матрица $\Delta x \doteq \operatorname{col}(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ состоит из элементов $\Delta x_{ij} \doteq x_{ij} - x_{0j}$, где через x_{ij} обозначена j-я координата точки x_i. Так как $\Delta x \cdot \Delta x^\top = \operatorname{diag}(\|\Delta x_1\|^2, \ldots, \|\Delta x_n\|^2)$, то

$$\left(\Delta x\right)^{-1} = \Delta x^\top \cdot \operatorname{diag}\left(\tfrac{1}{\|\Delta x_1\|^2}, \ldots, \tfrac{1}{\|\Delta x_n\|^2}\right)$$

($\Delta x^\top$ — это транспонированная к Δx матрица). Произвольной функции $f:\ \Omega \to \mathbb{R}$ поставим в соответствие функцию $\Gamma_f\colon \Omega_*^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, действующую по следующему правилу:

$$\Gamma_f\,\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \doteq \begin{pmatrix} \Delta x_{11} & \ldots & \Delta x_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta x_{n1} & \ldots & \Delta x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \ldots \\ \Delta f_n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\Delta f_i \doteq f(x_i) - f(x_0)$. Если $\Delta f \doteq \operatorname{col}(\Delta f_1, \ldots, \Delta f_n)$, то формула (1) принимает компактный вид $\Gamma_f = (\Delta x)^{-1}\,\Delta f$, а при $n = 1$ применима традиционная запись $\Gamma_f = \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Заметим еще, что более правильно следовало бы писать $\Gamma_f = \Gamma_f\left(\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle\right)$, однако мы придерживаемся формата (1). Отображение $f \to \Gamma_f$, порожденное формулой (1), имеет канонический характер, и мы исследуем его с самых разных позиций. Например, непрерывность функции f влечет непрерывность функции Γ_f.

3. Функция $f:\ \Omega \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой в себе* (или *S-дифференцируемой*), если для любого $x \in \Omega$ существует конечный предел

$$\lim\nolimits_* \Gamma_f\,\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle. \tag{2}$$

Символ « $*$ » означает, что предел вычисляется по всем симплексам $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \in \Omega_*^{n+1}$ таким, что $x_0 \to x,\ x_1 \to x,\ \ldots,\ x_n \to x$.

При $n = 1$ предел (2) имеет вид $\lim\limits_{x_0 \to x,\ x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ и встречается в работах Пеано.

Т е о р е м а 1. *Если* $f\colon \Omega_0 \to \mathbb{R}$ *есть дифференцируемая в себе функция, то для любого* $x \in \Omega_0$ *существует* $\operatorname{grad} f(x)$ *и для предела* (2) *справедливо равенство*

$$\lim\nolimits_* \Gamma_f\,\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle = \operatorname{grad} f(x). \tag{3}$$

З а м е ч а н и е 1. Формула (3) служит отправной точкой для приближенных вычислений, основанных на соотношении $\operatorname{grad} f(x) \approx \Gamma_f\,\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы непрерывная функция* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *была дифференцируемой в себе, необходимо и достаточно, чтобы она была гладкой.*

З а м е ч а н и е 2. Непрерывность $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ мы требуем для того, чтобы исключить из рассмотрения разрывные функции следующего вида. Пусть множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ состоит из точек (ξ_1, ξ_2) таких, что $0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1$ и $\xi_1^3 \leqslant \xi_2 \leqslant \xi_1^2$, а функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ такова, что $f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 + \xi_2$ при $(\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)$ и $f(0,0) = 1$. Для любого $x \in \Omega$ (в т. ч. для $x = 0$) существует предел $\lim_* \Gamma_f \langle x_0, x_1, x_2 \rangle = \mathrm{col}\,(1,1)$ при $x_0 \to x$, $x_1 \to x$, $x_2 \to x$, однако сама функция f разрывна на границе Ω. Условие непрерывности f можно снять лишь в том случае, когда $\Omega = \Omega_0$ – открытое множество, т. е. справедливо следствие 1.

С л е д с т в и е 1. *Для того чтобы функция* $f\colon \Omega_0 \to \mathbb{R}$ *была дифференцируемой в себе, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывно дифференцируемой.*

4. Непрерывная функция $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ называется *регулярно гладкой*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ множества $\overline{\Omega}$ такое, что при каждом $k = 1, \ldots, m$

$$\sup \left\| \Gamma_f \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle - \Gamma_f \langle x'_0, x'_1, \ldots, x'_n \rangle \right\| < \varepsilon,$$

где супремум вычисляется по всем симплексам $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle, \langle x'_0, x'_1, \ldots, x'_n \rangle \in (\Omega_k)_*^{n+1}$.

Т е о р е м а 3. *Всякая кусочно-гладкая функция* $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *является регулярно гладкой.*

В работе [1] при $n = 1$ показано, что пространство регулярно гладких функций, заданных на отрезке $\overline{\Omega} \doteq [a, b]$, является замыканием пространства кусочно-линейных функций, заданных на $\overline{\Omega}$, по норме $\| f \| \doteq | f(a) | + \sup\limits_{\langle x_0, x_1 \rangle \in \overline{\Omega}_*^2} | \Gamma_f \langle x_0, x_1 \rangle |$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Родионов В.И.* О пространстве регулярно гладких функций // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. Ижевск, 2011. № 1. С. 87-98.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

Demyshev A.S., Rodionov V.I. On equivalent definition of continuously differentiability of functions of some variables. Concept of self-differentiable function of some variables is defined. Necessary and sufficient conditions of self-differentiability are proved.

Key words: continuously differentiable function; limit over set; simplex.

Демышев Александр Сергеевич, Удмуртский государственный университет, г. Ижевск, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры информатики и математики, e-mail: rodionov@uni.udm.ru.

Родионов Виталий Иванович, Удмуртский государственный университет, г. Ижевск, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информатики и математики, e-mail: rodionov@uni.udm.ru.

УДК 517.977.5

О РЕАЛИЗАЦИИ НЕСТАНДАРТНОЙ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© **В.А. Дыхта, С.П. Сорокин**

Ключевые слова: оптимальное управление; неравенства Гамильтона–Якоби; каноническая система; обобщенный лагранжиан.

Предлагается подход к реализации нестандартной двойственности для задач оптимального управления, основанной на решениях неравенств Гамильтона–Якоби. Данный подход приводит к необходимым и достаточным условиям оптимальности программных и синтезирующих управлений. Результаты апробированы на неклассических линейно-квадратичных задачах и задачах оптимизации систем, линейных по состоянию с управляемыми коэффициентами.