

На правах рукописи

УДК 531.352, 531.355,
531.395, 532.5

Тронин Константин Георгиевич

МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОГО АНАЛИЗА
НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ КЛАССИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКИ

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ижевск – 2005

Работа выполнена в ГОУВПО «Удмуртский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико–математических наук
Борисов Алексей Владимирович,

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук,
профессор
Цыганов Андрей Владимирович,
кандидат физико–математических наук,
Килин Александр Александрович,

Ведущая организация: Институт математики и механики
УрО РАН.

Защита диссертации состоится “___” _____ 200__ г в 14:00 на заседании диссертационного совета К 212.275.04 Удмуртского государственного университета по адресу: 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, ауд. 216.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале библиотеки УдГУ.

Автореферат разослан “___” _____ 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Н. Н. Петров.

Общая характеристика работы

На примере некоторых задач классической механики в диссертационной работе показана актуальность совместного применения качественных аналитических оценок и численных методов исследования в задачах классической механики. Основная часть работы посвящена исследованию вероятностных эффектов в задачах о вращении твердого тела под действием возмущающих моментов, падения твердого тела в идеальной жидкости (также известной, как задача Стеклова-Чаплыгина), движения саней Чаплыгина по наклонной плоскости и исследованию поведения системы уравнений Лиувилля.

Актуальность темы. В связи с увеличением сложности современных задач из различных областей теории динамических систем их чисто аналитическое исследование становится невозможным, как по техническим (громоздкость выкладок), так и по принципиальным соображениям (например, невозможность проинтегрировать в классе известных функций). Если с трудностями первого типа могут помочь справиться современные системы аналитических вычислений (Maple, Mathematica и др.), то вторая проблема разрешима только с помощью постановки численных экспериментов.

Необходимо также отметить, что во многих случаях интерес представляют возможные стационарные и асимптотические состояния динамических систем и способы их достижения. В некоторых случаях если и удастся получить качественное представление о возможных асимптотических состояниях и возможных траекториях, то детальное описание движения систем во многих случаях не доступно с помощью аналитических методов. Поэтому актуальным становится совмещение численного эксперимента с различными аналитическими оценками. Такой подход предоставляет возможность по новому взглянуть на уже известные результаты в теории динамических систем и получить более полное качественное представление о их динамике.

В последнее время довольно много внимания в работах различных авторов уделяется качественному аналитическому исследованию вероятностных эффектов в динамике твердого тела. Несмотря уже на довольно продолжительный срок проведения подобных исследований многие аналитические результаты остаются без экспериментального подтверждения или опровержения. По этой причине, проведение численных экспериментов в этой области на сегодняшний день является актуальной задачей.

Многие задачи небесной механики допускают аналитическое исследование лишь при наложении жестких ограничений на параметры, вследствие чего аналитическому описанию поддается лишь небольшая часть возможных движений небесномеханических систем. Одной из таких задач является движение точечного тела в гравитационном поле неподвижных центров. Вопросы интегрируемости такой системы были рассмотрены различными авторами лишь для положительных энергий. Для отрицательных энергий публикаций на эту тему нет. В связи с этим актуальным является исследование движения тела в поле $n > 2$ неподвижных центров. В настоящей работе рассматривалась задача при $n = 3$.

Довольно часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда получить некоторое замечательное решение гораздо проще, проведя численный эксперимент. И только после этого найти из уравнений движения аналитический вид этого решения. К таким задачам относятся задачи вихревой динамики. На сегодняшний день, актуальным является вопрос о возможных стационарных конфигурациях вихрей на сфере. Также интерес представляет вопрос о стоха-

стическом рассеянии частиц жидкости на системе вихрей. Обе проблемы рассматриваются в одной из глав диссертационной работы.

Цель работы.

1. Определить условия и изучить влияние начальных условий и параметров на проявление вероятностных эффектов в задачах вращения твердого тела вокруг центра масс под действием возмущающих моментов, падения твердого тела в идеальной жидкости и в задаче о движении саней Чаплыгина по наклонной плоскости.
2. Изучить эволюцию уравнений Лиувилля в условиях отсутствия гиросtatического момента.
3. Определить условия возникновения стационарных конфигураций движения трех и четырех вихрей на сфере.
4. Изучить поведение частиц жидкости при рассеянии на системе двух вихрей с противоположными интенсивностями.
5. Установить неинтегрируемость задачи о движении точечного тела в поле трех неподвижных центров при отрицательных энергиях.

Объекты и методы исследования. В диссертационной работе с помощью численных методов проводится анализ решений некоторых задач, поставленных еще классиками динамики твердого тела. Выбранные задачи представляют собой динамические системы изменяющиеся во времени. Рассмотрены некоторые динамические системы с диссипацией и с медленно периодически изменяющимися параметрами. Для систем первого типа характерно наличие решений, к которым со временем эти системы приходят. И хотя различными аналитическими методами можно получить асимптотические решения этих систем, оказывается, что эволюция подобных систем содержит элементы случайного поведения, которые и представляют часть объектов исследования диссертационной работы.

Для динамики систем второго типа характерно случайное изменение адиабатического инварианта (АИ), когда динамическая система эволюционирует таким образом, что вдали от ее сепаратрис адиабатический инвариант остается постоянным. При переходе через сепаратрису эволюция системы может развиваться по двум сценариям: а) малое изменение АИ порядка малой величины возмущения системы $\sim \varepsilon$, б) с резким изменением АИ на случайную величину ~ 1 . В результате многократного перехода динамической системы через сепаратрису значение АИ испытывает диффузию и его эволюция принимает случайный характер.

Кроме задач динамики твердого тела в работе рассмотрена динамика точечных вихрей на сфере, затронут вопрос о хаотизации рассеяния точечными вихрями частиц жидкости и рассмотрено движение точечного тела в поле трех неподвижных центров.

Эволюция всех систем исследовалась стандартными численными методами, обеспечивающими необходимую точность вычислений.

Научная новизна.

1. количественно описана задача о вращении тела вокруг центра масс под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов. Исследованы возможные ти-

пы движения твердого тела в зависимости от величины возмущающих моментов. Установлены численные значения параметров задачи, при которых начинают проявляться вероятностные эффекты;

2. Обнаружено новое явление для уравнений Стеклова-Чаплыгина, описывающих падение тяжелого твердого тела в идеальной жидкости – асимптотический хаос, когда при вполне конкретных (заданных) начальных условиях отсутствует определенность в асимптотическом поведении динамической системы. Установлены условия и значения параметров при которых возможно наблюдение этого явления.
3. Обнаружено аналогичное явление в поведении неголономной динамической системы, описывающей движение саней Чаплыгина. Установлено значение параметров задачи, при которых наблюдается асимптотический хаос.
4. Получено количественное описание движения одной из систем, проявляющих аддиабатический хаос, – системы уравнений Лиувилля. Показано, что для этой системы применение численных методов позволяет получить более полное представление об ее эволюции.
5. Найдены условия существования абсолютных хореографий в движениях трех и четырех вихрей на сфере. Получены численные значения параметров, при которых наблюдается хаотическое рассеяние частиц жидкости на вихревой паре в периодически возмущенном потоке идеальной жидкости.
6. Показана неинтегрируемость и стохастическое поведение задачи трех неподвижных центров при отрицательных энергиях.

Практическая ценность. Все полученные результаты могут быть использованы в аналитических исследованиях соответствующих динамических систем.

Результаты первой и второй глав могут быть использованы в некоторых областях прикладной механики изучающих движение твердых тел в жидкости, динамику твердого тела в условиях медленно меняющихся параметров.

Результаты третьей главы имеют ценность для прикладной метеорологии и океанологии. Также результаты третьей главы могут быть использованы в задачах стохастического рассеяния на системе вихрей. Установленный факт неинтегрируемости и приведенный пример возможных движений могут служить начальными данными в аналитическом исследовании небесномеханических систем.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались:

- на научных семинарах Института компьютерных исследований (Ижевск, УдГУ, 2005).
- на научном семинаре кафедры теоретической физики

Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах, перечисленных в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 82 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы (59 наименований).

Содержание работы.

Во введении кратко приведена история развития методов исследования задач динамики твердого тела.

В **первой главе** диссертации исследуются вероятностные эффекты в некоторых задачах классической механики.

В *задаче о вращении твердого тела* вокруг центра масс под действием суммы двух возмущающих моментов: постоянного в связанных с телом осях и диссипативного, рассматривается эволюция системы в зависимости от ее параметров. Уравнения движения, записанные через компоненты вектора кинетического момента имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}\mathbf{M} - \varepsilon (\mathbf{B}\mathbf{M} + \mathbf{K}), \quad (1)$$

где $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3)$ – постоянные матрицы, $a_i = 1/I_i$, I_i – главные моменты инерции, $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$ – произвольный постоянный вектор, ε – малый параметр (для определенности считается, что $a_1 < a_2 < a_3$).

Система (1) имеет два интеграла: интеграл энергии E и интеграл полного кинетического момента M^2

$$E = \frac{1}{2} (\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}), \quad G^2 = M^2. \quad (2)$$

Система (1) исследовалась в переменных Андуайе-Депри L, G, l, g , связь которых с кинетическим моментом определяется соотношениями

$$M_1 = \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \quad M_2 = \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \quad M_3 = L, \quad G^2 = M^2. \quad (3)$$

При $\varepsilon = 0$ система (1) имеет две параболические неподвижные точки, которые для случая $\varepsilon \neq 0$ являются асимптотически устойчивыми. При постоянных параметрах траектория движения определяется соотношением между малым параметром ε и энергией невозмущенной системы E (2). Соотношение этих параметров также определяет к какой из асимптотических точек придет траектория.

Изменение постоянного момента изменяет положение асимптотических точек. Матрица диссипативного момента (\mathbf{B}) определяет характер асимптотического поведения системы: энергия либо асимптотически стремится к постоянному значению, либо растет пропорционально G^2 .

При уменьшении параметра ε возмущенная система длительное время движется вдоль невозмущенной траектории. При этом определенность в том, к какой асимптотике придет система, исчезает. Для заданных параметров $E = 1$; $\mathbf{A} = \text{diag}(1/3, 1, 1.5)$; $\mathbf{B} = \text{diag}(1, 1, 1)$; $\mathbf{K} = (1, 1, 1)$ в зависимости от начальных условий возможно два асимптотических движения. Одному из них соответствует вращение вокруг оси наибольшего главного момента инерции, второму асимптотическому движению соответствует вращение вокруг оси наименьшего главного момента инерции.

Для $\varepsilon = 0.01$ и выше указанных остальных параметрах асимптотики на плоскости начальных условий $(L/G, l)$ разделены регулярными границами. При уменьшении возмущения ($\varepsilon = 0.001$) границы асимптотик все еще остаются регулярными, но при этом видно, что их распределение на плоскости начальных условий приближается к случайному.

В задаче о падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости рассматривается два случая: *случай плоскопараллельного движения*, которое задается инвариантными соотношениями $M_1 = M_2 = 0, \alpha_3 = \gamma_3 = 0$, в которых M_i – векторы кинетического момента в подвижных осях, жестко связанных с телом, $\alpha_i = \gamma_i$ – проекции ортов неподвижных осей на подвижные оси; случай движения тела, обладающего тремя плоскостями симметрии.

Плоскопараллельное движение описывается неавтономным уравнением второго порядка

$$a_3 \ddot{\varphi} = (c_1 - c_3) (\mu^2 t^2 \sin \varphi \cos \varphi + P_1 \mu t \cos 2\varphi - P_1^2 \sin \varphi \cos \varphi) + \mu(x \sin \varphi - y \cos \varphi), \quad (4)$$

В отсутствии начального толчка $P_1 = 0$ это уравнение принимает вид

$$\ddot{\theta} = kt^2 \sin \theta, \quad k = \frac{\mu^2(c_1 - c_2)}{a_3}. \quad (5)$$

и имеет простейшие стационарные решения типа $\theta(t) = \text{const}$, где $\theta = 2\varphi$

$$\theta = 0, \quad \theta = \pi. \quad (6)$$

Первое решение соответствует падению узкой стороной вниз ($X = X_0, Y = Y_0 - \mu c_1 t^2/2$), а второе — широкой ($X = X_0, Y = Y_0 - \mu c_2 t^2/2$). Поскольку присоединенная масса $c_1^{-1} < c_2^{-1}$, то угол $\varphi = \pi n$, когда ось Ox вертикальна, и $\varphi = \pi/2 + \pi n$, когда вертикальна ось Oy .

В линейном приближении общее решение уравнения (5) вблизи неподвижных точек (6) выражается через функции Бесселя

$$\begin{aligned} 1) \quad \xi(t) &= \sqrt{t} \left(C_1 I_{1/4} \left(\sqrt{kt^2/2} \right) + C_2 K_{1/4} \left(\sqrt{kt^2/2} \right) \right), \\ 2) \quad \xi(t) &= \sqrt{t} \left(C_1 J_{1/4} \left(\sqrt{kt^2/2} \right) + C_2 Y_{1/4} \left(\sqrt{kt^2/2} \right) \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $I_\nu(x), K_\nu(x)$ — функции Бесселя второго рода, а $J_\nu(x), Y_\nu(x)$ — функции Бесселя первого рода. Таким образом, в линейном приближении первое решение является неустойчивым, а второе (асимптотически) устойчивым. Действительно, используя асимптотики функций Бесселя J_ν, Y_ν при больших значениях аргумента находим

$$\xi(t) = \frac{A \sin \left(\sqrt{kt^2/2} + \alpha_0 \right)}{\sqrt{t}} + O(t^{-5/2}), \quad A = \text{const}.$$

Следовательно, амплитуда колебаний убывает как $t^{-1/2}$, а их частота неограниченно растет как t .

Компьютерный анализ. На фазовой плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ (точнее цилиндре $\theta \bmod 2\pi, \dot{\theta} \in (-\infty, +\infty)$) в начальный момент времени $t = t_0$ построены области, в пределах которых тело совершает одно и то же количество полуоборотов при $t \rightarrow +\infty$ (либо при $t \rightarrow -\infty$), прежде чем «притянется» к решению $\theta = \pi$. Эти области располагаются регулярно, причем их ширина уменьшается при увеличении $|\dot{\theta}|$, так что при больших начальных $|\dot{\theta}|$ можно говорить лишь о вероятности того, что тело при $t \rightarrow +\infty$ будет падать «верхней» или «нижней» стороной.

Границы областей заполнены начальными условиями, соответствующими движениям, асимптотически приближающимся к неустойчивым положениям равновесия $\theta = 0, 2\pi$. Аналогично построены области, соответствующие одинаковому количеству полуоборотов для $t \rightarrow -\infty$. Оказывается, что области для $t \rightarrow +\infty$ и для $t \rightarrow -\infty$ являются зеркальным отражением относительно прямой $\theta = \pi$. При наложении этих областей их границы пересекаются в точках, расположенных на прямой $\theta = \pi$.

В общем случае, когда $P_1 \neq 0$ уже не существует стационарных решений аналогичных (6). Тем не менее асимптотическое поведение остается прежним.

Падение тела, обладающего тремя плоскостями симметрии описывается неавтономной гамильтоновой системой

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}\mathbf{M} + \mu^2 t^2 \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{A}\mathbf{M} \quad (8)$$

с гамильтонианом

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + \frac{1}{2}\mu^2 t^2(\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (9)$$

В общем случае можно считать \mathbf{A} диагональной, а \mathbf{C} — произвольной симметричной. \mathbf{M} , $\boldsymbol{\gamma}$ — векторы кинетического момента и орта оси Oz в подвижной системе.

Уравнения (8) допускают простейшие решения вида

$$\mathbf{M} = 0, \quad \boldsymbol{\gamma} = \pm \boldsymbol{\xi}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

где $\boldsymbol{\xi}_i$ — собственные векторы матрицы \mathbf{C} .

В работе показано, что при $t \rightarrow \infty$ тело стремится занять такое положение, при котором ось, соответствующая максимальной присоединенной массе стает вертикальной.

Компьютерный анализ. Четырехмерный уровень интегралов

$$(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = c = \text{const}, \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1$$

совместно параметризован переменными Андуайе (L, G, l, g) при зафиксированных начальных условиях

$$g = g_0, \quad E = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) = \text{const}.$$

В зависимости от того, какой стороной падает при $t \rightarrow \infty$ тело, точку на поверхности начальных условий ($L/G, l$) окрашивается либо в темный, либо в светлый цвет. Оказывается, что тело падает таким образом, что ось, соответствующая наибольшей присоединенной массе, направлена по вертикали, либо в одну, либо в другую сторону. При этом граница этих областей в общем случае устроена фрактально: при увеличении рисунок поверхности повторяется на все более мелких масштабах (т. е. обладает фрактальными свойствами).

Таким образом, если использовать аналогично с интегрируемыми и неинтегрируемыми (регулярными и хаотическими) системами, плоскопараллельный случай можно назвать интегрируемым, а общий случай системы (8), (9) неинтегрируемым: в плоскопараллельном случае границы областей, соответствующих различным расположениям тела, регулярны, а в системе (8), (9) — фрактальны. В работе показано, что если система (9) имеет еще один дополнительный интеграл (интеграл Лагранжа), границы областей также становятся регулярными.

Сани Чаплыгина. Рассматривается движение твердого тела, опирающегося на плоскость двумя (абсолютно) гладкими ножками и острым колесиком (диском или лезвием), таким, что

тело не может двигаться перпендикулярно плоскости колесика. В работе показано, что система уравнений, описывающая движение такого тела имеет два нетривиальных решения, одно из которых неустойчиво, другое — устойчиво. Устойчивому решению соответствует прямолинейное равномерное скольжение тела вдоль прямой наибольшего ската, при котором центр масс тела находится ниже точки контакта лезвия.

Компьютерный анализ. На плоскости начальных условий $(\varphi, \dot{\varphi} = \omega)$ были построены области, свидетельствующие различному числу оборотов, совершенных телом прежде чем оно асимптотически перейдет к равномерному скольжению вдоль прямой наибольшего ската.

Оказывается, что для различных значений параметров системы границы, соответствующие различному количеству оборотов тела имеют сложный фрактальный характер, что указывает на вероятностный характер поведения системы при достижении асимптотического состояния.

Во **второй главе** рассматривается динамика твердого тела в условиях медленного изменения параметров. Такое движение описывается уравнениями Лиувилля, для задачи, рассмотренной в работе, имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}), \quad (11)$$

где $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$ — матрица с элементами $a_i = 1/I_i$ (I_i — главные моменты инерции).

Уравнения (11) при замене переменных

$$M_1 = G\sqrt{1-p^2} \sin q, \quad M_2 = G\sqrt{1-p^2} \cos q, \quad M_3 = Gp. \quad (12)$$

и нормировке времени и параметров по формулам $dt' = (a_3 - a_1)dt$, $\delta = (a_2 - a_1)/(a_3 - a_1)$, $v_i = a_i K_i (a_3 - a_1)$ можно записать в каноническом виде с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\delta(1-p^2) \cos^2 q, \quad \delta = \delta(\tau) = \delta(\tau_0 + \varepsilon t). \quad (13)$$

на уровне интеграла $M^2 = G^2$. В диссертационной работе задан закон изменения параметра δ

$$\delta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos 2\pi\tau \right). \quad (14)$$

Для системы (11) переменная действие I является адиабатическим инвариантом, т.е. на временах порядка $\sim 1/\varepsilon I$ испытывает изменение порядка $\sim \varepsilon$. Более точное описание поведения системы дается улучшенным адиабатическим инвариантом (УАИ) J , который на временах $\sim 1/\varepsilon$ испытывает изменение $\sim \varepsilon^2$.

Прохождение через сепаратрису медленной подсистемы системы (13) сопровождается скачком УАИ, усредненная величина которого по теоретическим оценкам определяется

$$\langle (\Delta J)^2 \rangle = \frac{a^2 \Theta^2(\tau^*)}{24}, \quad (15)$$

где $\Theta(\tau^*) = \frac{dS}{dt}$ — скорость изменения площади области, ограниченной одной из сепаратрис в момент τ^* выхода системы на сепаратрису, $a = \frac{1}{\sqrt{\delta(1-\delta)}}$

На рис. 1 приведена зависимость скачка УАИ от начальных условий, полученная экспериментально и построенная по (15). Как показывает рисунок теоретическая зависимость даже для улучшенного адиабатического инварианта лишь очень приближенно описывает действительное поведение динамической системы. Максимумы на экспериментальной зависимости $\left(\frac{\Delta J}{\varepsilon}\right)^2 (J_0)$ обусловлены так называемым сепаратрисным захватом, когда траектория попавшая в окрестность сепаратрисы медленной системы продолжает двигаться так, чтобы примерно сохранялась соизмеримость фаз быстрой и медленной подсистем. В результате скачок УАИ имеет величину ~ 1 . В работе наглядно демонстрируется, как две очень близкие по начальным условиям траектории испытывают существенное изменение УАИ при переходе через сепаратрису.

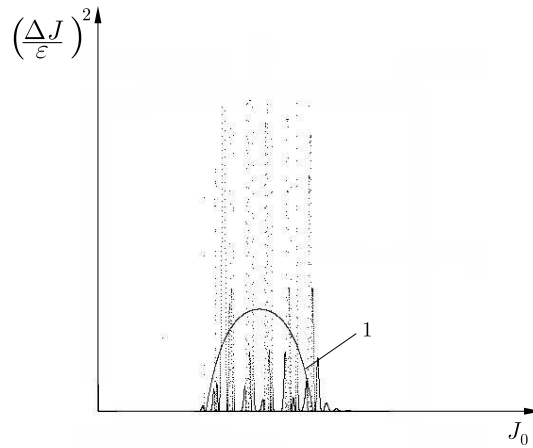


Рис. 1. Изменение УАИ через промежуток времени $\frac{1}{\varepsilon}$ в зависимости от начального значения J_0 , цифрой 1 обозначена аналитическая зависимость (15).

Наряду с адиабатическим инвариантом для данной задачи в работе приводится метод расщепления сепаратрис отображения Пуанкаре. Условием расщепления сепаратрис является

$$\frac{d\Theta(\tau)}{d\tau} \neq 0, \quad (16)$$

т.е. площадь под сепаратрисами медленной системы не остается постоянной. Анализируя поведение УАИ в условиях расщепления и не расщепления сепаратрис в работе делается заключение, что условие $\Theta(\tau) = \text{const}$ препятствует возникновению хаоса в областях, лежащих вне ε -окрестности сепаратрисы. Хаос в этой окрестности имеет характерные масштабы порядка ε^2 .

В **третьей главе** рассматриваются задачи вихревой динамики и задача трех неподвижных центров. Вихревая динамика представлена задачами движения трех и четырех вихрей на сфере, и задачей рассеяния частиц жидкости на системе двух вихрей противоположной интенсивности.

Хореографии вихрей на сфере. При определенных условиях в движении вихрей на сфере реализуется ряд замечательных решений, которые обобщаются одним названием - хореографии, т.е. движение вихрей приобретает взаимосвязанность, а именно, все вихри движутся

друг за другом вдоль одной одной периодической траектории. Существуют относительные и абсолютные хореографии. Относительные хореографии реализуются в системах координат, связанных с вихрями, абсолютные — в абсолютном пространстве.

В работе показано, что при выполнении определенных условий существует набор угловых скоростей вращения координатных систем (относительных хореографий), который определяется следующими соотношениями

- для трех вихрей

$$\Omega_1^0(E) = \Omega_a(E) - \Omega_0(E), \quad \Omega_m^{(k)}(E) = \Omega_1^{(0)}(E) + \frac{3k}{m}\Omega_0(E), \quad (17)$$

- для четырех вихрей

$$\begin{aligned} \Omega_2^{(0)}(E) &= \Omega_a(E) + \frac{1}{2}\Omega_0 \\ \Omega_{2m}^{(k)}(E) &= \Omega_2^{(0)}(E) + \frac{k}{m}\Omega_0(E), \quad m \text{ — нечетное, } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (18)$$

в которых Ω_a — частота вращения системы координат, в которой каждый вихрь движется по некоторой замкнутой кривой $\xi(t)$, $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, где T — период периодического решения $\gamma(t)$.

Абсолютные хореографии задаются решениями

$$\Omega_m^{(k)}(E) = 0$$

По смыслу частота $\Omega_n^{(0)}$ — это частота наиболее простой связной хореографии, которая замыкается за время nT .

В работе приведен вид абсолютных, наиболее простых и некоторых других хореографий трех и четырех вихрей. Показано, что для четырех вихрей одинаковых интенсивностей существует два невырожденных решения, одно из которых ($\Omega_{2m}^{(k)}$) соответствует решению Горячева (т.е. вихри в каждый момент времени находятся в вершинах параллелограмма), а, второе ($\Omega_m^{(k)}$) не имеет такой простой геометрической интерпретации и его продолжение по энергии, как показал эксперимент, связано с трудностями применения имеющихся численных методов интегрирования.

Помимо связных (или односвязных) хореографий на сфере могут образовываться несвязные или, по-другому, многосвязные хореографии. Их отличие от односвязных хореографий состоит в том, что они движутся согласовано по нескольким периодическим траекториям. Их называют танцующими вихрями, твисторами ((по терминологии Т.Токиеды)) и бэкиболами. В диссертационной работе описываются методы получения и приводится внешний вид этих замечательных решений для различного количества вихрей.

Рассеяние жидкости. В системе двух вихрей в отсутствии возмущения частицы жидкости движутся не перемешиваясь, т.е. образуют плоскопараллельное (ламинарное) течение. Существуют области движения, разделенные между собой сепаратрисами, в которых движение жидкости является ограниченным и неограниченным. В невозмущенной системе частица жидкости, удаленная на достаточное расстояние, чтобы не испытывать действие вихрей, при приближении к ним, огибает их не изменяя в итоге направления своего первоначального

движения. В возмущенной системе частицы жидкости испытывают хаотическое рассеяние, в результате которого они изменяют направление своего движения.

В диссертационной работе построена диаграмма рассеяния, отображающая изменение направления движения частиц жидкости. Показано, что при определенном значении возмущающего параметра образуются области на плоскости начальных условий, начиная из которых жидкость претерпевает стохастическое рассеяние, т.е. исчезает определенность того, в каком месте будет обнаружена частица жидкости, после прохождения через систему вихрей. Ниже этого значения рассеяние носит регулярный характер.

Задача трех притягивающих центров В задаче рассматривается только плоское движение точечной массы в поле трех тяготеющих центров. Сначала приводятся известные основные результаты для задачи двух центров ($n = 2$), которая является одной из наиболее изученных задач небесной механики, и для которой определено разделение возможных типов движений по классам.

Также в работе приводятся некоторые известные сведения для случая $n > 2$, в частности, аналитическая неинтегрируемость задачи при положительных энергиях ($E > 0$) в общем случае и ее интегрируемость, также при ($E > 0$), в гладком варианте.

На основании результатов численных экспериментов, полученных в работе, показана неинтегрируемость задачи в общем случае при $n = 3$ и $E < 0$. Показано также, что при изменении энергии системы и гравитационного потенциала система претерпевает переходы между различными типами движений, которые можно классифицировать по аналогии со случаем $n = 2$.

Публикации по теме диссертации.

1. Тронин К.Г. *Адиабатический хаос в уравнениях Лиувилля*. Нелинейная динамика, 2005, т. 1 №1, с. 111-122.
2. Тронин К.Г., Борисов А.В., Мамаев И.С. Абсолютные хороеографии точечных вихрей на сфере. Регулярная и хаотическая динамика. т.10, № 4, 2005, с.545-553 (на англ. яз.)
3. Тронин К.Г. Численное исследование вращения твердого тела вокруг центра масс под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов. Нелинейная Динамика, 2005, Т.1, №2, с.71-77.

