



УДК: 517.957  
MSC 2010: 35Q53

## Двухзонные 3-эллиптические решения уравнений Буссинеска и Кортевега–де Фриза

А. О. Смирнов, Г. М. Головачёв, Е. Г. Амосёнок

Исследовано поведение двухзонных эллиптических решений уравнений Буссинеска и КдФ, построенных по  $n$ -листному накрытию над тором ( $n \leq 3$ ). Показано, что форма двухзонного решения зависит от  $n$ , а не от типа нелинейного волнового уравнения.

Ключевые слова: солитон, уравнение Буссинеска, уравнение КдФ, тэта-функция, редукция, накрытие

### Введение

До середины 60-х годов прошлого века изучение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных осуществлялось, в основном, по четырем направлениям: а) теоремы существования и единственности; б) построение решений нелинейных уравнений со слабой нелинейностью методами теории возмущений; в) изучение некоторых классов автомодельных решений; г) численное моделирование. В настоящее время наряду с этими методами для широкого класса нелинейных эволюционных уравнений также используется «метод обратной задачи рассеяния» (МОЗР) и его модификация — «метод конечнозонного (алгебро-геометрического) интегрирования». Начало этим методам положила работа американских физиков Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [1], опубликованная в 1967 году, в ней было описано решение уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) в терминах прямой и обратной задачи рассеяния для оператора Шрёдингера с быстроубывающим потенциалом. В 1968 году Лакс [2] формализовал результаты этой работы и ввел понятие  $L$ – $A$ -пары:

---

Получено 28 апреля 2011 года  
После доработки 23 июня 2011 года

---

Смирнов Александр Олегович  
[alsmir@guar.ru](mailto:alsmir@guar.ru)  
Головачёв Григорий Михайлович  
[ggolovachev@yandex.ru](mailto:ggolovachev@yandex.ru)  
Амосёнок Евгений Геннадьевич  
[amosenok@bk.ru](mailto:amosenok@bk.ru)

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (ГУАП)  
190000, Россия, г. Санкт-Петербург, Большая Морская ул., д. 67



уравнение КдФ стало интерпретироваться как условие совместности системы двух линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} L\psi = E\psi, \\ \partial_t\psi = A\psi, \end{cases}$$

где  $L$  — оператор Шрёдингера с быстроубывающим потенциалом. В 1971 году Гарднер [3] доказал гамильтоновость уравнений, допускающих представление Лакса, а Захаров и Фаддеев — их полную интегрируемость [4]. В том же году в работе Захарова и Шабата [5] МОЗР был применен к нелинейному уравнению Шрёдингера, допускающему представление «нулевой кривизны»

$$\begin{cases} \partial_x\psi = U\psi, \\ \partial_t\psi = V\psi. \end{cases}$$

Тем самым была доказана неуникальность уравнения КдФ, и метод стал бурно развиваться как вширь, так и вглубь.

В 1974 году работами Новикова [6] и Лакса [7] было заложено новое направление в МОЗР — нахождение периодических и почти периодических решений уравнений типа КдФ. Становление этого направления, получившего название «метод конечнозонного (алгебро-геометрического) интегрирования», связано, прежде всего, с именами Дубровина, Новикова, Матвеева, Итса и Кричевера (см., напр., [8–12]). Несмотря на явные формулы для конечнозонных решений, широкое их использование затруднялось тем, что: а) они выражаются через  $\eta$ -функции Римана, представляющие собой многомерные ряды Фурье; б) параметрами решения являются периоды абелевых дифференциалов, определенных на некоторой алгебраической кривой, называемой спектральной. В связи с этим с начала 80-х годов в работах Белоколоса, Энольского, Бабища, Бобенко, Матвеева и Смирнова (одного из авторов) начал развиваться метод редукции  $g$ -зонных решений интегрируемых нелинейных уравнений к решениям, выражающимся через  $\eta$ -функции меньшей размерности (см., напр., [13] и библиографию там).

В настоящей работе мы рассмотрим такие хорошо известные уравнения, используемые для описания распространения волн на мелкой воде, как уравнение Кортевега–де Фриза

$$4u_t = u_{xxx} + 6uu_x \quad (1)$$

и уравнение Буссинеска

$$3u_{\tau\tau} + (u_{xxx} + 6uu_x)_x = 0. \quad (2)$$

Оба этих уравнения имеют алгебро-геометрические решения [11, 12], и поэтому, с нашей точки зрения, является интересным вопрос, что сильнее влияет на форму волнового процесса — какой-нибудь из параметров кривой, используемой для построения решений, или тип нелинейного волнового уравнения. Напомним, что уравнение Кортевега–де Фриза описывает распространение волны в одну сторону, в то время как уравнение Буссинеска является простейшим нелинейным волновым уравнением, описывающим распространение волн в обоих направлениях. Поскольку по кривым алгебраического рода  $g = 2$  можно построить решения обоих уравнений [12, 14], то такие кривые наиболее естественно использовать для получения ответа на данный вопрос.

В связи с этим в работе строятся и сравниваются периодические по  $x$  (редуцированные) двухзонные решения уравнений Буссинеска (2) и Кортевега–де Фриза (1). В качестве исходных данных для построения решений используются:



1. алгебраическая кривая  $\Gamma^3 = \{(\chi, \lambda)\}$  [13, 15, 16]:

$$\Gamma^3: \chi^2 = (\lambda^2 - 3g_2) \prod_{j=1}^3 (\lambda - 3e_j), \quad (3)$$

ассоциированная с двухзонным потенциалом Ламе

$$u(x) = 6\wp(x)$$

оператора Шрёдингера

$$\psi_{xx} - u(x)\psi = E\psi,$$

где  $\wp(x)$  — эллиптическая функция Вейерштрасса [17]

$$(\wp'(\alpha))^2 = 4 \prod_{j=1}^3 (\wp(\alpha) - e_j) = 4\wp^3(\alpha) - g_2\wp(\alpha) - g_3,$$

2. и кривая

$$\Gamma^2: \chi^2 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2), \quad 1 < a < b, \quad (4)$$

обладающая голоморфной инволюцией  $(\chi, \lambda) \rightarrow (\chi, -\lambda)$ . Все вычисления для кривой  $\Gamma^2$  выполнены в работе [18].

Как будет показано ниже, на характер редуцированных двухзонных решений сильнее всего влияет такая характеристика, как число листов у отображения спектральной кривой на эллиптическую, в терминах которой эти решения выражаются, тогда как от вида уравнения зависят только соотношения между числовыми параметрами решения.

## 1. Конечнотонные решения уравнений Буссинеска и Кортвега–де Фриза

Следуя Кричеверу [11, 12, 14], рассмотрим алгебраическую кривую  $\Gamma$  рода  $g$  с выделенной точкой  $\mathcal{P}_\infty$  на ней. Выберем на  $\Gamma$  канонический базис циклов  $\gamma^t = (a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$  с матрицей индексов пересечения

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Ему соответствует нормированный базис голоморфных дифференциалов

$$\oint_{a_k} d\mathcal{U}_j = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, g. \quad (5)$$

Хорошо известно, что матрица периодов кривой  $\Gamma$

$$B_{kj} = \oint_{b_k} d\mathcal{U}_j, \quad k, j = 1, \dots, g, \quad (6)$$

есть симметричная матрица с положительно определенной мнимой частью.

Построим по матрице периодов  $g$ -мерную тэта-функцию с характеристиками  $\eta, \zeta \in \mathbb{R}^g$  [12, 19]:

$$\Theta[\eta^t; \zeta^t](\mathbf{p}|B) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g} \exp\{\pi i(\mathbf{m} + \boldsymbol{\eta})^t B(\mathbf{m} + \boldsymbol{\eta}) + 2\pi i(\mathbf{m} + \boldsymbol{\eta})^t(\mathbf{p} + \boldsymbol{\zeta})\}, \quad (7)$$

$$\Theta[\mathbf{0}^t; \mathbf{0}^t](\mathbf{p}|B) \equiv \Theta(\mathbf{p}|B),$$

где  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^g$ , суммирование проходит по целочисленной  $g$ -мерной решетке.

Определим также на  $\Gamma$  нормированные абелевы интегралы второго рода  $\Omega_j(\mathcal{P})$ ,  $\mathcal{P} \in \Gamma$ , имеющие единственный полюс в выделенной точке  $\mathcal{Q}$ :

$$\Omega_j(\mathcal{P}) = \xi^{-j} - \frac{j}{j+1} c_j \xi + O(\xi^2), \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}, \quad (8)$$

$$\oint_{a_k} d\Omega_j = 0, \quad k = 1, \dots, g, \quad (9)$$

где  $\xi$  — локальный параметр в окрестности  $\mathcal{Q}$ . Из билинейных соотношений Римана следует, что  $b$ -периоды интегралов  $\Omega_j(P)$  связаны с интегралами  $\mathcal{U}_m(P)$  соотношениями

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{b_m} d\Omega_j = \frac{-1}{(j-1)!} \frac{d^j}{d\xi^j} \mathcal{U}_m \Big|_{\xi=0}, \quad m = 1, \dots, g. \quad (10)$$

Отметим, что в работе [12] используется иная нормировка голоморфных дифференциалов и соответственным образом модифицированные формулы (7), (10).

Пусть функция  $\Psi(\mathcal{P}, x, \tau, t)$  удовлетворяет следующим условиям (аксиомам Бейкера–Ахиезера):

1.  $\Psi(P, x, \tau, t)$  есть однозначная функция от точки  $\mathcal{P}$  кривой  $\Gamma$ , мероморфная на  $\Gamma$ , за исключением точки  $\mathcal{Q}$ , и имеющая  $g$  простых полюсов в точках  $\mathcal{P}_j$ , которые образуют дивизор общего положения;
2.  $\Psi(\mathcal{P}, 0, 0, 0) = 1$ ;
3. в точке  $P_\infty$  функция  $\Psi(P, x, \tau, t)$  имеет существенную особенность вида

$$\Psi(\mathcal{P}, x, \tau, t) = \exp\{x\xi^{-1} + \tau\xi^{-2} + t\xi^{-3}\} \times \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(x, \tau, t)\xi^m\right), \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}.$$

Тогда она этими условиями определяется однозначно и может быть построена по формуле

$$\Psi(\mathcal{P}, x, \tau, t) = \exp\{x\Omega_1(\mathcal{P}) + \tau\Omega_2(\mathcal{P}) + t\Omega_3(\mathcal{P})\} \times$$

$$\times \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{U}(\mathcal{Q}) + \mathbf{U}x + \mathbf{V}\tau + \mathbf{W}t + \mathbf{Z})\Theta(\mathbf{Z})}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{U}(\mathcal{Q}) + \mathbf{Z})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}\tau + \mathbf{W}t + \mathbf{Z})},$$

где

$$\mathbf{Z} = \mathcal{U}(\mathcal{Q}) - \mathcal{K} - \sum_{j=1}^g \mathcal{U}(\mathcal{P}_j),$$

$2\pi i\mathbf{U}$ ,  $2\pi i\mathbf{V}$ ,  $2\pi i\mathbf{W}$  — векторы  $b$ -периодов интегралов  $\Omega_{1,2,3}(\mathcal{P})$  соответственно,  $\mathcal{K}$  — вектор римановых констант [12, 20, 21].



**Теорема 1** ([11]). *Функция  $\Psi(\mathcal{P}, x, \tau, t)$  является решением системы линейных дифференциальных уравнений*

$$\partial_\tau \psi = \partial_x^2 \psi + u\psi, \tag{11a}$$

$$\partial_t \psi = \partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x \psi + \left(\frac{3}{4}u_x + w\right)\psi, \tag{11b}$$

где

$$u(x, \tau, t) = 2\partial_x^2 \ln \Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}\tau + \mathbf{W}t + \mathbf{Z}|B) + c_1, \tag{12a}$$

$$w(x, \tau, t) = \frac{3}{2}\partial_x \partial_\tau \ln \Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}\tau + \mathbf{W}t + \mathbf{Z}|B) + c_2. \tag{12b}$$

**Следствие 4** ([11]). *Условием совместности уравнений системы (11) является уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП):*

$$\begin{cases} u_\tau = \frac{4}{3}w_x, \\ u_t = w_\tau + \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x. \end{cases}$$

**Теорема 2** ([11]). *Если на кривой  $\Gamma$  существует мероморфная функция  $E(\mathcal{P})$  с единственным полюсом второго порядка в  $\mathcal{Q}$ , тогда, выбрав локальный параметр окрестности этой точки в виде  $\xi = [E(\mathcal{P})]^{-1/2}$ , получим независимость решения (12) от  $\tau$  ( $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ ). Таким образом, решение уравнения КП*

$$u_{kdv}(x, t) = 2\partial_x^2 \ln \Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{W}t + \mathbf{Z}|B) + c_1$$

будет решением уравнения Кортевега–де Фриза (1).

**Теорема 3** ([11]). *Если же на кривой  $\Gamma$  существует мероморфная функция  $\mu(\mathcal{P})$  с единственным полюсом третьего порядка в  $\mathcal{Q}$ , тогда, выбрав локальный параметр окрестности этой точки в виде  $\xi = [\mu(\mathcal{P})]^{-1/3}$ , получим независимость решения (12) от  $t$  ( $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ ). Таким образом, решение уравнения КП*

$$u_{bsq}(x, \tau) = 2\partial_x^2 \ln \Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}\tau + \mathbf{Z}|B) + c_1$$

будет решением уравнения Буссинеска (2).

## 2. Алгебраическая кривая рода $g = 2$ , 3-листно накрывающая эллиптические

Рассмотрим алгебраическую кривую (3). Для удобства введем обозначения

$$e_1 = a, \quad e_3 = -b, \quad a, b > 0, \tag{13a}$$

$$g_2 = 4(a^2 + b^2 - ab), \quad g_3 = 4ab(a - b). \tag{13b}$$

Для определенности, мы будем считать, что  $b > a$ .



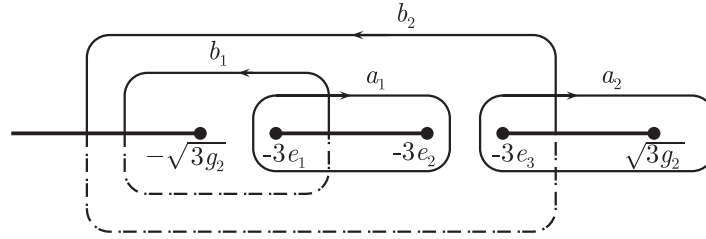


Рис. 1. Алгебраическая кривая  $\Gamma^2$ .

В этих обозначениях кривая  $\Gamma^3$  имеет вид

$$\Gamma^3: \chi^2 = (\lambda + 3a)(\lambda - 3b)(\lambda + 3b - 3a)(\lambda^2 - 12(a^2 + b^2 - ab)). \tag{14}$$

Выберем на  $\Gamma^3$  канонический базис циклов, как изображено на рисунке 1.

Хорошо известно [13, 15, 16, 20, 21], что есть два отображения этой кривой на эллиптические —  $\sigma_1: \Gamma^3 \rightarrow \Gamma_0^1$  и  $\sigma_2: \Gamma^3 \rightarrow \Gamma_0^2$ , где

$$\Gamma_0^1: (\wp'(\alpha))^2 = 4 \prod_{j=1}^3 (\wp(\alpha) - e_j) = 4\wp^3(\alpha) - g_2\wp(\alpha) - g_3, \tag{15}$$

$$\Gamma_0^2: (\tilde{\wp}'(\beta))^2 = 4 \prod_{j=1}^3 (\tilde{\wp}(\beta) - \tilde{e}_j) = 4\tilde{\wp}^3(\beta) - \tilde{g}_2\tilde{\wp}(\beta) - \tilde{g}_3, \tag{16}$$

$$\tilde{e}_2 = -\frac{9}{2}g_3, \quad \tilde{e}_{1,3} = \frac{9}{4}g_3 \pm \frac{3}{4}g_2\sqrt{3g_2}.$$

Отображения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  задаются следующими формулами:

$$\wp(\alpha) = \frac{\lambda^3 + 27g_3}{9(\lambda^2 - 3g_2)}, \quad \wp'(\alpha) = \frac{2(\lambda - 6a)(\lambda + 6b)(\lambda + 6a - 6b)\chi}{27(\lambda^2 - 3g_2)^2}, \tag{17}$$

$$\tilde{\wp}(\beta) = \lambda^3 - \frac{9}{4}g_2\lambda + \frac{9}{4}g_3, \quad \tilde{\wp}'(\beta) = 2\left(\lambda^2 - \frac{3}{4}g_2\right)\chi. \tag{18}$$

Отображения кривых (17), (18) порождают следующие отображения базисов циклов, изображенных на рисунках 2 и 3:

1.  $\hat{\sigma}_1 a_1 = a^1, \hat{\sigma}_1 a_2 = a^1, \hat{\sigma}_1 b_1 = b^1, \hat{\sigma}_1 b_2 = 2b^1;$
2.  $\hat{\sigma}_2 a_1 = -2a^2, \hat{\sigma}_2 a_2 = a^2, \hat{\sigma}_2 b_1 = -b^2, \hat{\sigma}_2 b_2 = b^2.$

Запишем эти соотношения в матричном виде

$$\hat{\sigma} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}.$$



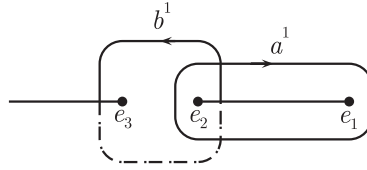


Рис. 2. Алгебраическая кривая  $\Gamma_0^1$ .

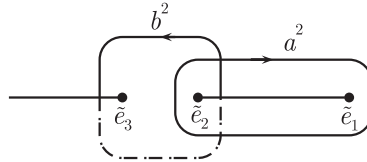


Рис. 3. Алгебраическая кривая  $\Gamma_0^2$ .

Следуя работе [22], введем в рассмотрение матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что выполняются все нужные для редукции соотношения на эти матрицы:

$$S^t Q = Q^t S, \quad R^t P = P^t R, \quad S^t R - Q^t P = nI, \tag{19}$$

где  $I$  — единичная матрица, а  $n = 3$  — число листов накрытий.

Отображения (17), (18) также порождают следующие отображения голоморфных абелевых дифференциалов [13, 15, 16, 20, 21]:

$$\sigma^* d\alpha = \frac{3\lambda}{2\chi} d\lambda, \quad \sigma^* d\beta = \frac{3}{2\chi} d\lambda.$$

Из выбора базисов циклов на  $\Gamma_0^1$  и  $\Gamma_0^2$  следует, что выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \oint_{a^1} d\alpha &= -2\omega', & \oint_{b^1} d\alpha &= 2\omega, \\ \oint_{a^2} d\beta &= -2\tilde{\omega}', & \oint_{b^2} d\beta &= 2\tilde{\omega}. \end{aligned}$$

Соответственно, нормированные эллиптические голоморфные дифференциалы имеют вид

$$d\mathcal{U}_0 = -\frac{1}{2\omega'} d\alpha, \quad d\tilde{\mathcal{U}}_0 = -\frac{1}{2\tilde{\omega}'} d\beta.$$

При этом  $b$ -периоды этих дифференциалов имеют вид

$$B_0 = \oint_{b^1} d\mathcal{U}_0 = -\frac{\omega}{\omega'}, \quad \tilde{B}_0 = \oint_{b^2} d\tilde{\mathcal{U}}_0 = -\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}'}$$

Рассмотрим на  $\Gamma^3$  нормированные голоморфные абелевы дифференциалы

$$d\mathcal{U}_1 = f_{11} \frac{\lambda d\lambda}{\chi} + f_{12} \frac{d\lambda}{\chi}, \quad d\mathcal{U}_2 = f_{21} \frac{\lambda d\lambda}{\chi} + f_{22} \frac{d\lambda}{\chi}. \tag{20}$$



Вычисляя  $a$ -периоды этих дифференциалов с помощью отображений циклов и эллиптических дифференциалов, получаем матрицу  $F$

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4\omega'} & \frac{1}{4\tilde{\omega}'} \\ -\frac{1}{2\omega'} & -\frac{1}{4\tilde{\omega}'} \end{pmatrix}.$$

Проинтегрировав дифференциалы  $dU_j$  (20) по  $b$ -циклам кривой  $\Gamma^3$ , находим матрицу  $B$ :

$$B = \begin{pmatrix} (B_0 + \tilde{B}_0)/3 & (2B_0 - \tilde{B}_0)/3 \\ (2B_0 - \tilde{B}_0)/3 & (4B_0 + \tilde{B}_0)/3 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 4** ([22]). Пусть выполняются условия (19), и пусть  $P = Q = 0$ . Тогда

$$\Theta(\mathbf{p}|B) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^g(S)} \Theta[\boldsymbol{\eta}^t(\mathbf{k}); \mathbf{0}](S^t \mathbf{p} | S^t B S), \quad (21)$$

где  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{k}) = S^{-1}\mathbf{k}$ , суммирование  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^g(S)$  означает конечную сумму по  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^g: 0 \leq (S^{-1}\mathbf{k})_j < 1$ , число слагаемых в сумме равно  $|\det S|$ .

Нетрудно видеть, что матрица, стоящая в правой части равенства (21), является диагональной

$$S^t B S = \begin{pmatrix} 3B_0 & 0 \\ 0 & 3\tilde{B}_0 \end{pmatrix},$$

и поэтому двумерная тэта-функция  $\Theta(\mathbf{p}|B)$  может быть представлена в виде суммы трех слагаемых, каждое из которых является произведением двух одномерных тэта-функций с аргументами  $(S^t \mathbf{p})_1$  и  $(S^t \mathbf{p})_2$ .

### 3. Периодическое решение уравнения Буссинеска

Рассмотрим произвольную точку  $\mathcal{P}_0 = (\chi_0, \lambda_0)$  кривой  $\Gamma^3$ , не являющуюся точкой ветвления. Отметим, что на  $\Gamma^3$  существует также точка  $\mathcal{P}'_0 = (-\chi_0, \lambda_0)$ . Разложим в окрестности точки  $\mathcal{P}_0$  функцию  $\chi$  по степеням  $(\lambda - \lambda_0)$ :

$$\chi = \chi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j (\lambda - \lambda_0)^j, \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_0. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (14) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $(\lambda - \lambda_0)$ , нетрудно выразить коэффициенты  $\chi_j$  через  $a$ ,  $b$  и  $\lambda_0$ .

Из уравнения (14) кривой  $\Gamma^3$  вытекает, что в окрестности точки  $\mathcal{P}'_0$  функция  $\chi$  имеет симметричное разложение

$$\chi = -\chi_0 - \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j (\lambda - \lambda_0)^j, \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'_0. \quad (23)$$





Из (23) следует, что

$$\chi + \chi_0 + \chi_1(\lambda - \lambda_0) + \chi_2(\lambda - \lambda_0)^2 + \chi_3(\lambda - \lambda_0)^3 = o(\lambda - \lambda_0)^3, \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'_0.$$

Поэтому функция

$$\mu(\mathcal{P}) = \frac{\chi + \chi_0 + \chi_1(\lambda - \lambda_0) + \chi_2(\lambda - \lambda_0)^2 + \chi_3(\lambda - \lambda_0)^3}{2\chi_0(\lambda - \lambda_0)^3} \quad (24)$$

не имеет полюса в точке  $\mathcal{P}'_0$ . Также эта функция не имеет полюса в бесконечно удаленной точке  $\mathcal{P}_\infty = (\infty, \infty)$ , поскольку в ее окрестности

$$\mu(\mathcal{P}) = \frac{\chi_3}{2\chi_0} + O(\lambda^{-1/2}), \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty.$$

Следовательно, функция  $\mu(\mathcal{P})$  имеет единственный полюс в точке  $\mathcal{P}_0$  вида

$$\mu(\mathcal{P}) = \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^3} + \frac{\chi_1}{\chi_0(\lambda - \lambda_0)^2} + \frac{\chi_2}{\chi_0(\lambda - \lambda_0)} + \frac{\chi_3}{\chi_0} + O(\lambda - \lambda_0). \quad (25)$$

Поскольку для построения решения уравнения Буссинеска функция  $\mu(\mathcal{P})$  должна иметь асимптотику [11, 14]

$$\mu(\mathcal{P}) = \frac{1}{\xi^3} + O(1), \quad (26)$$

где  $\xi$  — локальный параметр, то  $\xi \neq \lambda - \lambda_0$ . Рассматривая совместно асимптотики (25), (26) и (22), получаем следующие разложения  $\lambda$  и  $\chi$  по локальному параметру  $\xi$ :

$$\lambda = \lambda_0 + \xi + \frac{\chi_1}{3\chi_0}\xi^2 + \frac{\chi_2}{3\chi_0}\xi^3 + O(\xi^4), \quad (27)$$

$$\chi = \chi_0 + \chi_1\xi + \frac{\chi_1^2 + 3\chi_2\chi_0}{3\chi_0}\xi^2 + O(\xi^3). \quad (28)$$

Из (10), (20) и асимптотик (27), (28) вытекает, что волновой вектор и вектор частот равны, соответственно:

$$\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\omega'} \\ \frac{1}{2\omega'} \end{pmatrix} \frac{\lambda_0}{\chi_0} + \begin{pmatrix} \frac{-1}{4\tilde{\omega}'} \\ \frac{1}{4\tilde{\omega}'} \end{pmatrix} \frac{1}{\chi_0},$$

$$\mathbf{V}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\omega'} \\ \frac{1}{2\omega'} \end{pmatrix} \frac{3\chi_0 - \lambda_0\chi_1}{\chi_0^2} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4\tilde{\omega}'} \\ \frac{-1}{4\tilde{\omega}'} \end{pmatrix} \frac{\chi_1}{3\chi_0^2}.$$

Естественно, при таком выборе локального параметра также выполняется равенство  $\mathbf{W}_0 = \mathbf{0}$ . Индекс 0 указывает на то, что в роли выделенной точки  $\mathcal{Q}$  взята точка  $\mathcal{P}_0$ . Из выражений для  $S^t\mathbf{U}_0$  и  $S^t\mathbf{V}_0$ ,

$$S^t\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} \frac{3\lambda_0}{4\chi_0\omega'} \\ \frac{3}{4\chi_0\tilde{\omega}'} \end{pmatrix}, \quad S^t\mathbf{V}_0 = \begin{pmatrix} \frac{3(3\chi_0 - \lambda_0\chi_1)}{4\chi_0^2\omega'} \\ -\frac{\chi_1}{4\chi_0^2\tilde{\omega}'} \end{pmatrix},$$

следует, что для построения периодического по координате решения уравнения Буссинеска нужно положить  $\lambda_0 = 0$ . При этом

$$\chi_0 = 18\sqrt{ab(b-a)(a^2+b^2-ab)}, \quad \chi_1 = \frac{54(a^2+b^2-ab)^2}{\chi_0} \quad (29)$$

и

$$S^t \mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{4\tilde{\omega}'\chi_0}{4\tilde{\omega}'\chi_0} \end{pmatrix}, \quad S^t \mathbf{V}_0 = \begin{pmatrix} \frac{9}{4\omega'\chi_0} \\ \frac{\chi_1}{4\tilde{\omega}'\chi_0^2} \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $\chi_1 \neq 0$ , то периодическое по координате решение уравнения Буссинеска не будет периодическим по времени.

Применив формулу (21) с

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{k}) \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\}$$

и воспользовавшись соотношением

$$\Theta[\eta; 0](p|\mathbf{b}) = \sqrt{i\mathbf{b}^{-1}} \exp(-\pi i \mathbf{b}^{-1} p^2) \vartheta_3(-p\mathbf{b}^{-1} - \eta | -\mathbf{b}^{-1}), \quad (30)$$

являющимся следствием равенств

$$\begin{aligned} \Theta[\eta; 0](p|\mathbf{b}) &= \exp(\pi i \mathbf{b} \eta^2 + 2\pi i p \eta) \vartheta_3(p + \mathbf{b} \eta | \mathbf{b}), \\ \vartheta_3(p|\mathbf{b}) &= \sqrt{i\mathbf{b}^{-1}} \exp(-\pi i \mathbf{b}^{-1} p^2) \vartheta_3(-p\mathbf{b}^{-1} | -\mathbf{b}^{-1}), \end{aligned}$$

получаем следующее утверждение для решения уравнения Буссинеска.

**Теорема 1.** *Периодическое решение уравнения Буссинеска (2), построенное по кривой (14), имеет вид*

$$\begin{aligned} u_{bsq}(x, \tau) &= 2\partial_x^2 \ln \left[ \vartheta_3 \left( z_1 + \frac{\tau}{T_1} \middle| \mathbf{b} \right) \vartheta_3 \left( z_2 + \frac{x}{X_1} - \frac{\tau}{T_2} \middle| \tilde{\mathbf{b}} \right) + \right. \\ &\quad + \vartheta_3 \left( z_1 + \frac{\tau}{T_1} - \frac{2}{3} \middle| \mathbf{b} \right) \vartheta_3 \left( z_2 + \frac{x}{X_1} - \frac{\tau}{T_2} - \frac{1}{3} \middle| \tilde{\mathbf{b}} \right) + \\ &\quad \left. + \vartheta_3 \left( z_1 + \frac{\tau}{T_1} - \frac{1}{3} \middle| \mathbf{b} \right) \vartheta_3 \left( z_2 + \frac{x}{X_1} - \frac{\tau}{T_2} - \frac{2}{3} \middle| \tilde{\mathbf{b}} \right) \right] + \frac{3\pi i}{4\tilde{\omega}\tilde{\omega}'\chi_0^2} + c_{1,0}. \quad (31) \end{aligned}$$

Здесь  $z_1, z_2$  — фазы решения,

$$X_1 = 4\tilde{\omega}\chi_0, \quad T_1 = \frac{4}{3}\omega\chi_0, \quad T_2 = 12\tilde{\omega}\frac{\chi_0^2}{\chi_1}, \quad \mathbf{b} = \frac{\omega'}{3\omega}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \frac{\tilde{\omega}'}{3\tilde{\omega}}.$$

При соизмеримости периодов  $T_1$  и  $T_2$  решение (31) будет периодическим не только по координате  $x$ , но и по времени  $\tau$ .

Чтобы вычислить постоянную  $c_{1,0}$ , рассмотрим абелев дифференциал второго рода

$$d\Omega_{1,0} = -\frac{1}{2\chi_0} \left( \tilde{\varphi}(\beta) + \frac{\tilde{\eta}'}{\tilde{\omega}'} \right) d\beta + d \left( \frac{\chi + \chi_0}{2\chi_0\lambda} \right) \quad (32)$$



с единственным полюсом первого порядка в точке  $\mathcal{P}_0 = (\chi_0, 0)$ . Непосредственные вычисления  $b$ -периодов этого дифференциала приводят к тому же волновому вектору, что и дифференцирование голоморфных дифференциалов. Здесь  $\tilde{\eta}'$  — период соответствующей  $\zeta$ -функции Вейерштрасса [17]. Вычисляя асимптотику этого дифференциала в окрестности полюса, получаем, что

$$c_{1,0} = \frac{3\tilde{\eta}'}{2\tilde{\omega}'\chi_0^2} - \frac{243ab(b-a) + 6\chi_0\chi_2 + 4\chi_1^2}{18\chi_0^2}$$

и

$$\frac{3\pi i}{4\tilde{\omega}'\chi_0^2} + c_{1,0} = \frac{\tilde{\eta}}{216ab(b-a)(a^2 + b^2 - ab)\tilde{\omega}} - \frac{1}{36(a^2 + b^2 - ab)} - \frac{(a^2 + b^2 - ab)^2}{648a^2b^2(b-a)^2}.$$

В последнем переходе мы подставили  $\chi_1$  и  $\chi_0$ , а также учли, что

$$\chi_2 = -\frac{27ab(b-a) + \chi_1^2}{2\chi_0}$$

и что (см. [17])

$$\tilde{\eta}\tilde{\omega}' - \tilde{\eta}'\tilde{\omega} = \frac{\pi i}{2}.$$

#### 4. Периодическое решение уравнения Кортвега–де Фриза

Возьмем теперь в качестве выделенной точки  $\mathcal{Q}$  бесконечно удаленную точку  $\mathcal{P}_\infty = (\infty, \infty)$ . Поскольку эта точка является точкой ветвления гиперэллиптической кривой  $\Gamma^3$ , то локальный параметр  $\varepsilon$  в окрестности этой точки можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty. \tag{33}$$

Из уравнения поверхности (14) следует, что функция  $\chi$  в окрестности точки  $\mathcal{P}_\infty$  имеет асимптотику вида

$$\chi = \frac{1}{\varepsilon^5} + \sum_{j=0}^{\infty} h_j \varepsilon^{2j-3}, \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty. \tag{34}$$

Нетрудно видеть, что при данном выборе локального параметра  $\varepsilon$  выполняется равенство  $E(\mathcal{P}) = \lambda$ .

Дифференцируя дифференциалы  $d\mathcal{U}_j$  по локальному параметру  $\varepsilon$ , получаем  $b$ -периоды нормированных абелевых интегралов второго рода с единственным полюсом в точке  $\mathcal{P}_\infty$ :

$$\mathbf{U}_\infty = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\omega'} \\ \frac{1}{\omega'} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_\infty = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}_\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\tilde{\omega}'} \\ -\frac{1}{2\tilde{\omega}'} \end{pmatrix},$$

причем

$$S^t \mathbf{U}_\infty = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2\omega'} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S^t \mathbf{W}_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -\frac{3}{2\tilde{\omega}'} \end{pmatrix}. \tag{35}$$



Из равенств (35) вытекает хорошо известный факт (см. [13, 15, 16]), что решение конечно-зонного уравнения КдФ, построенное по поверхности  $\Gamma^3$  и выделенной точке  $\mathcal{P}_\infty$ , является периодическим по координате и по времени.

Проводя редукцию тэта-функции и переходя к эллиптическим тэта-функциям, получаем следующее утверждение для 3-эллиптического решения уравнения Кортевега–де Фриза.

**Теорема 2.** *Периодическое решение уравнения Кортевега–де Фриза (1), построенное по кривой (14), имеет вид*

$$u_{kdv}(x, t) = 2\partial_x^2 \ln \left[ \vartheta_3 \left( z_1 + \frac{x}{X_2} \middle| \mathbf{b} \right) \vartheta_3 \left( z_2 + \frac{t}{T_3} \middle| \tilde{\mathbf{b}} \right) + \right. \\ \left. + \vartheta_3 \left( z_1 + \frac{x}{X_2} - \frac{2}{3} \middle| \mathbf{b} \right) \vartheta_3 \left( z_2 + \frac{t}{T_3} - \frac{1}{3} \middle| \tilde{\mathbf{b}} \right) + \right. \\ \left. + \vartheta_3 \left( z_1 + \frac{x}{X_2} - \frac{1}{3} \middle| \mathbf{b} \right) \vartheta_3 \left( z_2 + \frac{t}{T_3} - \frac{2}{3} \middle| \tilde{\mathbf{b}} \right) \right] + \frac{3\pi i}{\omega\omega'} + c_{1,\infty}, \quad (36)$$

где  $X_2 = 2\omega$ ,  $T_3 = 2\tilde{\omega}$ ,  $\mathbf{b} = \frac{\omega'}{3\omega}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}} = \frac{\tilde{\omega}'}{3\tilde{\omega}}$ .

Для вычисления постоянной  $c_{1,\infty}$  рассмотрим абелев дифференциал второго рода

$$d\Omega_{1,\infty} = \left( \wp(\alpha) + \frac{\eta'}{\omega'} \right) d\alpha + d \left( \frac{2\chi}{3(\lambda^2 - 12(a^2 + b^2 - ab))} \right) \quad (37)$$

с единственным полюсом первого порядка в точке  $\mathcal{P}_\infty$ . Вычисляя асимптотику этого дифференциала в окрестности полюса, получаем, что

$$c_{1,\infty} = \frac{6\eta'}{\omega'} - 2h_0 \quad \text{и} \quad \frac{3\pi i}{\omega\omega'} + c_{1,\infty} = \frac{6\eta}{\omega} - 2h_0,$$

где  $h_0 = 0$  — коэффициент асимптотики (34) функции  $\chi$  в окрестности точки  $\mathcal{P}_\infty$ .

## 5. Главная часть 3-эллиптических решений

Положив  $a = 2$ ,  $b = 3$  и вычисляя периоды решений, получаем, что при данном выборе параметров кривой решение (31) уравнения Буссинеска периодически по координате с периодом  $X_1 \approx 64$  и почти периодически по времени с периодами  $T_1 \approx 157$  и  $T_2 \approx 987$  (рис. 4).

Вместе с тем, решение (36) уравнения КдФ, построенное по той же самой кривой, периодически по координате с периодом  $X_2 \approx 2$  и периодически по времени с периодом  $T_3 \approx 0.3$  (рис. 5).

Может показаться, что решения уравнений Кортевега–де Фриза и Буссинеска можно отличить друг от друга по значениям амплитуд и периодов решений, но заметим, что в выборе функций  $\mu(\mathcal{P})$  и  $E(\mathcal{P})$  есть некоторый произвол. Функции

$$\tilde{\mu}(\mathcal{P}) = \varkappa_1^3 \mu(\mathcal{P}) + \varkappa_2, \quad \text{и} \quad \tilde{E}(\mathcal{P}) = \varkappa_3^2 E(\mathcal{P}) + \varkappa_4,$$

где  $\varkappa_j$  — постоянные, также являются мероморфными функциями с единственными полюсами требуемых порядков. Изменение функций  $\mu(\mathcal{P})$  и  $E(\mathcal{P})$  приводит к изменению локальных параметров  $\xi$  и  $\varepsilon$ :

$$\frac{1}{\tilde{\xi}^3} = \frac{\varkappa_1^3}{\xi^3} + \varkappa_2, \quad \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^2} = \frac{\varkappa_3^2}{\varepsilon^2} + \varkappa_4,$$



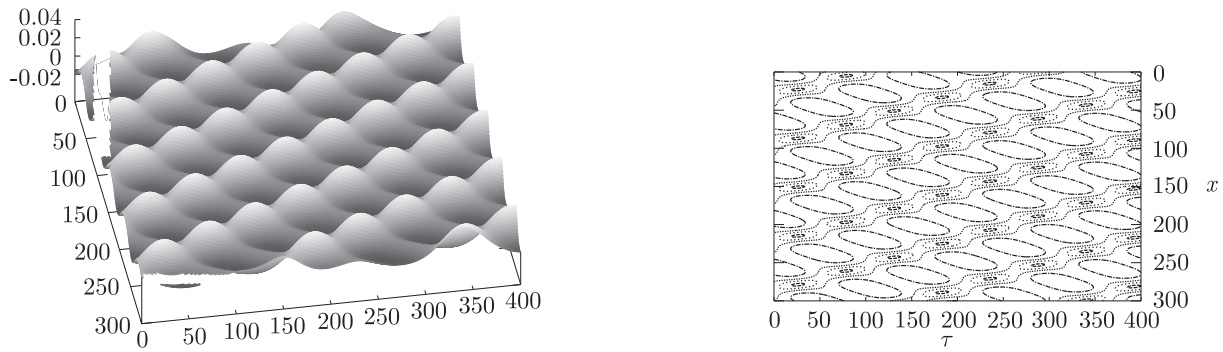


Рис. 4. Решение (31) уравнения Буссинеска для  $a = 2, b = 3, z_1 = z_2 = 0$ .

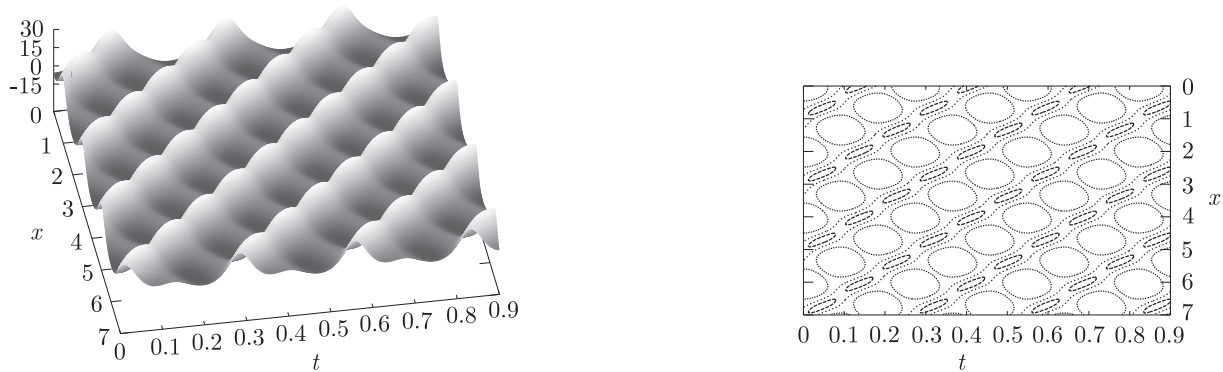


Рис. 5. Решение (36) уравнения КдФ для  $a = 2, b = 3, z_1 = z_2 = 0$ .

или

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi}{\varkappa_1} - \frac{\varkappa_2}{3\varkappa_1^4} \xi^4 + O(\xi^7), \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varkappa_3} - \frac{\varkappa_4}{2\varkappa_3^3} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^5).$$

Как было показано в [14], такая замена локальных параметров приводит к следующему преобразованию решений уравнений Буссинеска и Кортевега–де Фриза:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{bsq}(x, \tau) &= \varkappa_1^2 u_{bsq}(\varkappa_1 x, \varkappa_1^2 \tau), \\ \tilde{u}_{kdv}(x, t) &= \varkappa_3^2 u_{kdv} \left( \varkappa_3 x + \frac{3}{2} \varkappa_3 \varkappa_4 t, \varkappa_3^3 t \right) + \frac{1}{4} \varkappa_4. \end{aligned}$$

Соответственно, при  $\varkappa_1 = X_1/X_2 \approx 30$  решение  $\tilde{u}_{bsq}(x, \tau)$  уравнения Буссинеска будет иметь периоды и амплитуду одного порядка с решением  $u_{kdv}(x, t)$  уравнения Кортевега–де Фриза, т. е. по значениям периодов и амплитуд разделить решения различных уравнений довольно трудно.

При этом очевидно, что двухзонные 3-эллиптические решения уравнений Буссинеска и Кортевега–де Фриза (рис. 4, 5) схожи между собой и внешне сильно отличаются от двухзонного 2-эллиптического решения уравнения Буссинеска, найденного в [18] (рис. 6).

Чтобы объяснить влияние  $n$  на вид решения, рассмотрим выражение

$$th_3(p, q) = \vartheta_3(p|\mathbf{b})\vartheta_3(q|\tilde{\mathbf{b}}) + \vartheta_3(p - 2/3|\mathbf{b})\vartheta_3(q - 1/3|\tilde{\mathbf{b}}) + \vartheta_3(p - 1/3|\mathbf{b})\vartheta_3(q - 2/3|\tilde{\mathbf{b}})$$

и, воспользовавшись формулой

$$\vartheta_3(p|\mathbf{b}) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \exp(\pi i \mathbf{b} m^2 + 2\pi i p m),$$



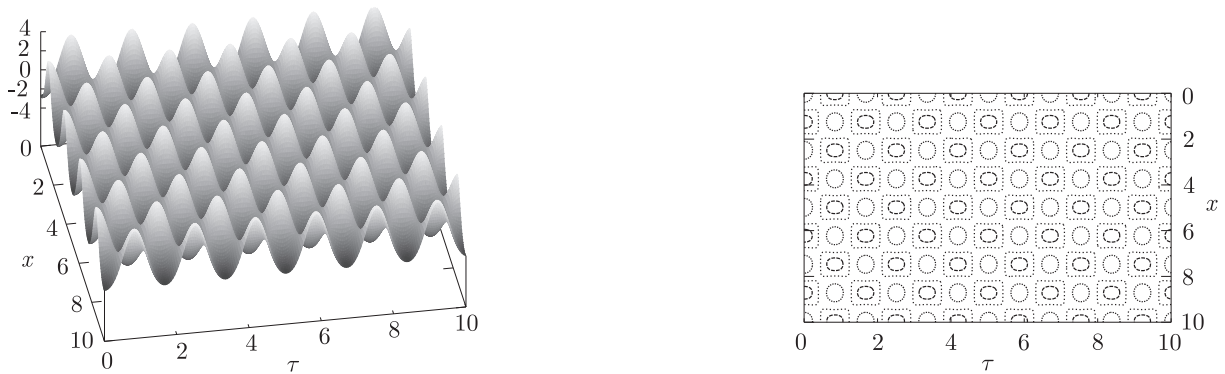


Рис. 6. 2-эллиптическое решение уравнения Буссинеска.

перейдем к суммированию по бесконечной двумерной решетке. Вынося под знаком суммирования общий множитель за скобку, получаем следующее равенство:

$$th_3(p, q) = \sum_{m, n \in \mathbf{Z}} \exp\{\pi i(\mathfrak{b}m^2 + \tilde{\mathfrak{b}}n^2) + 2\pi i(pm + qn)\} \times \\ \times \left(1 + \exp\left\{-\frac{4\pi im}{3} - \frac{2\pi in}{3}\right\} + \exp\left\{-\frac{2\pi im}{3} - \frac{4\pi in}{3}\right\}\right).$$

Переходя во втором множителе к тригонометрическим функциям, преобразуем выражение к виду

$$th_3(p, q) = \sum_{m, n \in \mathbf{Z}} \exp\{\pi i(\mathfrak{b}m^2 + \tilde{\mathfrak{b}}n^2) + 2\pi i(pm + qn)\} \times \left(1 + 2 \cos \pi(m + n) \cos \frac{\pi(m - n)}{3}\right).$$

При упрощении мы учли, что  $\sin \pi(m + n) = 0$ .

Из инвариантности суммы относительно одновременной замены  $m \rightarrow -m$ ,  $n \rightarrow -n$  следует, что

$$th_3(p, q) = \sum_{m, n \in \mathbf{Z}} \exp\{\pi i(\mathfrak{b}m^2 + \tilde{\mathfrak{b}}n^2)\} \cos 2\pi(pm + qn) \times \\ \times \left(1 + 2 \cos \pi(m + n) \cos \frac{\pi(m - n)}{3}\right). \quad (38)$$

Выражение, стоящее в скобках, обладает весьма примечательным свойством. Если  $m \equiv n \pmod{3}$ , то оно равно 3, а в ином случае — нулю.

Из-за сильно убывающих экспоненциальных множителей основную роль в решениях играют слагаемые с  $m = n = 0$  и  $m = n = \pm 1$ :

$$th_3(p, q) = 3 + 6e^{\pi i(\mathfrak{b} + \tilde{\mathfrak{b}})} \cos 2\pi(p + q) + \dots$$

Следовательно, главные части двухзонных 3-эллиптических решений уравнений Буссинеска и Кортевега–де Фриза будут иметь вид

$$u_1 \left( \frac{x}{X_1} + \frac{T_2 - T_1}{T_2 T_1} \tau \right) \quad \text{и} \quad u_2 \left( \frac{x}{X_2} + \frac{t}{T_3} \right),$$

соответственно, причем на форму главных частей влияют все слагаемые двумерного ряда (38).

В отличие от случая 3-эллиптических решений, для 2-эллиптических решений соответствующая функция  $th(p, q)$  имеет вид (см. [18]):

$$th_2(p, q) = \vartheta_3(p|\mathbf{b})\vartheta_3(q|\tilde{\mathbf{b}}) + \vartheta_4(p|\mathbf{b})\vartheta_4(q|\tilde{\mathbf{b}}),$$

где

$$\vartheta_4(p|\mathbf{b}) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \exp(\pi i \mathbf{b} m^2 + 2\pi i p m + \pi i m).$$

Переходя к суммированию по двумерной решетке, имеем равенство

$$th_2(p, q) = \sum_{m, n \in \mathbf{Z}} \exp\{\pi i(\mathbf{b} m^2 + \tilde{\mathbf{b}} n^2) + 2\pi i(pm + qn)\} \times (1 + \exp\{\pi i(m + n)\}),$$

которое можно переписать в виде

$$th_2(p, q) = \sum_{m, n \in \mathbf{Z}} \exp\{\pi i(\mathbf{b} m^2 + \tilde{\mathbf{b}} n^2) + 2\pi i(pm + qn)\} (1 + (-1)^m (-1)^n).$$

Отметим, что в этой сумме гармоники разной четности ( $n - m \equiv 1 \pmod{2}$ ) обращаются в нуль.

Из инвариантности суммы относительно одновременной замены  $m \rightarrow -m$ ,  $n \rightarrow -n$  следует, что

$$th_2(p, q) = \sum_{m, n \in \mathbf{Z}} \exp\{\pi i(\mathbf{b} m^2 + \tilde{\mathbf{b}} n^2)\} \cos 2\pi(pm + qn) (1 + (-1)^m (-1)^n).$$

Заменяя  $n \rightarrow -n$ , имеем еще одну формулу для функции  $th_2(p, q)$ ,

$$th_2(p, q) = \sum_{m, n \in \mathbf{Z}} \exp\{\pi i(\mathbf{b} m^2 + \tilde{\mathbf{b}} n^2)\} \cos 2\pi(pm - qn) (1 + (-1)^m (-1)^n),$$

из которой вытекает, что

$$th_2(p, q) = \sum_{m, n \in \mathbf{Z}} \exp\{\pi i(\mathbf{b} m^2 + \tilde{\mathbf{b}} n^2)\} (\cos 2\pi(pm - qn) + \cos 2\pi(pm + qn)) \times \left( \frac{1 + (-1)^m (-1)^n}{2} \right) \quad (39)$$

или

$$th_2(p, q) = \sum_{m, n \in \mathbf{Z}} \exp\{\pi i(\mathbf{b} m^2 + \tilde{\mathbf{b}} n^2)\} \cos(2\pi pm) \cos(2\pi qn) (1 + (-1)^m (-1)^n). \quad (40)$$

Таким образом, поскольку

$$\begin{aligned} th_2(p, q) &= 2 + 2e^{\pi i(\mathbf{b} + \tilde{\mathbf{b}})} (\cos 2\pi(p - q) + \cos 2\pi(p + q)) + \dots = \\ &= 2 + 4e^{\pi i(\mathbf{b} + \tilde{\mathbf{b}})} \cos(2\pi p) \cos(2\pi q) + \dots, \end{aligned}$$

то 2-эллиптическое решение уравнения Буссинеска представляет собой нелинейную суперпозицию встречных волн или образуемых ими стоячих волн, что мы и видим на рисунке 6.

Известно [13, 15, 16], что не существует двухзонного 2-эллиптического решения уравнения КдФ, периодического по координате. Но, как было показано в работе [23], существуют два двухзонных 2-эллиптических периодических по времени решения уравнения КдФ. Нетрудно понять, что такие решения должны иметь вид

$$u(x, t) = 2\partial_x^2 \ln th_2 \left( \frac{x}{X_1'} + \frac{t}{T'}, \frac{x}{X_2'} \right) + c'_{1,k}$$

или

$$u(x, t) = 2\partial_x^2 \ln th_2 \left( \frac{x}{X_1'}, \frac{x}{X_2'} + \frac{t}{T'} \right) + c'_{1,k}$$

и выглядеть как перемещающиеся с постоянной скоростью «стоячие волны».

## Заключительные замечания

Подводя итоги, заметим, что уже начиная с рода  $g = 3$  должны появиться существенные различия в поведении конечнозонных решений уравнений Кортевега–де Фриза и Буссинеска. Это связано, в первую очередь, с тем, что не существует кривой алгебраического рода  $g > 2$ , по которой одновременно можно построить решения обоих уравнений, поскольку решения уравнения Кортевега–де Фриза строятся по гиперэллиптическим кривым, а для построения решений уравнения Буссинеска (при  $g > 2$ ) используются негиперэллиптические кривые.

## Приложение. Значения параметров решения для $a = 2$ , $b = 3$

Для случая  $a = 2$ ,  $b = 3$  имеем

$$\begin{aligned} \chi_0 &= 18\sqrt{42} \approx 116.7, & \chi_1 &= \frac{7}{2}\sqrt{42} \approx 23, \\ \omega &= \frac{\sqrt{5}}{5}K \left( \frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \approx 1, & \omega' &= \frac{\sqrt{5}}{5}K \left( \frac{\sqrt{5}}{5} \right) i \approx 0.7i, \\ \mathfrak{b} &\approx 0.25i, & \exp(\pi i \mathfrak{b}) &\approx 0.46, \\ \tilde{\omega} &= \frac{21^{1/4}}{42}K \left( \frac{\sqrt{98 + 18\sqrt{21}}}{14} \right) \approx 0.14, \\ \tilde{\omega}' &= \frac{21^{1/4}}{42}K \left( \frac{\sqrt{98 - 18\sqrt{21}}}{14} \right) i \approx 0.08i, \\ \tilde{\mathfrak{b}} &\approx 0.2i, & \exp(\pi i \tilde{\mathfrak{b}}) &\approx 0.54. \end{aligned}$$

Авторы благодарят проф. В. Б. Матвеева за полезные обсуждения.

## Список литературы

- [1] Gardner C., Green I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteweg–de Vries equation // Phys. Rev. Lett., 1967, vol. 19, no. 19, pp. 1095–1098.





- [2] Lax P. D. Integrals of non-linear equations of evolution and solitary waves // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1968, vol. 21, pp. 467–490.
- [3] Gardner C. Korteweg–de Vries equation and generalization: IV. The Korteweg–de Vries equation as a Hamiltonian system // *J. Math. Phys.*, 1971, vol. 12, pp. 1548–1551.
- [4] Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. Уравнение Кортевега–де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система // *Функц. анализ и его прил.*, 1971, т. 5, вып. 4, с. 18–27.
- [5] Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // *ЖЭТФ*, 1971, т. 61, вып. 1, с. 118–134.
- [6] Новиков С. П. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза // *Функц. анализ и его прил.*, 1974, т. 8, вып. 3, с. 54–66.
- [7] Lax P. D. Periodic solutions of the KdV equations // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1975, vol. 28, no. 1, pp. 141–188.
- [8] Дубровин Б. А., Новиков С. П. Периодическая задача для уравнений Кортевега–де Фриза и Штурма–Лиувилля: их связь с алгебраической геометрией // *Докл. АН СССР*, 1974, т. 219, вып. 3, с. 19–22.
- [9] Итс А. Р., Матвеев В. Б. Операторы Шрёдингера с конечнозонным спектром и  $N$ -солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза // *ТМФ*, 1975, т. 23, вып. 1, с. 51–67.
- [10] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // *УМН*, 1976, т. 31, вып. 1, с. 55–136.
- [11] Кричевер И. М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // *УМН*, 1977, т. 32, вып. 6, с. 183–208.
- [12] Дубровин Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения // *УМН*, 1981, т. 36, вып. 2, с. 11–80.
- [13] Belokolos E. D., Bobenko A. I., Enol'skii V. Z., Its A. R., Matveev V. B. *Algebro-geometrical approach to nonlinear evolution equations.* (Springer Ser. Nonlinear Dynamics.) Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1994. 320 pp.
- [14] Смирнов А. О. Двухзонные эллиптические решения уравнения Буссинеска // *Матем. сб.*, 1999, т. 190, вып. 5, с. 139–157.
- [15] Белоколотос Е. Д., Бобенко А. И., Матвеев В. Б., Энольский В. З. Алгебро-геометрические принципы суперпозиции конечнозонных решений интегрируемых нелинейных уравнений // *УМН*, 1986, т. 41, вып. 2, с. 3–42.
- [16] Smirnov, A. O. Finite-gap elliptic solutions of the KdV equation // *Acta Appl. Math.*, 1994, vol. 36, nos. 1–2, pp. 125–166.
- [17] Ахиезер Н. И. *Элементы теории эллиптических функций.* М.: Гостехиздат, 1948. 291 с.
- [18] Amosenok E. G., Smirnov A. O. Two-gap 2-elliptic solution of Boussinesq equation // *Lett. Math. Phys.*, 2011, vol. 96, nos. 1–3, pp. 157–168.
- [19] Fay J. *Theta functions on Riemann surfaces.* (Lect. Notes in Math., vol. 352.) Berlin–New York: Springer, 1973. 137 pp.
- [20] Baker H. F. *Abel's theorem and the allied theory including the theory of the theta functions.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1897. 684 pp.
- [21] Krazer A. *Lehrbuch der Thetafunktionen.* Leipzig: Teubner, 1903. 509 pp.
- [22] Смирнов А. О. Конечнозонные решения абелевой цепочки Тоды рода 4 и 5 в эллиптических функциях // *ТМФ*, 1989, т. 78, вып. 1, с. 11–21.
- [23] Смирнов А. О. Двухзонные эллиптические решения интегрируемых нелинейных уравнений // *Матем. заметки*, 1995, т. 58, вып. 1, с. 86–97.

## Two-gap 3-elliptic solutions of the Boussinesq and the Korteweg-de Vries equations



Alexander O. Smirnov<sup>1</sup>, Grigory M. Golovachev<sup>2</sup>, Evgeniy G. Amosenok<sup>3</sup>

Saint Petersburg State University of Airspace Instrumentation (SUAI)

Bolshaya Morskaya st., 67, Saint Petersburg, 190000, Russia

<sup>1</sup>alsmir@guap.ru, <sup>2</sup>ggolovachev@yandex.ru, <sup>3</sup>amosenok@bk.ru

The behavior of the two-gap elliptic solutions of the Boussinesq and the KdV equations was examined. These solutions were constructed by the  $n$ -sheet covering over a torus ( $n \leq 3$ ). It was shown that the shape of the two-gap elliptic solutions depends on  $n$  and doesn't depend on the kind of the nonlinear wave equation.

MSC 2010: 35Q53

Keywords: soliton, Boussinesq equation, KdV equation, theta-function, reduction, covering

Received April 28, 2011, accepted June 23, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 2, pp. 239–256 (Russian)

