Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 2. С. 227–238.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 517.938
MSC 2010: 37E30

Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности каскадов Морса–Смейла на 3-многообразиях

О. В. Починка

В работе рассматривается класс $MS(M^3)$ диффеоморфизмов (каскадов) Морса–Смейла, заданных на связных замкнутых ориентируемых 3-многообразиях M^3. Для диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ вводится понятие схемы S_f, которая содержит информацию о периодических данных каскада и топологии вложения сепаратрис седловых точек. Устанавливается, что необходимым и достаточным условием топологической сопряженности диффеоморфизмов $f, f' \in MS(M^3)$ является эквивалентность схем $S_f, S_{f'}$.

Ключевые слова: диффеоморфизм (каскад) Морса–Смейла, топологическая сопряженность, пространство орбит

1. Введение и формулировка результатов

В 1937 году А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин [2] ввели понятие грубой системы (системы дифференциальных уравнений в ограниченной части плоскости, не меняющей своих качественных свойств при малых изменениях правых частей) и указали необходимые и достаточные условия для того, чтобы система была грубой. Наиболее непосредственное обобщение этих условий выделяет класс динамических систем (как потоков, так и каскадов) Морса–Смейла.

Определение 1. Динамическая система на замкнутом многообразии M^n, $n \geq 1$, называется *системой Морса–Смейла*, если

1) неблуждающее множество системы гиперболично и состоит из конечного числа неподвижных точек и периодических орбит,

Получено 12 мая 2011 года
После доработки 2 июня 2011 года

Работа поддержана грантом Правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039.

Починка Ольга Витальевна
olga-pochinka@yandex.ru
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23

2) инвариантные многообразия неподвижных точек и периодических орбит пересекаются трансверсально.

Своим названием эти системы обязаны С. Смейлу [24], который в 1961 году рассмотрел класс потоков со свойствами 1), 2) и доказал для них выполнение соотношений, аналогичных неравенствам Морса. Хорошо известно, что динамические системы Морса–Смейла на многообразиях любой размерности действительно являются грубыми (структурно устойчивыми), но не являются типичными, за исключением потоков Морса–Смейла на поверхностях и систем Морса–Смейла на окружности.

Одним из первых вопросов, возникающих при изучении динамической системы, является вопрос о поведении ее траекторий и возможности качественно (с точностью до топологической эквивалентности (сопряженности)) отличать это поведение от поведения траекторий другой системы. Решение этих задач составляет *топологическую классификацию* динамических систем и заключается, во-первых, в выделении информации о системе, однозначно определяющей ее класс топологической эквивалентности (сопряженности) и называемой *полным топологическим инвариантом*, и, во-вторых, в *реализации* — построении по выделенной информации стандартного представителя в каждом классе топологической эквивалентности (сопряженности). Возможность реализации позволяет моделировать системы с заданными свойствами. Приведем некоторые классификационные результаты для динамических систем Морса–Смейла.

Класс эквивалентности потока Морса–Смейла на окружности однозначно определяется числом его неподвижных точек. Для каскадов на окружности полный топологический инвариант получен А. Г. Майером [17] в 1939 году и состоит из числа периодических орбит и числа вращения Пуанкаре. В 1955 году Е. А. Леонтович и А. Г. Майер [16] в качестве полного топологического инварианта ввели схему потока с конечным числом особых траекторий на двумерной сфере. В 1971 году М. Пейкшото [21] формализовал понятие схемы Леонтович–Майера и доказал, что для потока на произвольной поверхности полным топологическим инвариантом является класс изоморфности ориентируемого графа, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с состояниями равновесия и замкнутыми траекториями, а ребра соответствуют некоторым компонентам связности инвариантных многообразий состояний равновесия и замкнутых траекторий, при этом изоморфность графов включает в себя сохранение выделенных специальным образом подграфов[1]. Инварианта, подобного графу Пейкшото и оснащенного некоторой дополнительной информацией, оказалось достаточно для описания полного топологического инварианта диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом гетероклинических орбит (А. Н. Безденежных, В. З. Гринес [3–5, 12]). Для потоков с конечным числом особых траекторий на 3-многообразиях в качестве полного топологического инварианта вновь использовались конструкции, подобные схеме Леонтович–Майера и фазовой диаграмме С. Смейла (С. Ю. Пилюгин, Я. Л. Уманский [22, 25]). Классификационные результаты на языке графов Пейкшото и диаграмм Смейла имеются и в размерности $n > 3$: для потоков на сфере $\mathbb{S}^n$, в предположении, что эти потоки не имеют замкнутых траекторий и гетероклинических пересечений (С. Ю. Пилюгин [22]); для градиентноподобных диффеоморфизмов на M^n, все седловые точки которого имеют индекса Морса, равный единице (В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев [13, 14]).

[1]В работе [18] А. А. Ошемкова и В. В. Шарко была замечена неточность инварианта Пейкшото, связанная с тем, что изоморфизм графов не различает неэквивалентного расслоения на траектории областей, ограниченных двумя периодическими орбитами.

Таким образом, для всех упомянутых выше динамических систем основным моментом для выделения класса топологической сопряженности (эквивалентности) являлось указание асимптотического направления инвариантных многообразий неподвижных точек и периодических орбит. Благодаря работам [6, 23] стало ясно, что каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях не вписываются в эту концепцию. Причиной столь неожиданного эффекта оказалась возможность «дикого» поведения сепаратрис седловых точек, а именно: замыкание сепаратрисы может отличаться от самой сепаратрисы всего одной точкой, но не являться при этом даже топологическим подмногообразием. Впервые диффеоморфизм с «дикими» сепаратрисами был построен Д. Пикстоном в 1977 году [23]. Он использовал кривую Артина–Фокса для реализации инвариантных многообразий седловой неподвижной точки. Как показали Х. Бонатти и В. З. Гринес, в классе диффеоморфизмов Морса–Смейла трехмерной сферы с неблуждающим множеством, состоящим из четырех неподвижных точек (седла, одного источника и двух стоков), существует счетное множество топологически несопряженных. При этом полным топологическим инвариантом является тип вложения сепаратрис седловой неподвижной точки.

Эффективным инструментом, позволяющим различать тип вложения сепаратрисы, является переход к пространству орбит части блуждающего множества, содержащего эту сепаратрису. При этом структура пространства блуждающих орбит является необходимой информацией в топологическом инварианте наряду с информацией об асимптотическом направлении инвариантных многообразий седловых периодических точек. Этой идеей связан цикл работ по топологической классификации диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях, не имеющих либо гетероклинических точек, либо гетероклинических кривых (Х. Бонатти, В. З. Гринес, В. С. Медведев, Е. Пеку, О. В. Починка [6–10]). Настоящая работа показывает, что такой подход позволяет полностью решить задачу топологической классификации произвольных каскадов Морса–Смейла на 3-многообразиях.

Обозначим через $MS(M^3)$ класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла, заданных на гладких замкнутых ориентируемых 3-многообразиях M^3. Как уже было отмечено выше, замыкание инвариантного многообразия седловой точки диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ не является в общем случае топологическим подмногообразием фазового пространства. Это явление может иметь как чисто топологическую, так и динамическую природу. Последний случай соответствует ситуации, когда сепаратриса седловой точки участвует в гетероклинических пересечениях.

Напомним, что непустое пересечение $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}$ инвариантных многообразий различных седловых точек σ_1, σ_2 называется *гетероклиническим.* При этом компонента связности такого пересечения называется *гетероклинической кривой* в случае, когда $\dim\ W^s_{\sigma_1} = \dim\ W^u_{\sigma_2}$, и *гетероклинической точкой* в случае, когда $\dim\ W^s_{\sigma_1} \neq \dim\ W^u_{\sigma_2}$. Диффеоморфизм, не имеющий гетероклинических точек, называется *градиентноподобным*, по аналогии с потоками Морса–Смейла без замкнутых траекторий. Наличие гетероклинических пересечений приводит к сложному асимтотическому поведению инвариантных многообразий, участвующих в этих пересечениях и нетривиальной динамике ограничения системы на замыкание множества гетероклинических пересечений. В работе [1] В. С. Афраймович и Л. П. Шильников доказали, что на многообразиях размерности, большей двух, ограничение потока Морса–Смейла на замыкание множества гетероклинических траекторий сопряжено с надстройкой над марковской цепью.

Несмотря на разнообразие гетероклинических пересечений, динамика любого каскада $f \in MS(M^3)$ допускает следующее представление в виде «источник–сток». Для $q \in \{0, 1, 2, 3\}$ обозначим через Ω_q множество периодических точек диффеоморфизма f с индексом Морса q. Положим $A_f = \Omega_0 \cup W^u_{\Omega_1}$, $R_f = \Omega_3 \cup W^s_{\Omega_2}$ и $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$. Методом построения фильтрации доказывается, что множество A_f (R_f) является аттрактором (репеллером)[2] диффеоморфизма f. При этом множество V_f состоит из блуждающих точек, которые под действием диффеоморфизма f (f^{-1}) движутся к аттрактору (репеллеру).

Обозначим через $\widehat{V}_f = V_f/f$ пространство орбит действия f на V_f и через $p_f : V_f \to \widehat{V}_f$ — естественную проекцию. Тогда p_f является накрытием и пространство орбит $\widehat{V}_f$ является простым многообразием[3] (см. [11] и [15]). При этом накрытие p_f индуцирует эпиморфизм $\eta_f : \pi_1(\widehat{V}_f) \to \mathbb{Z}$, ставящий в соответствие гомотопическому классу $[c] \in \pi_1(\widehat{V}_f)$ замкнутой кривой $c \subset \widehat{V}_f$ целое число n, такое, что поднятие кривой c на V_f соединяет точку x с точкой $f^n(x)$. Положим $\widehat{\mathbb{W}}^s_f = p_f(W^s_{\Omega_1} \setminus A_f)$ и $\widehat{\mathbb{W}}^u_f = p_f(W^u_{\Omega_2} \setminus R_f)$.

Определение 2. Набор $S_f = (\widehat{V}_f, \eta_f, \widehat{\mathbb{W}}^s_f, \widehat{\mathbb{W}}^u_f)$ назовем схемой диффеоморфизма $f \in \in MS(M^3)$.

Определение 3. Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in MS(M^3)$ назовем эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\widehat{\varphi}\colon \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$ со следующими свойствами:

1) $\eta_f = \eta_{f'}\widehat{\varphi}_*$, где $\widehat{\varphi}_*\colon \pi_1(\widehat{V}_f) \to \pi_1(\widehat{V}_{f'})$ — индуцированный гомоморфизм,

2) $\widehat{\varphi}(\widehat{\mathbb{W}}^s_f) = \widehat{\mathbb{W}}^s_{f'}$ и $\widehat{\varphi}(\widehat{\mathbb{W}}^u_f) = \widehat{\mathbb{W}}^u_{f'}$.

Теорема 1. *Диффеоморфизмы Морса–Смейла $f, f' \in MS(M^3)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.*

2. Необходимые сведения

В этой части мы приводим без доказательства необходимые для топологической классификации свойства диффеоморфизмов $f \in MS(M^3)$.

Пусть $f \in MS(M^3)$. Согласно определению 1, неблуждающее множество Ω_f диффеоморфизма f состоит из конечного числа периодических точек. Для любой точки $p \in \Omega_f$ тройка чисел (m_p, q_p, ν_p) называется *периодическими данными точки p (орбиты $\mathcal{O}_p$)*, где m_p — период точки p, q_p — число отрицательных собственных значений матрицы Якоби $\left(\dfrac{\partial f^{m_p}}{\partial x}\right)\Big|_p$ (индекс Морса) и ν_p — тип ориентации точки p, т. е. $\nu_p = +1$ (-1), если отображение $f^{m_p}|_{W^u_p}$ сохраняет (меняет) ориентацию. Точка p называется *седлом*, если $0 < q_p < 3$, и называется *узлом* в противном случае, при этом p называется *стоком* (*источником*), если $q_p = 0$ $(q_p = 3)$. Поскольку диффеоморфизм f сохраняет ориентацию, то для узловых точек тип ориентации всегда равен $+1$, тогда как для седловых точек допустимы оба типа ориентации. Периодические данные точки p однозначно определяют ее класс эквивалентности относительно локальной топологической сопряженности в следующем смысле: отображение f^{m_p} в некоторой окрестности точки p топологически сопряжено линейному

[2]Компактное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором диффеоморфизма* $f\colon M^n \to M^n$, если существует окрестность U множества A, такая, что $f(U) \subset U$ и $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} f^n(U)$. Множество $R \subset M^n$ называется *репеллером* для f, если оно является аттрактором для f^{-1}.

[3]Гладкое связное замкнутое ориентируемое 3-многообразие называется *простым*, если оно гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ или неприводимо (любая гладко вложенная 2-сфера ограничивает в нем 3-шар).

диффеоморфизму $a_{q_p,\nu_p}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданному формулой

$$a_{q_p,\nu_p}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} (\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2}),\ q_p = 0,\ \nu_p = +1, \\ (\nu_p \cdot 2x_1, \frac{\nu_p \cdot x_2}{2}, \frac{x_3}{2}),\ q_p = 1,\ \nu_p \in \{-1,+1\}, \\ (\nu_p \cdot 2x_1, 2x_2, \frac{\nu_p \cdot x_3}{2}),\ q_p = 2,\ \nu_p \in \{-1,+1\}, \\ (2x_1, 2x_2, 2x_3),\ q_p = 3,\ \nu_p = +1. \end{cases}$$

Поскольку инвариантные многообразия W^s_p, W^u_p являются гладкими подмногообразиями M^3, то локально сопрягающий гомеоморфизм продолжается на f^{m_p}-инвариантную окрестность точки p следующим образом.

Для $t \in (0,1]$ положим $\mathcal{N}^t_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3\colon x_1^2(x_2^2+x_3^2) \le t\}$, $\mathcal{N}^t_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3\colon (x_1^2+x_2^2)x_3^2 \le t\}$ и $\mathcal{N}^1_q = \mathcal{N}_q, q \in \{1,2\}$. Определим в окрестности $\mathcal{N}_1$ ($\mathcal{N}_2$) пару трансверсальных $C^{1,1}$-слоений $\mathcal{F}^u_1$, $\mathcal{F}^s_1$ ($\mathcal{F}^u_2$, $\mathcal{F}^s_2$) следующим образом: $\mathcal{F}^u_1 = \bigcup\limits_{(c_2,c_3)\in\mathbb{R}^2} \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathcal{N}_1\colon (x_2,x_3) = (c_2,c_3)\}$, $\mathcal{F}^s_1 = \bigcup\limits_{c_1\in\mathbb{R}} \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathcal{N}_1\colon x_1 = c_1\}$ ($\mathcal{F}^u_2 = \bigcup\limits_{c_3\in\mathbb{R}} \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathcal{N}_2\colon x_3 = c_3\}$, $\mathcal{F}^s_2 = \bigcup\limits_{(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2} \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathcal{N}_2\colon (x_1,x_2) = (c_1,c_2)\}$).

Определение 4. Пусть p — седловая точка диффеоморфизма f. Окрестность N_p точки p назовем адаптированной, если она оснащена парой f^{m_p}-инвариантных трансверсальных $C^{1,0}$-слоений F^u_p, F^s_p, таких, что существует гомеоморфизм $\mu_p\colon N_p \to \mathcal{N}_{q_p}$ со следующими свойствами:

1) μ_p сопрягает диффеоморфизм $f^{m_p}|_{N_p}$ с диффеоморфизмом $a_{q_p,\nu_p}|_{\mathcal{N}_{q_p}}$,

2) μ_p переводит слои слоений F^u_p, F^s_p в слои слоений $\mathcal{F}^u_{q_p}$, $\mathcal{F}^s_{q_p}$.

Окрестность $N_{\mathcal{O}_p} = \bigcup\limits_{k=0}^{m_p-1} f^k(N_p)$, оснащенную парой f-инвариантных трансверсальных слоений $F^u_{\mathcal{O}_p} = \bigcup\limits_{k=0}^{m_p-1} f^k(F^u_p)$, $F^s_{\mathcal{O}_p} = \bigcup\limits_{k=0}^{m_p-1} f^k(F^s_p)$ и отображением $\mu_{\mathcal{O}_p}$, составленным из гомеоморфизмов $\mu_p f^{-k}\colon f^k(N_p) \to \mathcal{N}_{q_p}$, $k = 0, \ldots, m_p-1$, будем называть адаптированной окрестностью орбиты $\mathcal{O}_p$.

Для $t \in (0,1]$ положим $N^t_p = \mu_p^{-1}(\mathcal{N}^t_{q_p})$ и $N^t_{\mathcal{O}_p} = \bigcup\limits_{k=0}^{m_p-1} f^k(N^t_p)$.

Введем порядок на множестве периодических орбит диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$, позволяющий последовательно выделять инвариантные подмножества, состоящие из блуждающих орбит диффеоморфизма f. Пространства орбит этих многообразий содержат информацию о вложении сепаратрис периодических точек в несущее многообразие, которую удается индуктивно использовать при построении согласованной системы окрестностей и доказательстве классификационной теоремы 1.

Известно, что на множестве периодических орбит диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ отношение С. Смейла $\prec$ ($\mathcal{O}_p \prec \mathcal{O}_r \iff W^s_{\mathcal{O}_p} \cap W^u_{\mathcal{O}_r} \neq \emptyset$) является отношением частичного порядка. Так как пересечение $W^s_{\mathcal{O}_p} \cap W^u_{\mathcal{O}_r}$ является трансверсальным, то существует нумерация периодических орбит, удовлетворяющая следующему определению.

Определение 5. Нумерацию периодических орбит $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_{k_f}$ диффеоморфизма f назовем динамической, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) если $q_{\mathcal{O}_i} < q_{\mathcal{O}_j}$, то $i < j$,
2) если $\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j$, то $i \le j$.

Везде далее мы будем предполагать, что орбиты диффеоморфизма f динамически упорядочены. Для каждой периодической орбиты $\mathcal{O}_i$ обозначим через (m_i, q_i, ν_i) ее периодические данные и положим $W^s_i = W^s_{\mathcal{O}_i}$, $W^u_i = W^u_{\mathcal{O}_i}$. Для любой седловой орбиты $\mathcal{O}_i, i = k_0 + +1, \ldots, k_2$, положим $N_i = N_{\mathcal{O}_i}$, $N^t_i = N^t_{\mathcal{O}_i}$, $F^u_i = F^u_{\mathcal{O}_i}$, $F^s_i = F^u_{\mathcal{O}_i}$ и $\mu_i = \mu_{\mathcal{O}_i}$. Для любой точки $x \in N_i$ будем обозначать через $F^u_{i,x}$ $(F^s_{i,x})$ единственный слой слоения F^u_i (F^s_i), проходящий через точку x. Определим проекции $\pi^u_i \colon N_i \to W^s_i$ $(\pi^s_i \colon N_i \to W^u_i)$ вдоль слоев слоения F^u_i (F^s_i) следующим образом: $\pi^u_i(x) = F^u_{i,x} \cap W^s_i$ $(\pi^s_i(x) = F^s_{i,x} \cap W^u_i)$.

Ключевым техническим моментом при доказательстве классификационной теоремы 1 является существование согласованной системы окрестностей в смысле следующего определения.

Определение 6. Набор N_f адаптированных окрестностей $N_{k_0+1}, \ldots, N_{k_2}$ седловых орбит диффеоморфизма f назовем согласованной системой окрестностей[4], если для $i < j$ выполняются следующие условия:

1) если $W^s_i \cap W^u_j = \emptyset$, то $N_i \cap N_j = \emptyset$,
2) если $W^s_i \cap W^u_j \ne \emptyset$, то
 a) $(F^s_{j,x} \cap N_i) \subset F^s_{i,x}$ и $(F^u_{i,x} \cap N_j) \subset F^u_{j,x}$ для $x \in (N_i \cap N_j)$,
 b) $\pi^s_j(\pi^u_i(x)) = \pi^u_i(\pi^s_j(x))$ для точек $x \in (N_i \cap N_j)$, в которых определены обе части равенства.

Для $i = 1, \ldots, k_f - 1$ положим $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{i} W^u_j$, $R_i = \bigcup\limits_{j=i+1}^{k_f} W^s_j$, $V_i = M^3 \setminus (A_i \cup R_i)$. Положим $\widehat{V}_i = V_i/f$ и обозначим через $p_i \colon V_i \to \widehat{V}_i$ естественную проекцию. Тогда для любого $i = 1, \ldots, k_f - 1$ множество A_i является аттрактором, множество R_i является репеллером диффеоморфизма f, проекция $p_i \colon V_i \to \widehat{V}_i$ является накрытием и пространство $\widehat{V}_i$ является гладким замкнутым ориентируемым 3-многообразием. Для $q = 0, 1, 2, 3$ обозначим через k_q число всех периодических орбит с индексом Морса, меньшим или равным q. Для $j = k_0 + +1, \ldots, k_2$ положим $\widehat{W}^s_{j,i} = p_i(W^s_j \cap V_i)$ и $\widehat{W}^u_{j,i} = p_i(W^u_j \cap V_i)$.

3. Доказательство классификационной теоремы 1

Докажем, что диффеоморфизмы $f, f' \in MS(M^3)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда схемы S_f и $S_{f'}$ эквивалентны.

Доказательство.

Необходимость. Пусть диффеоморфизмы $f, f' \in MS(M^3)$ топологически сопряжены посредством гомеоморфизма $h \colon M^3 \to M^3$. Положим $\varphi = h|_{V_f}$. Тогда гомеоморфизм

[4]Согласованная система окрестностей является модификацией допустимой системы трубчатых семейств, построенной в работах [19] и [20]. При этом, в случае непустого пересечения многообразий W^s_i и W^u_j по множеству размерности нуль, условие 2b) определения 6 выполняется автоматически для любых адаптированных окрестностей N_i и N_j, удовлетворяющих условию 2a), в отличие от случая $\dim(W^s_i \cap W^u_j) > 0$. Условие 2b) является техническим дополнением к определению допустимой системы трубчатых семейств, данному Ж. Палисом и С. Смейлом, и существенно используется при построении сопрягающего гомеоморфизма в теореме 1.

$\varphi\colon V_f \to V_{f'}$ сопрягает диффеоморфизмы $f|_{V_f}$ и $f'|_{V_{f'}}$. Учитывая, что естественные проекции p_f и $p_{f'}$ являются накрытиями, а сопрягающий гомеоморфизм переводит инвариантные многообразия периодических точек диффеоморфизма f в инвариантные многообразия периодических точек диффеоморфизма f' с сохранением размерности и устойчивости, получаем, что отображением $\widehat{\varphi} = p_{f'}\varphi p_f^{-1} : \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$ является искомым гомеоморфизмом, осуществляющим эквивалентность схем S_f и $S_{f'}$.

Достаточность. Пусть схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in MS(M^3)$ эквивалентны посредством гомеоморфизма $\widehat{\varphi}\colon \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$. Построение гомеоморфизма $h\colon M^3 \to M^3$, сопрягающего диффеоморфизмы f, f', разобьем на шаги.

Шаг 1. Пусть $\widehat{\varphi}\colon \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$ — гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность схем S_f и $S_{f'}$. Из условия 1) определения эквивалентности схем следует, что существует поднятие $\varphi\colon V_f \to V_{f'}$ гомеоморфизма $\widehat{\varphi}$, являющееся гомеоморфизмом, сопрягающим диффеоморфизмы $f|_{V_f}$ и $f'|_{V_{f'}}$.

Из условия 2) определения эквивалентности схем следует, что для любой седловой орбиты $\mathcal{O}_i$, $i = k_0 + 1, \ldots, k_1$, существует седловая орбита диффеоморфизма f' (которую мы будем обозначать через $\mathcal{O}'_i$), такая, что $\varphi(W^s_i \setminus A_f) = W'^s_i \setminus A_{f'}$. Более того, $m_i = m'_i$ и $\nu_i = \nu'_i$. Обозначим через P_i (P'_i) множество всех периодических и гетероклинических точек на многообразии W^s_i (W'^s_i). Поскольку множество P_i (P'_i) является счетным, то гомеоморфизм $\varphi|_{W^s_i \setminus P_i}\colon W^s_i \setminus P_i \to W'^s_i \setminus P'_i$ продолжается до гомеоморфизма, переводящего многообразие W^s_i в многообразие W'^s_i, причем такое продолжение единственное и сопрягает диффеоморфизмы $f|_{W^s_i}$ и $f'|_{W'^s_i}$.

Аналогично строится продолжение гомеоморфизма φ на W^u_i, $i = k_1+1, \ldots, k_1$, так что гомеоморфизм φ единственным образом продолжается на множество $W^s_{\Omega_1} \cup W^u_{\Omega_2}$ до гомеоморфизма (который снова обозначим через φ), сопрягающего диффеоморфизмы $f|_{V_f \cup W^s_{\Omega_1} \cup W^u_{\Omega_2}}$ и $f'|_{V_{f'} \cup W^s_{\Omega'_1} \cup W^u_{\Omega'_2}}$.

Шаг 2. Пусть $i = k_0+1, \ldots, k_1$. Пусть N_i (N'_i) — окрестность седловой орбиты $\mathcal{O}_i$ ($\mathcal{O}'_i$), принадлежащая согласованной системе окрестностей N_f ($N_{f'}$). Зафиксируем некоторую компоненту связности N^0_i окрестности N_i и обозначим через N'^0_i компоненту связности окрестности N'_i, такую, что $\varphi(N^0_i) \cap N'^0_i \neq \emptyset$. Последовательно для каждого $i = k_0+1, \ldots, k_1$ построим гомеоморфизм $\varphi^u_i : W^u_i \to W'^u_i$, сопрягающий диффеоморфизмы $f|_{W^u_i}$ и $f'|_{W'^u_i}$.

Для $i = k_0 + 1$ пусть $\mu^0_{k_0+1}\colon N^0_{k_0+1} \to \mathcal{N}_1$ ($\mu'^0_{k_0+1}\colon N'^0_{k_0+1} \to \mathcal{N}_1$) — отображение, сопрягающее ограничение диффеоморфизма $f^{m_{k_0+1}}$ ($f'^{m_{k_0+1}}$) на $N^0_{k_0+1}$ ($N'^0_{k_0+1}$) с диффеоморфизмом $a_{1,\nu_{k_0+1}}|_{\mathcal{N}_1}$. Положим $N^{0t}_{k_0+1} = (\mu^0_{k_0+1})^{-1}(\mathcal{N}^t_1)$, $N^{s0t}_{k_0+1} = (\mu^0_{k_0+1})^{-1}(\mathcal{N}^{st}_1)$, $W^{s0}_{k_0+1} = W^s_{k_0+1} \cap N^0_{k_0+1}$, $W^{u0}_{k_0+1} = W^u_{k_0+1} \cap N^0_{k_0+1}$, $W'^{u0}_{k_0+1} = W'^u_{k_0+1} \cap N'^0_{k_0+1}$ и $\varphi^{u0}_{k_0+1} = (\mu'^0_{k_0+1})^{-1}\mu^0_{k_0+1}|_{W^{u0}_{k_0+1}} : W^{u0}_{k_0+1} \to W'^{u0}_{k_0+1}$. Определим гомеоморфизм $\varphi^u_{k_0+1}\colon W^u_{k_0+1} \to W'^u_{k_0+1}$ формулой: $\varphi^u_{k_0+1}(x) = f'^k(\varphi^{u0}_{k_0+1}(f^{-k}(x)))$, где $x \in W^u_{k_0+1}$ и $k \in \{0, \ldots, m_{k_0+1}-1\}$, такое, что $f^{-k}(x) \in W^{u0}_{k_0+1}$.

Опишем построение гомеоморфизма φ^u_i, $i > k_0+1$, при условии, что гомеоморфизмы φ^u_j уже построены для всех $j = k_0 + 1, \ldots, i-1$.

Множество $\widehat{W}^u_{i,i-1}$ является гладким подмногообразием многообразия $\widehat{V}_{i-1}$, каждая компонента связности которого является окружностью. Положим $\widehat{\mathbb{W}}^s_{i-1} = \bigcup\limits_{j=k_0+1}^{i-1} \widehat{W}^s_{j,i-1}$, $\widehat{N}_{j,i-1} = p_{i-1}(N_j \cap V_{i-1})$ и $\widehat{\mathbb{N}}_{i-1} = \bigcup\limits_{j=k_0+1}^{i-1} \widehat{N}_{j,i-1}$. Множество $\widehat{\mathbb{W}}^s_{i-1}$ компактно и пересечение

$\widehat{W}^u_{i,i-1}\cap\widehat{\mathbb{W}}^s_{i-1}$ состоит из не более чем счетного (возможно, пустого) множества точек, являющихся проекцией гетероклинических орбит, принадлежащих неустойчивому многообразию W^u_i. Тогда существует конечное число попарно непересекающихся отрезков $\widehat{I}^i_1,\ldots,\widehat{I}^i_{r_i}$ на $\widehat{W}^u_{i,i-1}$, таких, что $\bigcup\limits_{l=1}^{r_i}\widehat{I}^i_l\supset(\widehat{\mathbb{W}}^s_{i-1}\cap\widehat{W}^u_{i,i-1})$, а отрезок $\widehat{I}^i_l$, $l=1,\ldots,r_i$, принадлежит пересечению $\widehat{N}_{j,i-1}\cap\widehat{W}^u_{i,i-1}$ при некотором $j\in\{k_0+1,\ldots,i-1\}$ (зависящем от l), содержит единственную точку $\widehat{h}^i_l$ из пересечения $\widehat{W}^s_{j,i-1}\cap\widehat{W}^u_{i,i-1}$ и $\pi'^s_j(F'^u_{j,\varphi(h^i_l)})\supset\varphi^u_j(\pi^s_j(I^i_l)))$, где I^i_l — поднятие на V_{i-1} отрезка $\widehat{I}^i_l$, проходящее через точку $h^i_l\in p^{-1}_{i-1}(\widehat{h}^i_l)$.

Определим топологическое вложение $\varphi^u_{i,l}\colon I^i_l\to F'^u_{j,\varphi(h^i_l)}$ соотношением $\pi'^s_j\varphi^u_{i,l}=\varphi^u_j\pi^s_j$. Положим $\widehat{\varphi}^u_{i,l}=p'_{i-1}\varphi^u_{i,l}p^{-1}_{i-1}$. Обозначим через $\widehat{\varphi}^u_i\colon\widehat{W}^u_{i,i-1}\to\widehat{W}'^u_{i,i-1}$ гомеоморфизм, совпадающий с $\widehat{\varphi}^u_{i,l}$ на $\widehat{I}^i_l$, $l=1,\ldots,r_i$, и через $\varphi^u_i\colon W^u_i\setminus\mathcal{O}_i\to W'^u_i\setminus\mathcal{O}'_i$ — его поднятие, совпадающее с $\varphi^u_{i,l}$ на I^i_l, $l=1,\ldots,r_i$. Тогда гомеоморфизм $\varphi^u_{i,l}$ продолжается на $\mathcal{O}_i$ отображением φ и дает искомый гомеоморфизм.

Обозначим через $\varphi^u_{\Omega_1}\colon W^u_{\Omega_1}\to W^u_{\Omega_1}$ отображение, составленное из гомеоморфизмов $\varphi^u_{k_0+1},\ldots,\varphi^u_{k_1}$. Для каждого $i=k_1+1,\ldots,k_2$ аналогичным образом определим гомеоморфизм $\varphi^s_i\colon W^s_i\to W'^s_i$, сопрягающий диффеоморфизмы $f|_{W^s_i}$ и $f'|_{W'^s_i}$. Обозначим через $\varphi^s_{\Omega_2}\colon W^s_{\Omega_2}\to W^s_{\Omega_2}$ отображение, составленное из гомеоморфизмов $\varphi^s_{k_1+1},\ldots,\varphi^s_{k_2}$.

Шаг 3. Для $j=k_0+1,\ldots,k_1$ положим $\widehat{W}^s_j=p_f(W^s_j)$, $\widehat{N}_j=p_f(N_j)$ и $\widehat{\mathbb{N}}_1=\bigcup\limits_{j=k_0+1}^{k_1}\widehat{N}_j$. Для $j=k_1+1,\ldots,k_2$ положим $\widehat{W}^u_j=p_f(W^u_j)$, $\widehat{N}_j=p_f(N_j)$ и $\widehat{\mathbb{N}}_2=\bigcup\limits_{j=k_1+1}^{k_2}\widehat{N}_{j,k_1}$. Множества $\widehat{\mathbb{W}}^u_f$ и $\widehat{\mathbb{W}}^s_f$ являются компактными и пересекаются по не более чем счетному множеству окружностей, являющихся проекцией всех гетероклинических кривых диффеоморфизма f. Тогда существует конечное число окружностей $\widehat{\gamma}_1,\ldots,\widehat{\gamma}_r$ из множества $\widehat{\mathbb{W}}^s_f\cap\widehat{\mathbb{W}}^u_f$ и их трубчатых окрестностей $\widehat{H}_1,\ldots,\widehat{H}_r$ со следующими свойствами:

1) для кривой $\widehat{\gamma}_l$, принадлежащей пересечению $\widehat{W}^s_{i_1}\cap\widehat{W}^u_{i_2}$ при некоторых i_1,i_2, зависящих от l, окрестность $\widehat{H}_l$ принадлежит пересечению $\widehat{N}^s_{i_1}\cap\widehat{N}^u_{i_2}$ и $int\ \widehat{H}\supset(\widehat{\mathbb{W}}^s_f\cap\widehat{\mathbb{W}}^u_f)$, где $\widehat{H}=$ $=\widehat{H}_1\cup\ldots\cup\widehat{H}_r$,

2) у кривой $\widehat{\gamma}_l$ существует трубчатая окрестность $\widehat{T}_l\subset int\ \widehat{H}_l$, такая, что $(\widehat{H}_l\setminus int\ \widehat{T}_l)\cap$ $\cap(\widehat{\mathbb{W}}^s_f\cap\widehat{\mathbb{W}}^u_f)=\emptyset$, на множестве $T_l=p^{-1}_f(\widehat{T}_l)$ корректно определены топологические вложения $\varphi_{T_l,1}\colon T_l\to(N'_{i_1}\cap N'_{i_2})$, $\varphi_{T_l,2}\colon T_l\to(N'_{i_1}\cap N'_{i_2})$ соотношениями (3.1), (3.2):

$$\varphi^u_{i_1}\pi^s_{i_1}=\pi'^s_{i_1}\psi_{T_l,1},\quad \varphi^s_{i_2}\pi^u_{i_2}=\pi'^u_{i_2}\psi_{T_l,1},\quad \varphi\pi^s_{i_2}\pi^u_{i_1}=\pi'^s_{i_2}\pi'^u_{i_1}\psi_{T_l,1} \tag{3.1}$$

$$\varphi^u_{i_1}\pi^s_{i_1}=\pi'^s_{i_1}\psi_{T_l,2},\quad \varphi^s_{i_2}\pi^u_{i_2}=\pi'^u_{i_2}\psi_{T_l,2},\quad \varphi\pi^u_{i_1}\pi^s_{i_2}=\pi'^u_{i_1}\pi'^s_{i_2}\psi_{T_l,2} \tag{3.2}$$

и $\psi_{T_l,i}(T_l)\subset int\ \varphi(H_l)$, где $\gamma_l=p^{-1}_f(\widehat{\gamma}_l)$ и $H_l=p^{-1}_f(\widehat{H}_l)$.

Из свойства 2b) согласованной системы окрестностей следует, что $\psi_{T_l,1}(x)=\psi_{T_l,2}(x)$ для любой точки $x\in T_l$. Положим $\psi_{T_l}=\psi_{T_l,1}=\psi_{T_l,2}$. В силу инвариантности согласованных слоений и того, что гомеоморфизмы φ, $\varphi^u_{i_1}$, $\varphi^s_{i_2}$ сопрягают соответствующие ограничения диффеоморфизмов f и f', гомеоморфизм $\psi_{T_l}\colon T_l\to\psi_{T_l}(T_l)$ сопрягает диффеоморфизмы $f|_{T_l}$ и $f'|_{\psi_{T_l}(T_l)}$. Тогда отображение $\widehat{\psi}_{\widehat{T}_l}=p_{f'}\psi_{T_l}(p_f|_{\widehat{T}_l})^{-1}\colon\widehat{T}_l\to\widehat{\varphi}(\widehat{H}_l)$ является топологическим вложением.

Положим $\widehat{T} = \widehat{T}_1 \cup \ldots \cup \widehat{T}_r$ и обозначим через $\widehat{\psi}_{\widehat{T}} : \widehat{T} \to \widehat{\psi}_{\widehat{T}}(\widehat{H})$ топологическое вложение, составленное из отображений $\widehat{\psi}_{\widehat{T}_1}, \ldots, \widehat{\psi}_{\widehat{T}_r}$. Поскольку топологическое вложение $\widehat{\psi}_{\widehat{T}}$ обладает свойством $\widehat{\psi}_{\widehat{T}}(\widehat{T} \cap \widehat{W}^s_i) \subset \widehat{W}'^s_i$, $\widehat{\psi}_{\widehat{T}}(\widehat{T} \cap \widehat{W}^u_j) \subset \widehat{W}'^u_j$ для любых $i = k_0 + 1, \ldots, k_1$, $j = k_1 + 1, \ldots, k_2$, то существует топологическое вложение $\widehat{\varphi}_{\widehat{H}}$, совпадающее с отображением $\widehat{\psi}_{\widehat{T}}$ на $\widehat{T}$, совпадающее с $\widehat{\varphi}$ на $\partial \widehat{H}$ и такое, что $\widehat{\varphi}_{\widehat{H}}(\widehat{H} \cap \widehat{\mathbb{W}}^s_f) = \widehat{\varphi}(\widehat{H} \cap \widehat{\mathbb{W}}^s_f)$, $\widehat{\varphi}_{\widehat{H}}(\widehat{H} \cap \widehat{\mathbb{W}}^u_f) = \widehat{\varphi}(\widehat{H} \cap \widehat{\mathbb{W}}^u_f)$. Определим гомеоморфизм $\widehat{\varphi}_0 \colon \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$ формулой $\widehat{\varphi}_0(x) = \begin{cases} \widehat{\varphi}(x), \ x \in (\widehat{V}_f \setminus \widehat{H}), \\ \widehat{\varphi}_{\widehat{H}}, \ x \in \widehat{H}. \end{cases}$ Обозначим через $\varphi_0 : V_f \to V_{f'}$ поднятие гомеоморфизма $\widehat{\varphi}_0$, совпадающее с φ вне $H = p_f^{-1}(\widehat{H})$.

Шаг 4. Модифицируем гомеоморфизм $\widehat{\varphi}_0$ до гомеоморфизма $\widehat{\varphi}_{0,k_1} \colon \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$, осуществляющего эквивалентность схем S_f, $S_{f'}$, совпадающего с $\widehat{\varphi}_0$ вне некоторой окрестности множества $\widehat{W}^s_{k_1}$ и на множестве $\widehat{T}$. При этом $\widehat{\varphi}_{0,k_1}$ обладает поднятием $\varphi_{0,k_1} \colon V_f \to V_{f'}$, которое переводит согласованные двумерные устойчивые слоения диффеоморфизма f в окрестности $W^u_{k_1}$ в согласованные двумерные устойчивые слоения диффеоморфизма f' в окрестности $W'^u_{k_1}$ так, что гомеоморфизм φ_{0,k_1} непрерывно продолжается на множество $W^u_{k_1}$ гомеоморфизмом $\varphi^u_{k_1}$.

Выберем значение $\tau_{k_1} \in (0, 1]$ так, чтобы на множестве $N^{0\tau_{k_1}}_{k_1}$ было корректно определено топологическое вложение $\psi^0_{k_1} : N^{0\tau_{k_1}}_{k_1} \to N'^0_{k_1}$ соотношениями $\varphi_0 \pi^u_{k_1} = \pi'^u_{k_1} \psi^0_{k_1}$, $\varphi^{u0}_{k_1} \pi^s_{k_1} = \pi'^s_{k_1} \psi^0_{k_1}$ и $\psi^0_{k_1}(N^{0\tau_{k_1}}_{k_1} \setminus W^{u0}_{k_1}) \subset \varphi_0(N^0_{k_1} \setminus W^{u0}_{k_1})$. Определим топологическое вложение $\psi_{k_1} \colon N^{\tau_{k_1}}_{k_1} \to N'_{k_1}$ формулой $\psi_{k_1}(x) = (f')^k(\psi^0_{k_1}(f^{-k}(x)))$, где $k \in \{0, \ldots, m_{k_1} - 1\}$ такое, что $f^{-k}(x) \in N^{0\tau_{k_1}}_{k_1}$. Положим $\widehat{N}^{\tau_{k_1}}_{k_1} = p_f(N^\tau_{k_1})$ и определим топологическое вложение $\widehat{\psi}_{k_1} : \widehat{N}^{\tau_{k_1}}_{k_1} \to \widehat{N}'_{k_1}$ формулой $\widehat{\psi}_{k_1} = p_{f'} \psi_{k_1} p_f^{-1}$. Поскольку отображение $\widehat{\psi}_{k_1}$ совпадает с гомеоморфизмом $\widehat{\varphi}_0$ на $\widehat{W}^s_{k_1} \cup \widehat{T}$ и $\widehat{\psi}_{k_1}(\widehat{N}^{\tau_{k_1}}_{k_1} \cap \widehat{W}^s_j) \subset \widehat{W}'^s_j$ для каждого $j = k_0 + 1, \ldots, k_1$, то существует топологическое вложение $\widehat{\varphi}_{0,k_1} \colon \widehat{N}_{k_1} \to \widehat{V}_{f'}$, совпадающее $\widehat{\psi}_{k_1}$ на $\widehat{N}^{\tau_{k_1}}_{k_1}$, совпадающее с $\widehat{\varphi}_0$ на $\partial \widehat{N}_{k_1} \cup \widehat{T}$ и такое, что $\widehat{\varphi}_{0,k_1}(\widehat{N}_{k_1} \cap \widehat{\mathbb{W}}^s_f) = \widehat{\varphi}_0(\widehat{N}_{k_1} \cap \widehat{\mathbb{W}}^s_f)$.

Для $i = k_0 + 2, \ldots, k_1$ покажем, как модифицировать гомеоморфизм $\widehat{\varphi}_{0,i}$ до гомеоморфизма $\widehat{\varphi}_{0,i-1} \colon \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$, осуществляющего эквивалентность схем S_f, $S_{f'}$, совпадающего с $\widehat{\varphi}_{0,i}$ вне некоторой окрестности множества $\bigcup\limits_{j=i-1}^{k_1} \widehat{W}^s_j$ и на множестве $\widehat{T}$. При этом $\widehat{\varphi}_{0,i-1}$ обладает поднятием $\varphi_{0,i} : V_f \to V_{f'}$, которое переводит согласованные двумерные устойчивые слоения диффеоморфизма f в окрестности $\bigcup\limits_{j=i-1}^{k_1} W^u_j$ в согласованные двумерные устойчивые слоения диффеоморфизма f' в окрестности $\bigcup\limits_{j=i-1}^{k_1} W'^u_j$ так, что гомеоморфизм $\varphi_{0,i-1}$ непрерывно продолжается на множество $\bigcup\limits_{j=i-1}^{k_1} W^u_j$ гомеоморфизмом $\varphi^u_{\Omega_1}$.

Обозначим через $\phi_i \colon V_f \cup \bigcup\limits_{j=i}^{k_1} W^u_j \to V_{f'} \cup \bigcup\limits_{j=i}^{k_1} W'^u_j$ гомеоморфизм, совпадающий с $\varphi_{0,i}$ на V_f и совпадающий с $\varphi^u_{\Omega_1}$ на $\bigcup\limits_{j=i}^{k_1} W'^u_j$. Положим $\widehat{\phi}_{i,i-1} = p'_{i-1} \phi_i p^{-1}_{i-1} : \widehat{V}_{i-1} \to \widehat{V}'_{i-1}$. Как выше, выберем значение $\tau_{i-1} \in (0, 1]$ так, чтобы на множестве $N^{\tau_{i-1}}_{i-1}$ было корректно определено топологическое вложение $\psi_{i-1}\colon N^{\tau_{i-1}}_{i-1} \to N'^{0}_{i-1}$, переводящее слои слоения F^u_{i-1} в слои слоения F'^u_{i-1} в силу отображения ϕ_i и переводящее слои слоения F^s_{i-1} в слои слоения F'^s_{i-1} в силу отображения φ^u_{i-1}. Положим $\widehat{N}^{\tau_{i-1}}_{i-1,i-1} = p_{_{i-1}}(N^{\tau_{i-1}}_{i-1})$, $\widehat{T}_{i-1} = p_{_{i-1}}(T)$ и $\widehat{\mathbb{W}}^s_{i-1} = p_{_{i-1}}(W^s_{\Omega_1})$. Определим топологическое вложение $\widehat{\psi}_{i-1}\colon \widehat{N}^{\tau_{i-1}}_{i-1,i-1} \to \widehat{N}'_{i-1,i-1}$ формулой $\widehat{\psi}_{i-1} = p'_{_{i-1}}\psi_{i-1}p^{-1}_{i-1}$. Поскольку отображение $\widehat{\psi}_{i-1}$ совпадает с гомеоморфизмом $\widehat{\phi}_{i,i-1}$ на $\widehat{W}^s_{i-1} \cup \cup \widehat{T}_{i-1}$ и $\widehat{\psi}_{i-1}(\widehat{N}^{\tau_{i-1}}_{i-1,i-1} \cap \widehat{W}^s_j) \subset \widehat{W}^s_j$ для каждого $j = k_0 + 1, \ldots, i-1$, то существует топологическое вложение $\widehat{\phi}_{i-1,i-1}\colon \widehat{N}_{i-1,i-1} \to \widehat{V}'_{i-1}$, совпадающее с $\widehat{\psi}_{i-1}$ на $\widehat{N}^{\tau_{i-1}}_{i-1}$, совпадающее с $\widehat{\phi}_{i,i-1}$ на $\partial\widehat{N}_{i-1} \cup \widehat{T}_{i-1}$ и такое, что $\widehat{\phi}_{i-1,i-1}(\widehat{N}_{i-1} \cap \widehat{\mathbb{W}}^s_{i-1}) = \widehat{\phi}_{i,i-1}(\widehat{N}_{i-1} \cap \widehat{\mathbb{W}}^s_{i-1})$.

Обозначим через $\phi_{i-1,i-1}$ поднятие на V_{i-1} гомеоморфизма $\widehat{\phi}_{i-1,i-1}$, совпадающее с отображением ϕ_i на ∂N_{i-1}, и через $\phi_{i-1}\colon V_f \cup \bigcup\limits_{j=i-1}^{k_1} W^u_j \to V_{f'} \cup \bigcup\limits_{j=i-1}^{k_1} W'^u_j$ — гомеоморфизм, совпадающий с ϕ_i на $(V_f \cup \bigcup\limits_{j=i-1}^{k_1} W^u_j) \setminus N_{i-1}$, совпадающий с ϕ_{i-1} на $N_{i-1} \setminus W^u_i$ и совпадающий с φ^u_i на W^u_i. Положим $\varphi_{0,i-1} = \phi_{i-1}|_{V_f}$ и $\widehat{\varphi}_{0,i-1} = p_{_{f'}}\varphi_{0,i-1}p^{-1}_f$.

Таким образом, искомый гомеоморфизм $\widehat{\varphi}_1$ совпадает с гомеоморфизмом $\widehat{\varphi}_{0,k_0+1}$.

Шаг 5. Повторяя рассуждения шага 4 с заменой u на s, s на u, φ_0 на φ_1, Ω_1 на Ω_2, построим гомеоморфизм $\varphi_2\colon V_f \to V_{f'}$? такой, что отображение $\widehat{\varphi}_2 = p_{_{f'}}\varphi_2 p^{-1}_f\colon \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$ осуществляет эквивалентность схем S_f и $S_{f'}$, а отображение φ_2 по непрерывности продолжается на $W^u_{\Omega_1}$ гомеоморфизмом $\varphi^u_{\Omega_1}$ и на $W^s_{\Omega_2}$ — гомеоморфизмом $\varphi^s_{\Omega_2}$. Кроме того, гомеоморфизм φ_2 продолжается до искомого гомеоморфизма $h\colon M^3 \to M^3$ следующим образом: для любой точки $\omega \in \Omega_0$ $(\alpha \in \Omega_3)$ $h(\omega) = \omega' \in \Omega'_0$ $(h(\alpha) = \alpha' \in \Omega'_3)$, где $\varphi_2(W^s_\omega \setminus \omega) = W^s_{\omega'} \setminus \omega'$ $(\varphi_2(W^u_\alpha \setminus \alpha) = W^u_{\alpha'} \setminus \alpha')$. $\diamond$

Автор благодарит В. З. Гринеса за плодотворные обсуждения и внимательное прочтение рукописи.

Список литературы

[1] Афраймович В. С., Шильников Л. П. Об особых множествах систем Морса–Смейла // Тр. Моск. мат. о-ва, 1973, т. 28, с. 181–214.

[2] Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // Докл. АН СССР, 1937, т. 14, вып. 5, с. 247–250.

[3] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях: Ч. 1 // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. темат. сб. научн. трудов / Е. А. Леонтович-Андронова. Горький: ГГУ, 1984. С. 22–38.

[4] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий // Дифференциальные и интегральные уравнения: Сб. научн. трудов / Н. Ф. Отроков. Горький: ГГУ, 1985. С. 33–37.

[5] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях: Ч. 2 // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. темат. сб. научн. трудов / Е. А. Леонтович-Андронова. Горький: ГГУ, 1987. С. 24–32.

[6] Bonatti Ch., Grines V. Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 // J. Dynam. Control Systems, 2000, vol. 6, no. 4, pp. 579–602.

[7] Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E. Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds // Topology, 2004, no. 43, pp. 369–391.

[8] Бонатти Х., Гринес В. З., Починка О. В. Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях // Докл. РАН, 2004, т. 396, вып. 4, с. 439–442.

[9] Бонатти Х., Гринес В. З., Починка О. В. Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях // Тр. МИАН, 2005, т. 250, с. 5–53.

[10] Bonatti Ch., Grines V., Pochinka O. Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with the chain of saddles on 3-manifolds // Foliations 2005. Hackensack (NJ): World Sci., 2006. P. 121–147.

[11] Bonatti Ch., Paoluzzi L. 3-manifolds which are orbit spaces of diffeomorphisms // Topology, 2008, vol. 47, pp. 71–100.

[12] Гринес В. З. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях // Матем. заметки, 1993, т. 54, № 3, с. 3–17.

[13] Гринес В. З., Гуревич Е. Я. О диффеоморфизмах Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей трех // Докл. РАН, 2007, т. 416, вып. 1, с. 15–17.

[14] Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Медведев В. С. Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей трех // Тр. МИАН, 2008, т. 261, с. 61–86.

[15] Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С., Починка О. В. Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла // Тр. МИАН, 2010, т. 271, с. 111–133.

[16] Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // Докл. АН СССР, 1955, т. 103, вып. 4, с. 557–560.

[17] Майер А. Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Ученые записки Горьк. ун-та, 1939, вып. 12, с. 215–229.

[18] Ошемков А. А., Шарко В. В. О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Матем. сб., 1998, т. 189, № 8, с. 93–140.

[19] Palis J. On Morse–Smale dynamical systems // Topology, 1969, vol. 8, no. 4, pp. 385–404.

[20] Palis J., Smale S. Structural stability theorems // Global Analysis: Proc. Sympos. Pure Math. (Berkeley, Calif., 1968): Vol. 14. Providence, R.I.: AMS, 1970. P. 223–231 [Пали Дж., Смейл С. Теоремы структурной устойчивости // Математика, 1969, т. 13, № 2, с. 145–155].

[21] Peixoto M. On the classification of flows on two-manifolds // Dynamical systems: Proc. Symp. (Univ. of Bahia, Salvador, Brasil, 1971). New York–London: Acad. Press, 1973. P. 389–419.

[22] Пилюгин С. Ю. Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса–Смейла без периодических траекторий на сферах // Дифференциальные уравнения, 1978, т. 14, № 2, с. 245–254.

[23] Pixton D. Wild unstable manifolds // Topology, 1977, vol. 16, no. 2, pp. 167–172.

[24] С. Смейл С. Неравенства Морса для динамических систем // Математика, 1967, т. 11, № 4, с. 79–87.

[25] Уманский Я. Л. Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса–Смейла с конечным числом особых траекторий // Матем. сб., 1990, т. 181, № 2, с. 212–239.

Necessary and sufficient conditions for topological classification of Morse–Smale cascades on 3-manifolds

Olga V. Pochinka

Research Institute of Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod State University
Ul'yanova st. 10, Nizhny Novgorod, 603605, Russia
olga-pochinka@yandex.ru

In this paper class $MS(M^3)$ of Morse–Smale diffeomorphisms (cascades) given on connected closed orientable 3-manifolds are considered. For a diffeomorphism $f \in MS(M^3)$ it is introduced a notion scheme S_f, which contains an information on the periodic data of the cascade and a topology of embedding of the sepsrstrices of the saddle points. It is established that necessary and sufficient condition for topological conjugacy of diffeomorphisms $f, f' \in MS(M^3)$ is the equivalence of the schemes $S_f, S_{f'}$.

MSC 2010: 37E30
Keywords: Morse–Smale diffeomorphism (cascade), topological conjugacy, space orbit

Received May 12, 2011, accepted June 2, 2011
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 2, pp. 227–238 (Russian)