Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 2. С. 209–226.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 517.938, 517.968.7, 538.945
MSC 2010: 37N20, 37D10, 45J05

О размерности множества решений нелокального нелинейного волнового уравнения

Г. Л. Алфимов

Нелокальные обобщения нелинейного волнового уравнения возникают в целом ряде задач современной математической физики. Известно, что при переходе от локального к нелокальному описанию модель может приобретать новые свойства, в частности, могут возникать новые типы решений. В данной работе исследуется вопрос о размерности множества решений типа бегущих волн нелокального нелинейного волнового уравнения. Нелокальность при этом представлена оператором типа свертки, который заменяет оператор второй производной в дисперсионном члене. Основные результаты получены для случая, когда нелинейность ограничена, а ядро оператора представлено суммой экспонент с весами (так называемое ядро E-типа). В простейшем частном случае (ядро Каца–Бейкера) показано, что решения данного уравнения образуют непрерывное трехпараметрическое семейство (считая, что решения, переходящие друг в друга при сдвиге по независимой переменной, не различаются). Далее показано, что трехпараметрическое семейство решений, вообще говоря, сохраняется и в случае ядра E-типа общего вида, при выполнении некоторых дополнительных условий. Выражение «вообще говоря» в данном случае означает трансверсальность пересечения некоторых многообразий в надлежащим образом введенном фазовом пространстве.

Ключевые слова: нелокальное нелинейное волновое уравнение

1. Введение

Нелинейное волновое уравнение (или нелинейное уравнение Клейна–Гордона),

$$u_{tt} - u_{xx} + F(u) = 0, \tag{1.1}$$

является одним из классических уравнений теории нелинейных волн. Многочисленные приложения уравнения (1.1) обусловлены достаточно типичным сочетанием модельной (квад-

Получено 23 марта 2011 года
После доработки 14 июня 2011 года

Алфимов Георгий Леонидович
galfimov@yahoo.com
Московский институт электронной техники
124498, Россия, г. Москва, Зеленоград, проезд 4806, д. 5

ратичной) дисперсии и нелинейности. Среди наиболее «востребованных» в приложениях нелинейностей выделим *синусную* нелинейность,

$$F(u) = \sin u \tag{1.2}$$

(уравнение синус-Гордона), и *кубическую* нелинейность,

$$F(u) = -u + u^3 \tag{1.3}$$

(уравнение ϕ^4). Обзор задач, приводящих к нелинейному волновому уравнению, можно найти в монографии [1]; среди приложений этого уравнения отметим теорию магнетиков, теорию дислокаций, теорию джозефсоновских переходов и целый ряд других областей физики.

Учет более сложного (не квадратичного) закона дисперсии в физических задачах такого рода приводит к замене оператора d^2/dx^2 в уравнении (1.1) некоторым псевдодифференциальным оператором $\mathcal{L}$. Возникающее при этом уравнение мы будем в дальнейшем называть *нелокальным нелинейным волновым уравнением* или *нелокальным нелинейным уравнением Клейна–Гордона*. Оно имеет вид

$$u_{tt} - \mathcal{L}u + F(u) = 0. \tag{1.4}$$

Действие псевдодифференциального оператора $\mathcal{L}$ на функцию $u(x)$ в пространстве Фурье сводится к умножению преобразования Фурье $\hat{u}(\omega)$ на некоторую функцию $\phi(\omega)$,

$$\widehat{\mathcal{L}u}(\omega) = \phi(\omega)\hat{u}(\omega),$$

называемую *символом* оператора $\mathcal{L}$. Необходимость такой коррекции дисперсионного члена возникает в ряде задач нелокальной джозефсоновской электродинамики (см., напр., [2–7] и недавние обзоры [8, 9]), в некоторых задачах теории магнетиков [10], а также в решеточных моделях с учетом дальнодействия (см., напр., [11–17]). При этом оказывается возможным сохранить преемственность записи, выделяя в $\mathcal{L}$ вторую пространственную производную. Уравнение (1.4) тогда принимает вид

$$u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} G(x-x')u_{x'}(t,x')\, dx' + F(u) = 0. \tag{1.5}$$

Символ оператора $\mathcal{L}$ в этом случае имеет вид $\phi(\omega) = -\omega^2\hat{G}(\omega)$, при этом $\hat{G}(\omega)$ — преобразование Фурье ядра $G(\xi)$. Тип ядра $G(\xi)$ и нелинейности $F(u)$ определяется физической постановкой задачи. Предел $G(\xi) \to \delta(\xi)$, где $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака, соответствует возвращению к традиционному (локальному) нелинейному уравнению Клейна–Гордона (1.1).

Известно, что при переходе от уравнения (1.1) к (1.5) могут появляться новые типы решений. Например, в случае синусной нелинейности и нелокального ядра типа Каца–Бейкера (см. раздел 2), уравнение (1.5) допускает решения типа $2\pi n$-кинков, $n > 1$, которые не могут быть описаны в рамках локальной модели [18]. Помимо этого, численные исследования показывают, что нелокальная модель может описывать достаточно сложные структуры вращательного типа. Поэтому естественным образом возникает вопрос о том, насколько богатым может оказаться множество решений нелокального нелинейного волнового уравнения по сравнению с его локальным аналогом.

Ограничиваясь классом решений уравнения (1.5) типа бегущих волн, $u(z) \equiv u(x - ct)$, где c — скорость волны, перепишем уравнение (1.5) в виде

$$c^2 u_{zz} - \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{+\infty} G\left(z - z'\right) u_{z'}(z')\, dz' + F(u) = 0. \tag{1.6}$$

Сформулируем вопрос о множестве решений нелокального уравнения (1.6) следующим образом:

Пусть $u(z)$ *— решение уравнения* (1.6) *и* $c = c^*$ *— фиксировано.*

- *Можно ли в случае общего положения считать решение* $u(z)$ *включенным в некоторое непрерывное семейство решений уравнения* (1.6), *существующее при заданном* $c = c^*$*?*

- *Сколькими независимыми переменными может быть параметризовано это семейство (по крайней мере локально, вблизи решения* $u(z)$*)?*

В локальном случае, $G(\xi) = \delta(\xi)$, уравнение (1.6) принимает вид

$$(1 - c^2) u_{zz} = F(u). \tag{1.7}$$

Каждое решение этого уравнения однозначно определяется двумя параметрами: значениями $u(0), u_z(0)$. Если не различать между собой решения, переходящие друг в друга при сдвиге по z, то *единственным* (локальным) параметром семейства решений (1.7) является величина первого интеграла

$$I = \frac{1 - c^2}{2} u_z^2 - U(u), \quad U(u) = \int^u F(\theta)\, d\theta. \tag{1.8}$$

Для уравнения (1.6) подобный элементарный анализ не удается провести из-за нелокального характера оператора $\mathcal{L}$.

В настоящей работе исследуется множество решений уравнения (1.6) с ядром вида

$$\begin{aligned} &G(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \varkappa_j e^{-\eta_j |\xi|}, \qquad 0 < \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_N, \\ &\varkappa_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \end{aligned}$$

(так называемые *ядра E-типа.*) При этом показано, что если нелинейность $F(u)$ ограничена, а параметры ядра и скорость c удовлетворяют еще некоторым требованиям, отдельно взятое решение (1.6), вообще говоря, оказывается включено в непрерывное *трехпараметрическое семейство*, внутри которого решения, переходящие друг в друга при сдвиге по независимой переменной, не различаются. Выражение «вообще говоря» в данном случае означает трансверсальность пересечения некоторых многообразий в надлежащим образом определенном фазовом пространстве. Существование таких многообразий устанавливает теорема 2 (раздел 3). По мнению автора, материал настоящей работы важен для правильного понимания результатов численных исследований, в первую очередь касающихся нелокального уравнения синус-Гордона.

Дальнейшее изложение построено следующим образом. В разделе 2 рассмотрено уравнение (1.6) с простейшим ядром E-типа — ядром Каца–Бейкера. Показано, что в случае ограниченной нелинейности $F(u)$ при $0 < c < 1$ решения уравнения (1.6) с ядром Каца–Бейкера образуют трехпараметрическое семейство, внутри которого решения, переходящие друг в друга при сдвиге по независимой переменной, не различаются. В разделе 3 метод, использованный в разделе 2, развивается на случай произвольных ядер E-типа. Линейный предел $F(u) = 0$ удается полностью проанализировать, показав, что решения нелокального уравнения в этом случае также образуют трехпараметрическое семейство. Далее показано, что в случае ограниченной нелинейности $F(u)$, при некоторых ограничениях на скорость бегущей волны c, множество решений (1.6) остается трехпараметрическим в предположении о трансверсальности пересечения некоторых многообразий. Работу завершает раздел 4, содержащий обсуждение полученных результатов.

2. Нелокальное нелинейное уравнение Клейна–Гордона с ядром типа Каца–Бейкера

Рассмотрим важный частный случай уравнения (1.5) с ядром, представленным формулой

$$G_\lambda(\xi) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|\xi|}{\lambda}}. \tag{2.1}$$

Здесь λ — параметр нелокальности. Нормировка ядра выбрана так, что при λ, стремящемся к нулю, $G_\lambda(\xi)$ стремится к $\delta(\xi)$, а уравнение (1.5) при этом переходит в традиционное нелинейное уравнение Клейна–Гордона (1.1). Ядро (2.1) представляет собой простейший частный случай ядра E-типа. Уравнение (1.5) с ядром (2.1) обсуждалось в работах, посвященных решеточным моделям, когда дальнодействие в цепочке частиц описывается законом Каца–Бейкера [15, 17]. Это же уравнение возникает и в других приложениях, в частности, в теории слоистых джозефсоновских структур [19] и является одной из простейших моделей для описания джозефсоновской линии передачи с нелокальной индуктивной связью между ячейками [18].

Для бегущих волн $u(z) \equiv u(x - ct)$ уравнение (1.5) принимает вид

$$c^2 u_{zz} + F(u) = \frac{1}{2\lambda} \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|z-z'|}{\lambda}} u_{z'}(z')\, dz'. \tag{2.2}$$

Исследование уравнения (2.2) значительно упрощает следующий прием [18, 20]. Введем вспомогательную переменную

$$q(z) = \frac{1}{2\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|z-z'|}{\lambda}} u_{z'}(z')\, dz'. \tag{2.3}$$

Нетрудно проверить, что $q(z)$ удовлетворяет уравнению

$$-\lambda^2 q_{zz} + q = u_z. \tag{2.4}$$

Тогда исследование нелокального уравнения (2.2) можно свести к изучению системы дифференциальных уравнений

$$c^2 u_{zz} + F(u) = q_z, \tag{2.5}$$

$$-\lambda^2 q_{zz} + q = u_z. \tag{2.6}$$

Система (2.5)–(2.6) является более простым объектом исследования, чем исходное нелокальное уравнение. Дальнейшее исследование (2.5)–(2.6) удобно проводить, рассматривая динамическую систему, порожденную этими уравнениями, в четырехмерном фазовом пространстве (u, u', q, q'), где $u' = u_z$, $q' = q_z$, отождествляя решения нелокального уравнения (2.2) с траекториями этой динамической системы.

Необходимо, однако, обратить внимание на следующий факт. Очевидно, что если $u(z)$ — решение (2.2), то $(u(z), q(z))$, где $q(z)$ определена формулой (2.3), удовлетворяет системе (2.5)–(2.6). Но обратное, вообще говоря, неверно: не всякое решение $(u(z), q(z))$ системы (2.5)–(2.6) таково, что $u(z)$ удовлетворяет уравнению (2.2). Это связано с тем, что общее решение уравнения (2.6) имеет вид

$$q(z) = \frac{1}{2\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|z-z'|}{\lambda}} u_{z'}(z')\, dz' + C_+ e^{z/\lambda} + C_- e^{-z/\lambda} \tag{2.7}$$

и содержит две произвольные константы C_+ и C_-. Если хоть одна из констант C_+ и C_- не обращается в нуль, $u(z)$ не удовлетворяет уравнению (2.2).

Введем следующие определения:

Определение. Будем говорить, что решение $(u(z), q(z))$ системы (2.5)–(2.6) *соответствует* уравнению (2.2), если $u(z)$ удовлетворяет (2.2).

Определение. Будем говорить, что функция $\mathbf{f}(z)$ скалярного аргумента z со значениями (вообще говоря) в $\mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* $A(\sigma)$, если существует такое $\sigma > 0$, что

$$\|\mathbf{f}(z)\| = O(e^{\sigma z}), \quad z \to \infty, \quad \|\mathbf{f}(z)\| = O(e^{-\sigma z}), \quad z \to -\infty, \tag{2.8}$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^n$.

Из формулы (2.7) явно следует, что принадлежность к классу $A(\sigma)$ функций $u_z(z), q(z)$ при $0 < \sigma < 1/\lambda$ является достаточным условием того, что решение $(u(z), q(z))$ системы (2.5)–(2.6) соответствует уравнению (2.2). Действительно, если $u_z(z) \in A(\sigma)$, $0 < \sigma < 1/\lambda$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|z-z'|}{\lambda}} u_{z'}(z')\, dz' \in A(\sigma),$$

откуда следует, что $C_+ = C_- = 0$.

Еще более сильным условием, гарантирующим соответствие решения (2.5)–(2.6) уравнению (2.2), является условие медленного роста $u_z(z), q(z)$, в смысле следующего определения:

Определение. Функция $\mathbf{f}(z)$ скалярного аргумента z со значениями в $\mathbb{R}^n$ называется *функцией медленного роста*, если существуют такие константа C и показатель степени n, что для всех $z \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\|\mathbf{f}(z)\| \leqslant C(1 + |z|)^n.$$

Для медленно растущих функций условие (2.8) выполняется при любом $\sigma > 0$. Ограниченные на всей числовой прямой функции также попадают в класс функций медленного роста. В частности, в этот важный класс попадают решения системы (2.5)–(2.6), соответствующие локализованным и периодическим структурам.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть $0 < |c| < 1$ и существует F_0, такое, что $|F(u)| < F_0$. Тогда для любого решения системы (2.5)–(2.6) $u_z(z)$,$q(z)$ являются функциями медленного роста.*

Прежде чем доказать теорему 1, напомним следующее утверждение:

Лемма 1. *Пусть в линейном неоднородном уравнении*

$$V_{tt} + \lambda V = f(t) \tag{2.9}$$

$f(t)$ — функция медленного роста. Тогда

(i) *при $\lambda \geqslant 0$ все решения (2.9) — функции медленного роста,*

(ii) *при $\lambda < 0$ существует единственное решение (2.9), являющееся функцией медленного роста.*

Утверждение леммы следует непосредственно из явного вида решения уравнения (2.9).

Доказательство теоремы 1. Пусть $(u(z), q(z))$ — решение системы (2.5)–(2.6). Обозначим

$$f(z) = F(u(z)), \quad N(z) = \int_0^z f(\xi)\, d\xi + C$$

(C — произвольная константа). Так как $-F_0 \leqslant f(z) \leqslant F_0$, то $N(z)$ — функция медленного роста, $|N(z)| < F_0|z| + C$. Из уравнения (2.5) следует, что

$$u_z = \frac{1}{c^2}\,(q - N). \tag{2.10}$$

Подставляя это соотношение в уравнение (2.6), получаем уравнение

$$-\lambda^2 q_{zz} - \left(\frac{1}{c^2} - 1\right) q = -\frac{1}{c^2} N. \tag{2.11}$$

Правая часть в уравнении (2.11) — функция медленного роста. По лемме 1, при $0 < |c| < 1$ решение $q(z)$ — функция медленного роста. Из соотношения (2.10) следует, что функция $u_z(z)$ — также функция медленного роста, что и требовалось доказать. ■

Из теоремы 1 следует, что система (2.5)–(2.6) и уравнение (2.2) при $0 < |c| < 1$ и ограниченной нелинейности $F(u)$ *полностью эквивалентны*. Фазовое пространство системы (2.5)–(2.6) четырехмерно. Полагая эквивалентными решения (2.5)–(2.6), переходящие друг в друга при сдвиге по z, заключаем, что решения уравнения (2.2) при предположениях теоремы 1 образуют непрерывное трехпараметрическое семейство. Учитывая тот факт, что решения уравнения (1.7) зависят от единственного параметра (величины интеграла (1.8)), можно заключить, что *множество решений нелокального обобщения Клейна–Гордона в этом случае богаче множества решений локальной модели Клейна–Гордона.* Следует отметить, что теорема 1 справедлива для уравнения (2.2) с ядром (2.1) (нелокального уравнения синус-Гордона), которое представляет большой интерес для физических приложений.

Замечание. Ограниченность нелинейности $F(u)$ является существенным требованием. В случае нелокальной модели ϕ^4 с ядром типа Каца–Бейкера уравнение для бегущих волн

$$c^2 u_{zz} - u + u^3 = \frac{1}{2\lambda}\,\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|z-z'|}{\lambda}} u_{z'}(z')\,dz' \tag{2.12}$$

не эквивалентно системе уравнений

$$c^2 u_{zz} - u + u^3 = q_z, \tag{2.13}$$

$$-\lambda^2 q_{zz} + q = u_z. \tag{2.14}$$

Действительно, система (2.13)–(2.14) допускает следующее асимптотическое поведение решений при $z \to +\infty$

$$u \sim e^{\frac{z}{3\lambda}}, \quad u_z \sim e^{\frac{z}{3\lambda}}, \quad q \sim e^{\frac{z}{\lambda}}, \quad q_z \sim e^{\frac{z}{\lambda}}, \tag{2.15}$$

которое уверенно подтверждается численным счетом. Более того, численный счет позволяет предположить, что асимптотическое поведение (2.15) решения является ситуацией общего положения. Различия в асимптотическом поведении u_z и q указывают на то, что константа C_+ в формуле (2.7) не обращается в нуль. Таким образом, система (2.13)–(2.14) описывает лишь некоторые классы решений уравнения (2.12), в частности, ограниченные решения (2.12), но полная эквивалентность (2.13)–(2.14) и (2.12) не имеет места.

3. Нелокальное нелинейное уравнение Клейна–Гордона с ядром *E*-типа

Естественным обобщением нелокальной модели (1.5) с ядром Каца–Бейкера, (2.1), рассмотренной в разделе 2, является та же модель с ядром

$$G(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \varkappa_j e^{-\eta_j|\xi|}, \qquad 0 < \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_N, \tag{3.1}$$

где $\varkappa_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$. В работе [20] ядра вида (3.1) было предложено называть *ядрами E-типа* или *E-ядрами*. Интерес к таким ядрам вызван, в частности, тем, что E-ядра могут приближать с любой заданной точностью ядра более общего вида, возникающие в физических приложениях [20].

Уравнение (1.6) принимает вид

$$c^2 u_{zz} + F(u) = \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{N} \varkappa_j e^{-\eta_j|z-z'|} u_{z'}(z')\,dz'. \tag{3.2}$$

Развивая подход, изложенный в разделе 2, введем функции $q_j(z)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, где

$$q_j(z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta_j|z-z'|} u_{z'}(z')\,dz'. \tag{3.3}$$

Это позволяет свести исходную нелокальную задачу (3.2) к задаче нахождения решений следующей системы уравнений:

$$c^2 u_{zz} + F(u) = \sum_{j=1}^{N} \varkappa_j (q_j)_z, \tag{3.4}$$

$$-(q_j)_{zz} + \eta_j^2 q_j = 2\eta_j u_z, \qquad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.5}$$

Систему (3.4)–(3.5) можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{dz} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{F}(\mathbf{u}), \tag{3.6}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix},$$

причем $\mathbf{0}$ и $\mathbf{E}$ — соответственно, нулевая и единичная $(N+1)\times(N+1)$-матрицы, и

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 0, & \frac{\varkappa_1}{c^2} & \frac{\varkappa_1}{c^2} & \dots & \frac{\varkappa_1}{c^2} \\ 0, & \eta_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0, & 0 & \eta_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \eta_N^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2\eta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2\eta_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -2\eta_N & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u} = \mathrm{col}\,(u, q_1, \dots, q_N, u', q_1', \dots, q_N'),$$
$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathrm{col}\,(\underbrace{0, \dots, 0}_{N+1}, -F(u)/c^2, \underbrace{0, \dots, 0}_{N}).$$

Следуя терминологии раздела 2, введем определение:

Определение. Будем говорить, что решение

$$(u(z), q_1(z), \dots, q_N(z), u'(z), q_1'(z), \dots, q_N'(z))$$

матричного уравнения (3.6) (или аналогичное решение системы (3.4)–(3.5)) *соответствует* уравнению (3.2), если $u(z)$ удовлетворяет (3.2).

Нетрудно заметить, что достаточным условием такого соответствия является условие

$$u_z, q_1, \dots, q_N \in A(\sigma), \quad 0 < \sigma < \eta_1,$$

(определение $A(\sigma)$ также дано в разделе 2).

3.1. Линейное уравнение Клейна–Гордона с ядром *E*-типа

Рассмотрим уравнение (3.2) при $F(u) = 0$. Множество решений (3.4)–(3.5) тогда полностью описывается спектром матрицы $\mathbf{A}$. Оказывается, справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. *Пусть выполняется условие*

$$c^2 < 2\sum_{j=1}^{N} \frac{\varkappa_j}{\eta_j}. \tag{3.7}$$

Тогда жорданова нормальная форма $\mathbf{J}$ *матрицы* $\mathbf{A}$ *имеет вид*

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots & \mathbf{D}_{i\omega} & \ldots & \mathbf{0} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \mathbf{D}_{\Lambda_1} & \ldots & \ldots \\ \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \ddots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{D}_{\Lambda_N} \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Блоки $\mathbf{D}_0$,$\mathbf{D}_{i\omega}$ *и* $\mathbf{D}_{\Lambda_j}$, $j = 1, \ldots, N$, *имеют вид*

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{i\omega} = \begin{pmatrix} -i\omega & 0 \\ 0 & i\omega \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\Lambda_j} = \begin{pmatrix} -\Lambda_j & 0 \\ 0 & \Lambda_j \end{pmatrix},$$

где $\omega > 0$, *и* $\Lambda_j > 0$, $j = 1, \ldots, N$, *и* $\Lambda_j \in (\eta_j; \eta_{j+1})$.

Доказательство. Собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ удовлетворяют уравнению $\Lambda^2 L(\Lambda^2) = 0$, где

$$L(\xi) = \prod_{j=1}^{N} (\eta_j^2 - \xi) - \frac{2\eta_1 \varkappa_1}{c^2} \prod_{j, j \neq 1} (\eta_j^2 - \xi) - \ldots - \frac{2\eta_N \varkappa_N}{c^2} \prod_{j, j \neq N} (\eta_j^2 - \xi). \tag{3.9}$$

Для многочлена $L(\xi)$ имеем:

$$L(-\infty) = \infty, \quad L(\eta_1^2) < 0, \quad L(\eta_2^2) > 0, \quad \ldots,$$

и $L(\eta_N^2)$ имеет знак $(-1)^N$. Таким образом, заключаем, что многочлен $L(\xi)$ имеет $N-1$ положительный корень $\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}$, причем $\eta_j^2 < \xi_j < \eta_{j+1}^2$, $j = 1, 2, \ldots, N-1$. Еще один корень многочлена $L(\xi)$, ξ_N, удовлетворяет соотношению $\xi_N < \eta_1^2$. При этом он будет отрицательным, если $L(0) < 0$ (т. е. знаки $L(\xi)$ в точках η_1^2 и 0 совпадают). Условие $L(0) < 0$ гарантируется соотношением (3.7). В этом случае спектр матрицы $\mathbf{A}$ содержит пару чисто мнимых комплексно-сопряженных значений.

Нулевое собственное значение имеет алгебраическую кратность 2. Для выяснения геометрической кратности нулевого собственного значения заметим, что матричное уравнение

$$\frac{d\mathbf{u}}{dz} = \mathbf{A}\mathbf{u} \tag{3.10}$$

имеет линейно растущее решение $u = z$, $q_j = 2/\eta_j$, $j = 1, \ldots, N$, что означает наличие жордановой клетки, соответствующей нулевому собственному значению. Тем самым лемма 2 доказана. ■

Следствие. *Множество решений уравнения* (3.2) *при условии* (3.7) *в случае* $F(u) = 0$ *образует линейное четырехмерное пространство.* Действительно, линейная система (3.10) при условии (3.7) имеет четырехмерное семейство решений, являющихся функциями медленного роста. Остальные решения, как следует из леммы 2, не удовлетворяют условию

$$u_z, q_1, \ldots, q_N \in A(\sigma)$$

ни при каком $0 < \sigma < \eta_1$ и, следовательно, не соответствуют решениям (3.2). Отождествляя решения, переходящие друг в друга при сдвиге по z, заключаем, что существует трехпараметрическое семейство решений линейного ($F(u) = 0$) уравнения (3.2). Вопрос о сохранении такого семейства решений при переходе от линейной задачи $F(u) = 0$ к нелинейной $F(u) \neq 0$ заслуживает отдельного исследования.

Замечание. Фундаментальная матрица решений уравнения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dz} = \mathbf{J}\mathbf{v} \tag{3.11}$$

имеет вид

$$\mathbf{V}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \mathbf{B}_{i\omega} & \dots & \mathbf{0} & \dots \\ \vdots & \vdots & \mathbf{B}_{\Lambda_1} & \dots & \dots \\ \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{B}_{\Lambda_N} \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

причем

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{i\omega} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega z} & 0 \\ 0 & e^{i\omega z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\Lambda_k} = \begin{pmatrix} e^{-\Lambda_k z} & 0 \\ 0 & e^{\Lambda_k z} \end{pmatrix},$$

Замечание. Матрица перехода $\mathbf{T}$, $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ также может быть записана в явном виде

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
0 & \frac{2}{\eta_1} & -\frac{2i\eta_1\omega}{\eta_1^2+\omega^2} & \frac{2i\eta_1\omega}{\eta_1^2+\omega^2} & -\frac{2\eta_1\Lambda_1}{\eta_1^2-\Lambda_1^2} & \frac{2\eta_1\Lambda_1}{\eta_1^2-\Lambda_1^2} & \dots & -\frac{2\eta_1\Lambda_N}{\eta_1^2-\Lambda_N^2} & \frac{2\eta_1\Lambda_N}{\eta_1^2-\Lambda_N^2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\
0 & \frac{2}{\eta_N} & -\frac{2i\eta_N\omega}{\eta_N^2+\omega^2} & \frac{2i\eta_N\omega}{\eta_N^2+\omega^2} & -\frac{2\eta_N\Lambda_1}{\eta_N^2-\Lambda_1^2} & \frac{2\eta_N\Lambda_1}{\eta_N^2-\Lambda_1^2} & \dots & -\frac{2\eta_N\Lambda_N}{\eta_N^2-\Lambda_N^2} & \frac{2\eta_N\Lambda_N}{\eta_N^2-\Lambda_N^2} \\
0 & 1 & -i\omega & i\omega & -\Lambda_1 & \Lambda_1 & \dots & -\Lambda_N & \Lambda_N \\
0 & 0 & -\frac{2\eta_1\omega^2}{\eta_1^2+\omega^2} & -\frac{2\eta_1\omega^2}{\eta_1^2+\omega^2} & \frac{2\eta_1\Lambda_1^2}{\eta_1^2-\Lambda_1^2} & \frac{2\eta_1\Lambda_1^2}{\eta_1^2-\Lambda_1^2} & \dots & \frac{2\eta_1\Lambda_N^2}{\eta_1^2-\Lambda_N^2} & \frac{2\eta_1\Lambda_N^2}{\eta_1^2-\Lambda_N^2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & -\frac{2\eta_N\omega^2}{\eta_N^2+\omega^2} & -\frac{2\eta_N\omega^2}{\eta_N^2+\omega^2} & \frac{2\eta_N\Lambda_1^2}{\eta_N^2-\Lambda_1^2} & \frac{2\eta_N\Lambda_1^2}{\eta_N^2-\Lambda_1^2} & \dots & \frac{2\eta_N\Lambda_N^2}{\eta_N^2-\Lambda_N^2} & \frac{2\eta_N\Lambda_N^2}{\eta_N^2-\Lambda_N^2}
\end{pmatrix}.$$

3.2. Соответствие между линейным и нелинейными уравнениями Клейна–Гордона с ядром *E*-типа

Пусть $\|\cdot\|$ — векторная норма в пространстве $\mathbb{R}^n$, а $\|\cdot\|_0$ — матричная норма, подчиненная этой векторной норме (см. [22]). Напомним следующее определение:

Определение. Для матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{3.13}$$

имеет место *экспоненциальная дихотомия*, если фундаментальная матрица решений (3.13), $X(t)$, удовлетворяет соотношениям

$$\|X(t)PX^{-1}(s)\|_0 \leqslant Ke^{-\alpha(t-s)} \quad \text{при} \quad s \leqslant t, \tag{3.14}$$

$$\|X(t)(\mathbf{E} - P)X^{-1}(s)\|_0 \leqslant Ke^{-\alpha(s-t)} \quad \text{при} \quad t \leqslant s, \tag{3.15}$$

где α и K — положительные числа, $\mathbf{E}$ — единичная матрица, а P, $\mathbf{E} - P$ — операторы проектирования, $P^2 = P$.

Если матрица $A(t) \equiv A$ не зависит от t, то экспоненциальная дихотомия имеет место тогда и только тогда, когда A не имеет собственных значений с нулевой действительной частью.

В случае, когда матричное уравнение (3.13) обладает свойством экспоненциальной дихотомии, соответствие между линейной задачей (3.13) и нелинейной задачей

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x) \tag{3.16}$$

при некоторых дополнительных ограничениях обеспечивается следующей теоремой:

Теорема (Пальмер, 1973) [21]. *Пусть $A(t)$ — непрерывная $n \times n$ матричная функция, такая, что для уравнения* (3.13) *имеет место экспоненциальная дихотомия. Пусть $f(t, x)$ — непрерывная функция, из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, такая, что существуют константы μ и ζ и для всех t, x, x_1, x_2 выполняются неравенства*

$$\|f(t, x)\| < \mu, \tag{3.17}$$

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant \gamma\|x_1 - x_2\|. \tag{3.18}$$

Тогда если

$$4\gamma K \leqslant \alpha, \tag{3.19}$$

то существует единственная функция $H(t, x)$ из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, такая, что

(i) *$H(t, x) - x$ ограничена в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,*

(ii) *если $x(t)$ — любое решение дифференциального уравнения* (3.16), *то $H(t, x(t))$ — решение уравнения* (3.13),

(iii) *функция H непрерывна в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и для всех t, x*

$$\|H(t, x) - x\| \leqslant \frac{4K\mu}{\alpha}.$$

Для любого фиксированного t, $H_t(x) = H(t, x)$ — гомеоморфизм $\mathbb{R}^n$, $L(t, x) = H_t^{-1}(x)$ непрерывно в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, и если $y(t)$ — любое решение (3.13), *то $L(t, y(t))$ является решением* (3.16).

Непосредственное применение теоремы Пальмера к матричному уравнению (3.6) невозможно, так как линейное уравнение (3.10) не обладает свойством экспоненциальной дихотомии. Вместе с тем, используя теорему Пальмера, можно показать справедливость следующего утверждения:

Теорема 2. *Пусть $F(u)$ удовлетворяет следующим условиям:*

(NL1): *существует такая константа ζ, что при любых $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ выполняется условие*

$$|F(u_1) - F(u_2)| \leqslant \zeta |u_1 - u_2|,$$

(NL2): *существует такая константа F_0, что $|F(u)| \leqslant F_0$.*

Кроме того, пусть выполняется условие:

(C1): *c удовлетворяет двойному неравенству*

$$\frac{64\zeta \|\mathbf{T}\|_0 \|\mathbf{T}^{-1}\|_0}{e\eta_1^2} \leqslant c^2 < 2\sum_{j=1}^{N} \frac{\varkappa_j}{\eta_j}. \tag{3.20}$$

Тогда существует M_0, такое, что

(a) *матричное уравнение* (3.6) *допускает семейство решений, непрерывно зависящее от $N+$ $+\,3$ свободных параметров, такое, что при $z > 0$ и любом $\Omega > \dfrac{\eta_1}{2}$ для решений этого семейства справедливо неравенство*

$$\|\mathbf{u}(z)\| \leqslant M_0 e^{\Omega z}; \tag{3.21}$$

при этом не существует семейства решений уравнения (3.6), *непрерывно зависящего от бо́льшего, чем $N+3$, числа параметров, для которого бы выполнялось условие* (3.21);

(b) *матричное уравнение* (3.6) *допускает семейство решений, непрерывно зависящее от $N+$ $+\,3$ свободных параметров, такое, что при $z < 0$ и любом $\Omega > \dfrac{\eta_1}{2}$ для решений этого семейства справедливо неравенство*

$$\|\mathbf{u}(z)\| \leqslant M_0 e^{-\Omega z}; \tag{3.22}$$

при этом не существует семейства решений уравнения (3.6), *непрерывно зависящего от бо́льшего, чем $N+3$, числа параметров, для которого бы выполнялось условие* (3.22).

Решения, переходящие друг в друга при сдвиге по независимой переменной, при этом считаются различными.

Доказательство. В уравнении (3.6) сделаем замену

$$\mathbf{u} = e^{\frac{\eta_1}{2} z}\mathbf{T}\mathbf{w}. \tag{3.23}$$

При этом $\mathbf{w}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathbf{w}}{dz} = \mathbf{J}_1\mathbf{w} + e^{-\frac{\eta_1}{2}z}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}(e^{\frac{\eta_1}{2}z}\mathbf{T}\mathbf{w}), \tag{3.24}$$

где $\mathbf{J}_1 = \mathbf{J} - \frac{\eta_1}{2}\mathbf{E}$, причем $\mathbf{J}$ — жорданова форма матрицы $\mathbf{A}$. При выполнении условия (3.7) структура $\mathbf{J}$ представлена (3.8). Соответственно, по лемме 2, матрица $\mathbf{J}_1$ имеет жорданов вид, представленный:

- $N-1$ однократным положительным собственным значением, $\Lambda_j - \eta_1/2$, $j = 1, \ldots, N-1$;
- $N-1$ однократным отрицательным собственным значением, $\Lambda_{-j} = -\Lambda_j - \eta_1/2$, $j = = 1, \ldots, N-1$;
- парой комплексных собственных значений $-\eta_1/2 \pm i\omega$;
- жордановой 2×2-клеткой, соответствующей собственному значению $-\eta_1/2$.

Линеаризованное уравнение

$$\frac{d\mathbf{v}}{dz} = \mathbf{J}_1\mathbf{v} \tag{3.25}$$

обладает свойством экспоненциальной дихотомии, причем в формулах (3.14)–(3.15) можно положить

$$\alpha = \eta_1/4, \quad K = 4/(e\eta_1). \tag{3.26}$$

Общее решение уравнения (3.25) имеет вид

$$\mathbf{v}(z, \mathbf{C}) = e^{-\frac{\eta_1}{2}z}\mathbf{V}(z)\mathbf{C}, \tag{3.27}$$

где $\mathbf{C}$ — произвольный постоянный вектор, и $\mathbf{V}(z)$ представлено (3.12).

Нелинейность в уравнении (3.24) не является ограниченной, и к этому уравнению теорема Пальмера неприменима. Для «исправления» этой ситуации рассмотрим уравнение в $\mathbb{R}^{2N+2}$

$$\frac{d\mathbf{w}}{dz} = \mathbf{J}_1\mathbf{w} + \mathbf{F}_1(z, \mathbf{w}), \tag{3.28}$$

с нелинейностью $\mathbf{F}_1(z, \mathbf{w})$, определенной формулой

$$\mathbf{F}_1(z, \mathbf{w}) = \begin{cases} e^{-\frac{\eta_1}{2}z}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}(e^{\frac{\eta_1}{2}z}\mathbf{T}\mathbf{w}), & z \geqslant 0, \\ \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{T}\mathbf{w}), & z < 0. \end{cases}$$

При $z \geqslant 0$ уравнения (3.28) и (3.24) совпадают. Функция $\mathbf{F}_1(z, \mathbf{w})$ является непрерывной, для нее выполняются условия (3.17)–(3.18), причем

$$\mu = F_0\|\mathbf{T}^{-1}\|_0$$

и

$$\gamma = \frac{\zeta}{c^2}\|\mathbf{T}\|_0\|\mathbf{T}^{-1}\|_0. \tag{3.29}$$

Следовательно, к уравнению (3.28) применима теорема Пальмера.

Из теоремы Пальмера следует, что при выполнении условия (3.19) существует гомеоморфизм, ставящий в соответствие решению $\mathbf{v}(z,\mathbf{C})$ линейной задачи (3.25) решение $\mathbf{w}(z,\mathbf{C})$ уравнения (3.28), причем

$$\|\mathbf{w}(z,\mathbf{C}) - \mathbf{v}(z,\mathbf{C})\| \leqslant M.$$

Последняя оценка справедлива для всей числовой прямой, $z \in \mathbb{R}$, при этом $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2N+2}$, а M не зависит от z и $\mathbf{C}$. Условие (3.19) с учетом (3.26) и (3.29) можно записать в виде

$$\frac{64\zeta\|\mathbf{T}\|_0\|\mathbf{T}^{-1}\|_0}{e\eta_1^2} \leqslant c^2. \tag{3.30}$$

Из вида фундаментальной матрицы решений (3.27) следует существование $(N+3)$-параметрического семейства решений (3.25), таких, что $\|\mathbf{v}(z,\mathbf{C})\| = O(z)$ при $z \to +\infty$. Тогда по теореме Пальмера имеется непрерывное $(N+3)$-параметрическое семейство решений $\mathbf{w}(z,\mathbf{C})$ уравнения (3.28), таких, что $\|\mathbf{w}(z,\mathbf{C})\| = O(z)$ при $z \to +\infty$. В силу того, что при $z \geqslant 0$ уравнения (3.28) и (3.24) совпадают, непрерывное $(N+3)$-параметрическое семейство решений с данным асимптотическим поведением при $z \to +\infty$ имеет и уравнение (3.24). При этом ничего нельзя сказать про продолжение решений указанного семейства в рамках уравнения (3.24) на полуось $z < 0$ и их асимптотическое поведение при $z \to -\infty$.

Учитывая соответствие (3.23), получаем утверждение (a) теоремы 2. Утверждение (b) теоремы 2 получается аналогичным образом, путем применения теоремы Пальмера к системе (3.28) с $\mathbf{J}_1 = \mathbf{J} + \frac{\eta_1}{2}\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}_1(z,\mathbf{w})$, определенной формулой

$$\mathbf{F}_1(z,\mathbf{w}) = \begin{cases} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{T}\mathbf{w}), & z \geqslant 0, \\ e^{\frac{\eta_1}{2}z}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}(e^{-\frac{\eta_1}{2}z}\mathbf{T}\mathbf{w}), & z < 0. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Из доказательства теоремы 2 можно сделать следующие выводы.

Следствие 1. *В случае начальных данных общего положения и произвольного E-ядра решение системы* (3.4)–(3.5)*, вообще говоря, не соответствует уравнению* (3.2)*. Напомним, что в случае ядра Каца–Бейкера имело место полное соответствие между решениями нелокального уравнения и системы дифференциальных уравнений.*

Следствие 2. *Пусть Ω — фиксировано, причем $\Omega \in (\frac{\eta_1}{2};\eta_1)$. В $(2N+2)$-мерном фазовом пространстве системы* (3.6) *с координатами*

$$(u, q_1, \ldots, q_N, u', q_1', \ldots, q_N')$$

семейства решений из пунктов (a) *и* (b) *теоремы* 2 *порождают $(N+3)$-мерные инвариантные многообразия W_Ω^+ и W_Ω^-. В силу непрерывности семейств решений из теоремы* 2*,* *эти многообразия являются непрерывными. К сожалению, теорема 2 не позволяет сделать более сильные утверждения о гладкости W_Ω^+ и W_Ω^-, хотя автор предполагает, что утверждение о C^1-гладкости этих многообразий является справедливым.*

Следствие 3. *Пусть для уравнения* (3.2) *выполняются условия* (NL1), (NL2) *и* (C1) *и $u(z)$ — некоторое его решение, причем $u(z), u_z(z) \in A(\Omega)$, $\Omega \in \left(\frac{\eta_1}{2}; \eta_1\right)$. Тогда естественно ожидать, что $u(z)$ включено в непрерывное трехпараметрическое семейство решений* (3.2)*, при условии неразличимости между собой решений, переходящих друг в друга при сдвиге по z.*

Действительно,

$$(u(z), q_1(z), \ldots, q_N(z), u'(z), q_1'(z), \ldots, q_N'(z)),$$

где $q_1, \ldots, q_N \in A(\sigma)$ определены формулами (3.3), является решением системы (3.6). В $(2N+$ $+\,2)$-мерном фазовом пространстве системы (3.6) это решение определяет траекторию Γ, причем $\Gamma \subset W_\Omega^+$ и $\Gamma \subset W_\Omega^-$. Таким образом, пересечение $W_\Omega^+ \cap W_\Omega^-$ не пусто.

Рассмотрим $(2N+1)$-мерную секущую поверхность Π, такую, что пересечение Γ и Π является трансверсальным и $P = \Gamma \cap \Pi$. Дальнейшие рассуждения будем вести, имея в виду малую окрестность точки P. Пусть $\tilde{W}_\Omega^+ = W_\Omega^+ \cap \Pi$ и $\tilde{W}_\Omega^- = W_\Omega^- \cap \Pi$. $\tilde{W}_\Omega^+$ и $\tilde{W}_\Omega^-$ являются $N+2$-мерными многообразиями. Допустим, что, во-первых, в окрестности точки P многообразия $\tilde{W}_\Omega^+$ и $\tilde{W}_\Omega^-$ являются C^1-гладкими, и, во-вторых, их пересечение в Π является трансверсальным. Тогда это пересечение, $\tilde{W}_\Omega \equiv \tilde{W}_\Omega^+ \cap \tilde{W}_\Omega^-$, локально, в окрестности P, представляет собой трехмерное многообразие и сохраняется при малых вариациях параметров задачи. Все траектории, проходящие через $\tilde{W}_\Omega$, принадлежат одновременно W_Ω^+ и W_Ω^-. Эти траектории определяют решения (3.6), все компоненты которых принадлежат $A(\Omega)$. Все эти решения соответствуют уравнению (3.2), в смысле определения, данного в начале раздела 3. Таким образом, решение $u(z)$ оказывается включено в непрерывное трехпараметрическое семейство решений (3.2). Эти решения «нумеруются» точками $\tilde{W}_\Omega$ и являются различными, т. е. не переходят друг в друга при сдвиге по z.

4. Заключение

В настоящей работе проведено исследование множества решений нелокального обобщения нелинейного уравнения Клейна–Гордона. Рассмотрен случай, когда ядро интегрального оператора имеет вид (3.1) (так называемое ядро E-типа). Простейшим частным случаем такого ядра является ядро Каца–Бейкера, возникающее в приложениях различной физической природы.

Основные результаты работы относятся к случаю, когда нелинейность $F(u)$ ограничена. Этот случай является физически содержательным, в частности, имея в виду многочисленные приложения нелокального уравнения синус-Гордона, $F(u) = \sin u$. При предположении ограниченной нелинейности для нелокального нелинейного волнового уравнения с ядром Каца–Бейкера удается показать, что решения типа бегущих волн образуют трехпараметрическое непрерывное семейство (считая, что решения, переходящие друг в друга при сдвиге по независимой переменной, не различаются). Это свидетельствует о том, что нелокальная модель описывает более широкий класс структур, чем традиционное нелинейное волновое уравнение. Далее, результаты, относящиеся к случаю ядра Каца–Бейкера, удается обобщить на класс ядер более общего вида. Основным результатом при этом является теорема 2 и следствия из нее, позволяющие предсказать наличие подобного трехпараметрического семейства при наличии некоторых ограничений. Ограничения касаются нелинейности (она должна быть не только ограниченной, но и иметь достаточно малую константу Липшица) и скорости бегущей волны (она должна принадлежать определенному диапазону).

С практической точки зрения, полученные результаты означают следующее. Пусть уравнение (3.2) с N экспонентами в ядре интегрального оператора аппроксимирует исходное интегродифференциальное уравнение (1.6), причем нелинейность $F(u)$ ограничена. Число экспонент N в ядре (3.2) может быть произвольным и достаточно большим, зависящим от требуемой точности аппроксимации исходного ядра уравнения (1.6). Пусть имеется найденное численно решение $u(z)$ уравнения (3.2). Тогда естественно ожидать, что процедура численного продолжения по параметру этого решения возможна и может быть осуществлена внутри трехпараметрического семейства, включающего $u(z)$.

В свете полученных результатов представляются интересными следующие направления дальнейших исследований:

Во-первых, интересно дальнейшее уточнение результатов данной работы, касающихся E-ядер. По-видимому, требование *ограниченности* нелинейности является необходимым для существования инвариантных многообразий, существование которых утверждает теорема 2. Однако вопрос о том, можно ли при этом ослабить требование малости константы Липшица (условие (NL2) теоремы 2) остается открытым. Аналогично, остается открытым вопрос о расширении диапазона скоростей (условие (C1) теоремы 2). По мнению автора, верхняя граница этого диапазона является естественной, а нижняя — может быть улучшена. Кроме того, метод доказательства теоремы 2, предложенный в работе и опирающийся на теорему Пальмера, не позволяет сделать заключение о гладкости инвариантных многообразий, которое является желательным.

Во-вторых, представляет интерес развитие полученных результатов на случай ядер более общего вида. В частности, одним из наиболее «востребованных» ядер интегрального оператора в уравнении (1.5) является ядро (см. [8])

$$G_\lambda(\xi) = \frac{1}{\pi\lambda} K_0\left(\frac{|\xi|}{\lambda}\right). \tag{4.1}$$

Вопрос о размерности пространства решений типа бегущих волн для уравнения (1.5) с ядром (4.1) остается неизученным. Если следовать подходу, который представлен в данной работе, для исследования этого вопроса необходимо корректное введение динамической системы, порожденной данным уравнением и определенной в некотором банаховом пространстве. По мнению автора, эта операция представляет интерес сама по себе.

Список литературы

[1] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.

[2] Иванченко Ю. М., Соболева Т. К. Джозефсоновский переход с нелокальным взаимодействием // Письма в ЖЭТФ, 1990, т. 51, вып. 2, с. 100–102.

[3] Ivanchenko Yu. M., Soboleva T. K. Nonlocal interaction in Josephson junction // Phys. Lett. A, 1990, vol. 147, no. 1, pp. 65–69.

[4] Алиев Ю. М., Силин В. П., Урюпин С. А. К теории нелинейных диспергирующих волн в джозефсоновских контактах // СФХТ, 1992, т. 5, № 2, с. 228–235.

[5] Gurevich A. Nonlocal Josephson electrodynamics and pinning in superconductors //Phys. Rev. B, 1992, vol. 46, no. 5, pp. 3187–3190.

[6] Gurevich A. Nonlinear viscous motion of vortices in Josephson contacts //Phys. Rev. B, 1993, vol. 48, no. 17, pp. 12857–12865.

[7] Mints R. G. Nonlocal Josephson electrodynamics //J. Low. Temp. Phys., 1997, vol. 106, nos. 3–4, pp. 183–192.

[8] Abdumalikov A. A. (Jr.), Alfimov G. L., Malishevskii A. S. Nonlocal electrodynamics of Josephson vortices in superconducting circuits // Supercond. Sci. Technol., 2009, vol. 22, 053001, 48 pp.

[9] Savel'ev S., Yampol'skii V., Rakhmanov A., Nori F. Terahertz Josephson plasma waves in layered superconductors: Spectrum, generation, nonlinear and quantum phenomena // Rep. Prog. Phys., 2010, vol. 73, 026501, 49 pp.

[10] Киселев В. В., Танкеев А. П. Длинноволновые слабонелинейные спиновые возбуждения в тонких ферромагнитных пленках // ФММ, 1996, т. 82, № 3, с. 32–45.

[11] Pokrovsky V. L., Virosztek A. Long-range interactions in commensurate-incommensurate phase transition // J. Phys. C, 1983, vol. 16, pp. 4513–4525.

[12] Braun O. M., Kivshar Yu. S., Zelenskaya I. I. Kinks in the Frenkel–Kontorova model with long-range interparticle interactions // Phys. Rev. B, 1990, vol. 41, pp. 7118–7138.

[13] Woafo P., Kofane T. C., Bokosah A. S. Discreteness effects in a ϕ^4 chain with long-range interactions // J. Phys.: Condens. Matter, 1991, vol. 3, pp. 2279–2286.

[14] Woafo P., Kofane T. C., Bokosah A. S. Statistical mechanics of the continuum and discrete ϕ^4 system with long-range interaction potential: The soliton dilute-gas phenomenology // J. Phys.: Condens. Matter, 1992, vol. 4, pp. 3389–3404.

[15] Woafo P., Kenné J. R., Kofané T. C. Topological solitons in a sine-Gordon system with Kac–Baker interactions // J. Phys.: Condens. Matter, 1993, vol. 5, L123–L128.

[16] Kenné J. R., Woafo P., Kofané T. C. Dynamics and thermodynamics of the sine-Gordon system with long-range interaction potential // J. Phys.: Condens. Matter, 1994, vol. 6, pp. 4277–4288.

[17] Mingaleev S. F., Gaididei Yu. B., Majernikova E., Shpyrko S. Kinks in the discrete sine-Gordon model with Kac–Baker long-range interactions // Phys. Rev. E, 2000, vol.61, pp. 4454–4461.

[18] Alfimov G. L., Eleonsky V. M., Kulagin N. E., Mitskevich N. V. Dynamics of topological solitons in models with nonlocal interactions // Chaos, 1993, vol. 3, pp. 405–415.

[19] Алиев Ю. М., Овчинников К. Н. Силин В. П., Урюпин С. А. Нелокальная джозефсоновская электродинамика слоистых структур // ЖЭТФ, 1995, т. 107, вып. 3, с. 972–988.

[20] Alfimov G. L., Eleonsky V. M., Lerman L. M. Solitary wave solutions of nonlocal sine-Gordon equations // Chaos, 1998, vol. 8, no. 1, pp. 257–271.

[21] Palmer K. J. A generalization of Hartman's linearization theorem // J. Math. Anal. Appl., 1973, vol. 41, pp. 753–758.

[22] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

On the dimension of the set of solutions for nonlocal nonlinear wave equation

Georgy L. Alfimov

Moscow Institute of Electronic Technology (Technical University), TU MIET
Moscow, Zelenograd, 124498, Russia
galfimov@yahoo.com

Nonlocal generalizations of nonlinear wave equation arise in numerous physical applications. It is known that switching from local to nonlocal description may result in new features of the problem and new types of solutions. In this paper the author analyses the dimension of the set of travelling wave solutions for a nonlocal nonlinear wave equation. The nonlocality is represented by the convolution operator which replaces the second derivative in the dispersion term. The results have been obtained for the case where the nonlinearity is bounded, and the kernel of the convolution operator is represented by a sum of exponents with weights (so-called E-type kernel). In the simplest particular case, (so-called Kac–Baker kernel) it is shown that the solutions of this equation form a 3-parametric set (assuming the equivalence of the solutions which differ by a shift with respect to the independent variable). Then it is shown that in the case of the general E-type kernel the 3-parametric set of solutions also exists, generically, under some additional restrictions. The word «generically» in this case means some transversality condition for intersection of some manifolds in a properly defined phase space.

MSC 2010: 37N20, 37D10, 45J05
Received March 23, 2011, accepted June 14, 2011
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 2, pp. 209–226 (Russian)