



УДК: 551.465.7

MSC 2010: 37D45, 76F10, 76F25, 76U05

Интегрируемое и неинтегрируемое движение вихревой пары в несимметричном деформационном потоке

Е. А. Рыжов

Исследуется интегрируемое и неинтегрируемое движение вихревой пары, состоящей из вихрей произвольных интенсивностей, в постоянном и периодическом внешнем деформационном потоке. В общем случае внешний деформационный поток воздействует на вихревую пару несимметрично, что приводит к несохранению инвариантов движения: линейного момента и углового момента. В работе получено выражение для линейного момента, позволяющее редуцировать начальную систему с 2.5 степенями свободы к системе с 1.5 степенями свободы. Для случая постоянного деформационного потока показана интегрируемость движения пары при любых начальных положениях и значениях интенсивностей вихрей, а также для произвольных значений сдвига и вращения внешнего потока.

Ключевые слова: вихревая пара, деформационный поток, интегралы движения

1. Введение

Вихревые структуры играют значимую роль в переносе жидкости и растворенной в ней примеси (тепло, соленость и т. д.) в атмосфере и океане [1]. Также вихревые структуры могут рассматриваться как составные части турбулентных потоков [2]. В рамках геофизической гидродинамики под влиянием кориолисовой силы или в магнитной гидродинамике под влиянием лоренцовой силы такие движения можно рассматривать в качестве анизотропных квазидвумерных потоков. Наряду с широко распространенными монополярными вихрями часто возникают и многовихревые структуры [3–7]. Например, лабораторные эксперименты показывают, что кольцевые вихри при небольшом возмущении могут распадаться на многовихревые структуры [8, 9].

Получено 23 мая 2011 года

После доработки 14 июня 2011 года

Рыжов Евгений Андреевич

ryzhovea@poi.dvo.ru

Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева Дальневосточного отделения РАН
690041, Россия, г. Владивосток, ул. Балтийская, д. 43



Подобные многовихревые структуры продолжительное время сохраняют свои свойства (форма границы, значение относительной завихренности и т. п.) во внешних деформационных потоках, при этом осуществляется перенос жидкости, находящейся в пределах их вихревых атмосфер [10], на большие расстояния [1, 2, 11]. В связи с этим большое количество работ (см., например, обзоры [12–14]) посвящено исследованию движений подобных многовихревых структур, их устойчивости и взаимодействию с однородными внешними потоками. В то же время взаимодействие мультиполей с неоднородными потоками представляет значительный интерес, однако работ, рассматривающих подобные взаимодействия, насчитывается гораздо меньше. Для пары вихрей, которая является простейшим примером мультиполя, можно привести следующие: в [15, 16] рассматривается самораспространяющаяся пара (диполь) в переменном сдвиговом потоке, в работе [17] исследуется движение диполя в радиальном потоке от источника (или стока), в работе [11] получены некоторые аналитические решения в квадратурах для радиально-симметричного внешнего потока, в работах [18, 19] анализируется движение вихревой пары и тройки в двухслойной жидкости, соответственно, в нестационарном деформационном потоке. Дополнительно хороший обзор литературы можно найти в книгах [20, 21]. В целом задачи интегрируемости движения мультиполей в отсутствие внешнего потока и неинтегрируемости в присутствии плоского нестационарного внешнего потока рассмотрены в работе [22] из сборника [23], который также представляет значительный интерес с точки зрения теории гидродинамических вихрей. Интегрируемому движению мультиполей также посвящена серия работ [24–26].

Отметим и то, что в работе [11] обсуждена роль β -эффекта и сделано заключение, что для оценки меридионального переноса интенсивными вихрями достаточно рассмотреть приближение f -плоскости. Мы также ограничимся рамками этого приближения. Хороший обзор задач, в которых влиянием β -эффекта пренебрегать не следует, дан в работе [27].

Цель настоящего исследования состоит в попытке обобщить результаты [11] на случай несимметричного деформационного внешнего потока, периодически зависящего от времени. Предполагается рассмотреть деформационный поток, аналогичный использованному в работах [18, 19], но для случая двух вихрей разной интенсивности с центром вращения, смещенным относительно оси потока.

2. Формулировка модели вихревого диполя

Во вращающейся баротропной жидкости при малых числах Россби движение невязкого несжимаемого потока описывается уравнениями квазигеострофического приближения [28]. В частности, уравнением сохранения потенциальной завихренности

$$\partial_t q + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

где $q = \Delta\psi$, а скорости удовлетворяют геострофическим соотношениям [29]

$$\dot{x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Здесь q и ψ — потенциальный вихрь и функция тока.

Решение уравнения (2.1) в присутствии внешнего потока вида

$$\psi_d = \left[S(t)(x^2 - y^2) + \Omega(t)(x^2 + y^2) \right], \quad (2.2)$$



где $S(t) = S_0(1 + \varepsilon \sin \nu t)$, $\Omega(t) = \Omega_0(1 + \varepsilon \sin \nu t)$ (ε, ν — амплитуда и частота переменного деформационного потока), может быть представлено в виде комбинации

$$\psi = \psi_d + \psi_v, \quad (2.3)$$

где ψ_d — внешний деформационный поток, а ψ_v — поле пары сингулярных геострофических вихрей [30]

$$q = \sum_{i=1}^2 \mu_i \delta(x - x_i(t)) \delta(y - y_i(t)), \quad (2.4)$$

с координатами $\mathbf{r}_i = (x_i(t), y_i(t))$ и интенсивностями μ_i . В этом случае ψ_v выражается через функцию Грина оператора Лапласа [30]

$$\Delta G = \delta(x - x_i(t)) \delta(y - y_i(t)), \quad G = \ln r_0, \quad (2.5)$$

где $r_0^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$ — расстояние до i -го вихря.

Теперь для удобства перепишем функцию тока, являющуюся в данном случае гамильтонианом системы, в виде

$$\psi = \psi_d + \mu_1 \psi_v^1(x - x_1, y - y_1) + \mu_2 \psi_v^2(x - x_2, y - y_2). \quad (2.6)$$

Уравнения абсолютного движения пары вихрей, помещенных в переменный деформационный поток, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= - \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} = 2y_1(S - \Omega) + \mu_2 \frac{y_2 - y_1}{r_0^2}, \\ \dot{y}_1 &= \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} = 2x_1(S + \Omega) - \mu_2 \frac{x_2 - x_1}{r_0^2}, \\ \dot{x}_2 &= - \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_2 \\ y=y_2}} = 2y_2(S - \Omega) - \mu_1 \frac{y_2 - y_1}{r_0^2}, \\ \dot{y}_2 &= \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_2 \\ y=y_2}} = 2x_2(S + \Omega) + \mu_1 \frac{x_2 - x_1}{r_0^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

На рисунке 1а представлены фазовые траектории вихрей при симметричном воздействии постоянного деформационного потока ($\varepsilon = 0$) на вихревую пару. На рисунке 1б представлен пример траекторий абсолютного движения пары вихрей относительно центра деформации, в случае его несовпадения с центром завихренности. Жирной кривой на этом рисунке показана траектория движения центра завихренности.

3. Сведение системы к полутора степеням свободы

Система из четырех уравнений (2.7) представляет собой систему с 2.5 степенями свободы. Как будет показано далее, ее удается свести к системе с 1.5 степенями свободы.

Положение центра завихренности произвольной вихревой пары определяется выражениями

$$x_c = \frac{L_x}{\mu_1 + \mu_2}, \quad y_c = \frac{L_y}{\mu_1 + \mu_2}, \quad (3.1)$$

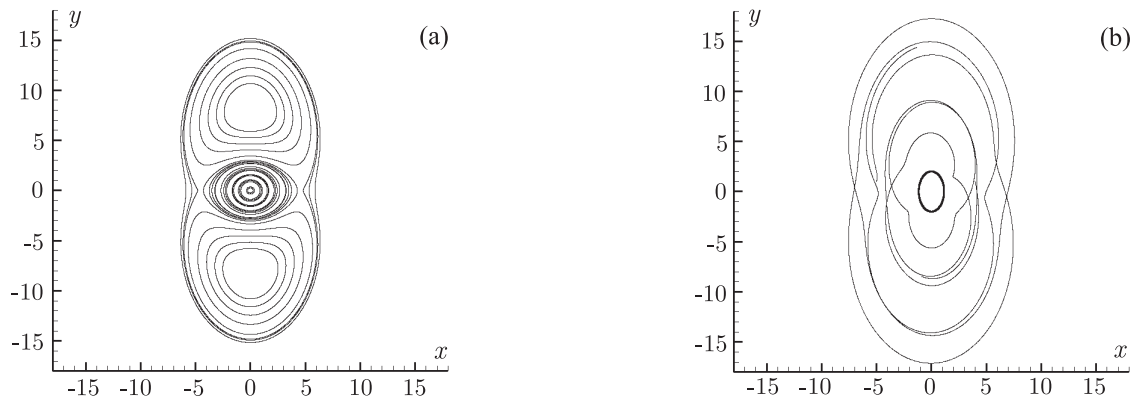


Рис. 1. (а) Фазовый портрет системы в случае совпадения центров завихренности и деформации в точке $(0, 0)$ при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $S_0 = -0.01$, $\Omega_0 = -0.02$; (б) пример траекторий пары вихрей в случае, когда центр завихренности находится в точке с координатами $(1, 1)$, а центр деформации в точке $(0, 0)$ для тех же параметров системы; жирной линией обозначена траектория движения центра завихренности.

где

$$L_x = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \quad L_y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 \quad (3.2)$$

определяют компоненты линейного момента вихревой пары. Из (3.1) и (3.2) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{L}_x &= 2(S - \Omega) L_y, & \dot{L}_y &= 2(S + \Omega) L_x, \\ \frac{\dot{L}_x}{\dot{L}_y} &= \frac{(S_0 - \Omega_0) L_y}{(S_0 + \Omega_0) L_x}, & L_x^2 &= \frac{(S_0 - \Omega_0)}{(S_0 + \Omega_0)} L_y^2 + c_1 c_2, \\ L_x &= c_1 \exp\left(\omega_c \left(t - \frac{\varepsilon}{\nu} (\cos \nu t - 1)\right)\right) + c_2 \exp\left(\omega_c \left(\frac{\varepsilon}{\nu} (\cos \nu t - 1) - t\right)\right), \\ L_y &= \frac{(S_0 + \Omega_0)}{\sqrt{(S_0^2 - \Omega_0^2)}} \left[c_1 \exp\left(\omega_c \left(t - \frac{\varepsilon}{\nu} (\cos \nu t - 1)\right)\right) - c_2 \exp\left(\omega_c \left(\frac{\varepsilon}{\nu} (\cos \nu t - 1) - t\right)\right) \right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} \left((\mu_1 x_1(0) + \mu_2 x_2(0)) + \frac{\sqrt{(S_0^2 - \Omega_0^2)}}{(S_0 + \Omega_0)} (\mu_1 y_1(0) + \mu_2 y_2(0)) \right), \\ c_2 &= \frac{1}{2} \left((\mu_1 x_1(0) + \mu_2 x_2(0)) - \frac{\sqrt{(S_0^2 - \Omega_0^2)}}{(S_0 + \Omega_0)} (\mu_1 y_1(0) + \mu_2 y_2(0)) \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

и

$$\omega_c = 2\sqrt{S_0^2 - \Omega_0^2}. \quad (3.5)$$

Согласно (3.3), L_x, L_y являются инвариантами относительно преобразования координат и меняются со временем. Во многих работах (см., например, [11, 30]) для уменьшения

степеней свободы системы вихрей используется также угловой момент, записываемый следующим образом:

$$M(t) = \mu_1 (x_1^2 + y_1^2) + \mu_2 (x_2^2 + y_2^2). \quad (3.6)$$

Однако данная величина сохраняется только в случае совпадения центров деформации и завихренности, поэтому в общем случае произвольных интенсивностей и начальных положений пары вихрей получить выражение для M в квадратурах не удастся [11].

В случае если $S_0^2 - \Omega_0^2 > 0$ и центр деформации не совпадает с центром завихренности (т.е. $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$) в начальный момент времени, центр завихренности движется неограниченно по гиперболической траектории от центра деформации, т.е. движение вихревой пары является нелокализованным для произвольных значений интенсивностей μ_1, μ_2 .

Как видно из (3.3), локализованное движение вихревой пары возможно только при $S_0^2 - \Omega_0^2 < 0$, действительная часть координат линейного момента диполя будет определять положение центра завихренности

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} L_x &= \operatorname{Re} c_1 \cos \left(|\omega_c| \left(t - \frac{\varepsilon}{\nu} (\cos \nu t - 1) \right) \right) - \operatorname{Im} c_1 \sin \left(|\omega_c| \left(t - \frac{\varepsilon}{\nu} (\cos \nu t - 1) \right) \right), \\ \operatorname{Re} L_y &= \frac{(S_0 + \Omega_0)}{\sqrt{|S_0^2 - \Omega_0^2|}} \left[\operatorname{Re} c_1 \sin \left(|\omega_c| \left(t - \frac{\varepsilon}{\nu} (\cos \nu t - 1) \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Im} c_1 \cos \left(|\omega_c| \left(t - \frac{\varepsilon}{\nu} (\cos \nu t - 1) \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Постоянные c_1 и c_2 определяют несимметричность воздействия периодического деформационного потока на вихревую пару. В случае $c_1 = c_2 = 0$ деформационный поток воздействует симметрично на вихри по обеим осям.

Далее будем рассматривать только локализованное движение вихревой пары. Перейдем в полярную систему координат, связанную с центром завихренности,

$$\begin{aligned} x_1 - x_c &= r_1 \cos \varphi_1, & x_2 - x_c &= r_2 \cos \varphi_2, \\ y_1 - y_c &= r_1 \sin \varphi_1, & y_2 - y_c &= r_2 \sin \varphi_2, \\ r_1^2 &= (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2, & r_2^2 &= (x_2 - x_c)^2 + (y_2 - y_c)^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В новых переменных соотношение (3.2) преобразуется к виду

$$\mu_1 r_1 \cos \varphi_1 = -\mu_2 r_2 \cos \varphi_2, \quad \mu_1 r_1 \sin \varphi_1 = -\mu_2 r_2 \sin \varphi_2. \quad (3.9)$$

Отсюда видно, что

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2, & \operatorname{sign} \mu_1 &\neq \operatorname{sign} \mu_2, \\ \varphi_1 &= \varphi_2 + \pi, & \operatorname{sign} \mu_1 &= \operatorname{sign} \mu_2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

и

$$\begin{aligned} \mu_1 r_1 &= -\mu_2 r_2, & \operatorname{sign} \mu_1 &\neq \operatorname{sign} \mu_2, \\ \mu_1 r_1 &= \mu_2 r_2, & \operatorname{sign} \mu_1 &= \operatorname{sign} \mu_2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

т.е. расстояние от вихрей до центра завихренности всегда обратно пропорционально отношению их интенсивностей.

Функция тока (2.3) в переменных (3.8) имеет вид

$$\psi = \psi_d + \mu_2 \log(\mu r_1), \quad (3.12)$$

где $\mu = \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)$ и

$$\begin{aligned} \psi_d &= (r_1 \cos \varphi_1 + x_c)^2 (\Omega + S) + (r_1 \sin \varphi_1 + y_c)^2 (\Omega - S) = \\ &= (\Omega + S) (r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 2r_1 x_c \cos \varphi_1) + \\ &+ (\Omega - S) (r_1^2 \sin^2 \varphi_1 + 2r_1 y_c \sin \varphi_1) + (\Omega + S) x_c^2 + (\Omega - S) y_c^2 = \\ &= [\Omega r_1^2 + S r_1^2 \cos 2\varphi_1] + 2r_1 \{(\Omega + S) x_c \cos \varphi_1 + (\Omega - S) y_c \sin \varphi_1\} + \\ &+ (\Omega + S) \left((\operatorname{Re} c_1)^2 + (\operatorname{Im} c_1)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Уравнения адвекции в координатах (r_1, φ_1) примут вид

$$\dot{r}_1 = -\frac{1}{r_1} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} - (\dot{x}_c \cos \varphi_1 + \dot{y}_c \sin \varphi_1), \quad \dot{\varphi}_1 = \frac{1}{r_1} \frac{\partial \psi}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1} (\dot{x}_c \sin \varphi_1 - \dot{y}_c \cos \varphi_1). \quad (3.14)$$

Подставляя выражение (3.7) в (3.1), имеем

$$\begin{aligned} x_c &= \operatorname{Re} c_1 \cos \left(|\omega_c| \left(t - \frac{\varepsilon}{\nu} (\cos \nu t - 1) \right) \right) - \operatorname{Im} c_1 \sin \left(|\omega_c| \left(t - \frac{\varepsilon}{\nu} (\cos \nu t - 1) \right) \right), \\ y_c &= 2 \frac{S_0 + \Omega_0}{|\omega_c|} \left(\operatorname{Re} c_1 \sin \left(|\omega_c| \left(t - \frac{\varepsilon}{\nu} (\cos \nu t - 1) \right) \right) + \operatorname{Im} c_1 \cos \left(|\omega_c| \left(t - \frac{\varepsilon}{\nu} (\cos \nu t - 1) \right) \right) \right); \\ \dot{x}_c &= -2 |\omega_c| (1 + \varepsilon \sin \nu t) \left(\operatorname{Re} c_1 \sin \left(|\omega_c| \left(t - \frac{\varepsilon}{\nu} (\cos \nu t - 1) \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Im} c_1 \cos \left(|\omega_c| \left(t - \frac{\varepsilon}{\nu} (\cos \nu t - 1) \right) \right) \right), \\ \dot{y}_c &= 2 (S + \Omega) \left(\operatorname{Re} c_1 \cos \left(|\omega_c| \left(t - \frac{\varepsilon}{\nu} (\cos \nu t - 1) \right) \right) - \operatorname{Im} c_1 \sin \left(|\omega_c| \left(t - \frac{\varepsilon}{\nu} (\cos \nu t - 1) \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Тогда уравнения адвекции (3.14) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= -\frac{1}{r_1} \left(-2S r_1^2 \sin 2\varphi_1 + 2r_1 \{ -(\Omega + S) x_c \sin \varphi_1 + (\Omega - S) y_c \cos \varphi_1 \} - \right. \\ &\quad \left. - (\dot{x}_c \cos \varphi_1 + \dot{y}_c \sin \varphi_1) \right) = 2S r_1 \sin 2\varphi_1, \\ \dot{\varphi}_1 &= \frac{1}{r_1} \left(2\Omega r_1 + 2S r_1 \cos 2\varphi_1 + 2 \{ (\Omega + S) x_c \cos \varphi_1 + (\Omega - S) y_c \sin \varphi_1 \} + \frac{\mu_2}{\mu r_1} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{r_1} (\dot{x}_c \sin \varphi_1 - \dot{y}_c \cos \varphi_1) = 2\Omega + 2S \cos 2\varphi_1 + \frac{\mu_2}{\mu r_1^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Уравнения адвекции (3.16) вместе с преобразованиями координат (3.8) описывают поведение вихревой пары, состоящей из двух вихрей произвольных интенсивностей в несимметричном деформационном потоке (т. е. когда центр завихренности не совпадает с центром деформации).

4. Постоянный деформационный поток

При $\varepsilon = 0$, т. е. в случае постоянного деформационного потока, центр завихренности вращается вокруг центра деформации (точка начала координат) по эллиптическим траекториям с частотой $|\omega_c|$. Уравнения адвекции (3.16) в этом случае явно не зависят от времени, т. е. описывают систему с одной степенью свободы, интегрируемую при любых значениях параметров Ω_0, S_0 . Первый интеграл этой системы имеет известный вид

$$\psi_0 = \Omega_0 r_1^2 + S_0 r_1^2 \cos 2\varphi_1 + \frac{\mu_2}{\mu} \log \mu r_1. \quad (4.1)$$



Особые точки системы определяются из соотношений

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= 2S_0 r_1 \sin 2\varphi_1 = 0, \\ \dot{\varphi}_1 &= 2\Omega_0 + 2S_0 \cos 2\varphi_1 + \frac{\mu_2}{\mu r_1^2} = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{-\frac{\mu_2}{2\mu(\Omega_0 + S_0)}}, \quad \varphi_1 = \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ r_1 &= \sqrt{-\frac{\mu_2}{2\mu(\Omega_0 - S_0)}}, \quad \varphi_1 = \pi n + \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.3)$$

также дополнительно всегда существует сингулярная эллиптическая точка при $r_1 = 0$ для любого φ_1 . Как видно из (4.3), в стационарной системе могут существовать, помимо сингулярной особой точки, либо нуль, либо две, либо четыре особые точки в зависимости от параметров деформации: сдвига S_0 и вращения Ω_0 .

На рисунке 2а представлен фазовый портрет системы (3.16), на котором изображены фазовые траектории одного вихря в системе координат, связанной с переменным центром завихренности посредством преобразований (3.8). Видно, что данный фазовый портрет аналогичен представленному на рисунке 1а, т. е. при несовпадении центров завихренности и деформации вихри движутся вокруг переменного центра завихренности также, как и вокруг постоянного центра завихренности при совпадении вышеуказанных центров.

На рисунке 2б приведена частота оборота пары вихрей вокруг эллиптических особых точек для фазового портрета, изображенного на рисунке 2а. В начале координат располагается сингулярная особая точка, частота в ее окрестности стремится к бесконечности. С удалением от сингулярной точки частота резко падает до нуля, что соответствует началу области рециркуляции, где вращение происходит относительно регулярной особой точки в обратном направлении. В конце зоны рециркуляции частота опять обращается в нуль. Далее, вихревая пара при этом вращается в ту же сторону, что и в окрестности сингулярного центра, частота асимптотически приближается к частоте вращения центра завихренности вокруг центра деформации (3.5), обозначенной на рисунке штриховой линией.

Таким образом, вихревая пара движется регулярно в постоянном деформационном потоке при произвольных интенсивностях и произвольных начальных положениях вихрей (или, другими словами, при несовпадении центров деформации и завихренности).

5. Переменный деформационный поток

При $\varepsilon \neq 0$ движение вихревой пары значительно усложняется, при этом часть ее фазовых траекторий становятся хаотическими в том смысле, что две изначально близкие траектории расходятся экспоненциально за конечное время. Такую расходимость в задачах гидродинамики принято называть хаотической адвекцией [1, 12].

В качестве иллюстрации такого поведения приведен рисунок 3, на котором изображены сечения Пуанкаре, соответствующие следующим значениям параметров системы: $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $S_0 = -0.01$, $\Omega_0 = -0.02$; центр завихренности изначально располагается в точке $x_c(0) = 1$, $y_c(0) = 1$, в то время как параметры возмущения для разных фрагментов рисунка 3 следующие: а) $\varepsilon = 0.01$, $\nu = 0.1$, б) $\varepsilon = 0.1$, $\nu = 0.1$, в) $\varepsilon = 0.3$, $\nu = 0.1$, д) $\varepsilon = 1.0$, $\nu = 0.1$.

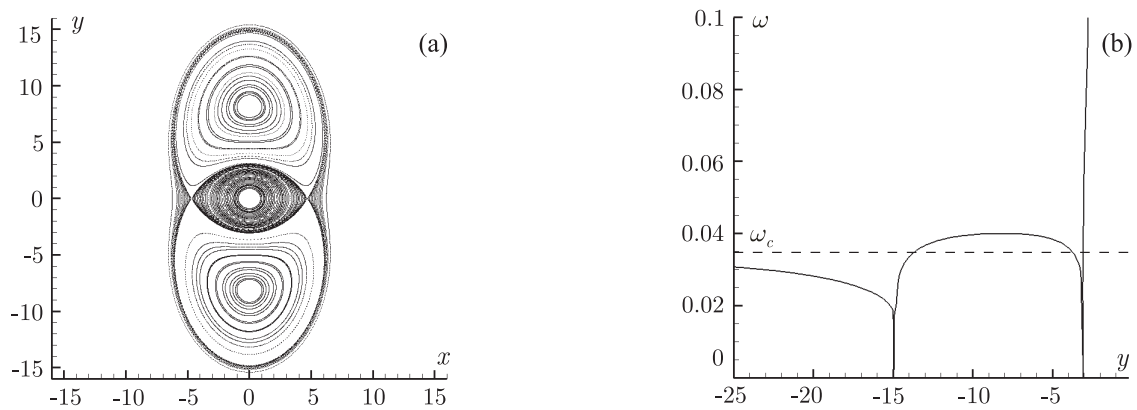


Рис. 2. (а) Фазовый портрет системы относительно вращающегося по эллипсу вокруг центра деформации центра завихренности, изначально помещенного в точку $(1, 1)$, при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $S_0 = -0.01$, $\Omega_0 = -0.02$; (б) частота оборота пары вихрей вокруг эллиптических особых точек для фазового портрета, изображенного слева. Штриховой линией обозначена частота вращения центра завихренности вокруг центра деформации (3.5).

На данной серии рисунков приведен процесс увеличения области хаотизации в окрестностях невозмущенных неустойчивых гиперболических точек с увеличением амплитуды пульсаций деформационного потока ε . Следует обратить внимание на увеличение угла поворота фазового пространства на сечениях Пуанкаре с увеличением амплитуды возмущения. Этот поворот является следствием несовпадения фаз пульсаций нестационарного внешнего потока и вывода точек сечения Пуанкаре. За счет этого несовпадения можно видеть, что все фазовое пространство совершает колебания относительно оси абсцисс на угол, зависящий от ε, ν . При $\varepsilon = 0$ фазовое пространство не колеблется (рис. 2), однако с увеличением ε наблюдаются очень сильные колебания относительно центра завихренности (рис. 3b, c, d).

Наиболее ярко данный эффект выражается при больших амплитудах и высоких частотах; например, на рисунках 3e, f изображены сечения Пуанкаре при $\varepsilon = 40.0$, $\nu = 2.0$ и $\varepsilon = 70.0$, $\nu = 2.0$ соответственно. Причем на рисунке 3f видно, что в случае, когда отклонения при колебаниях достигают почти $\frac{\pi}{2}$, в системе происходит бифуркация — вместо двух зон рециркуляции образуются 4 таких зоны. Чтобы показать, что данные области являются зонами рециркуляции, а не нелинейными резонансами, фазовые траектории в них обозначены разными линиями: жирными черными и серыми, сплошными и штриховыми. Видно, что траектория, принадлежащая той или иной области рециркуляции, остается в ней же все время, тогда как траектория, принадлежащая нелинейному резонансу, описывала бы несколько островов устойчивости, в зависимости от кратности резонанса [34].

6. Заключение

В работе рассмотрено движение вихревой пары, состоящей из вихрей произвольных интенсивностей, в несимметричном деформационном потоке. Под несимметричностью потока подразумевается несовпадение центра воздействия этого потока и центра завихренности вихревой пары. В рамках задачи удается получить выражение для линейного момента пары вихрей в квадратурах, в результате исходную систему с 2.5 степенями свободы удается редуцировать к системе с 1.5 степенями свободы.



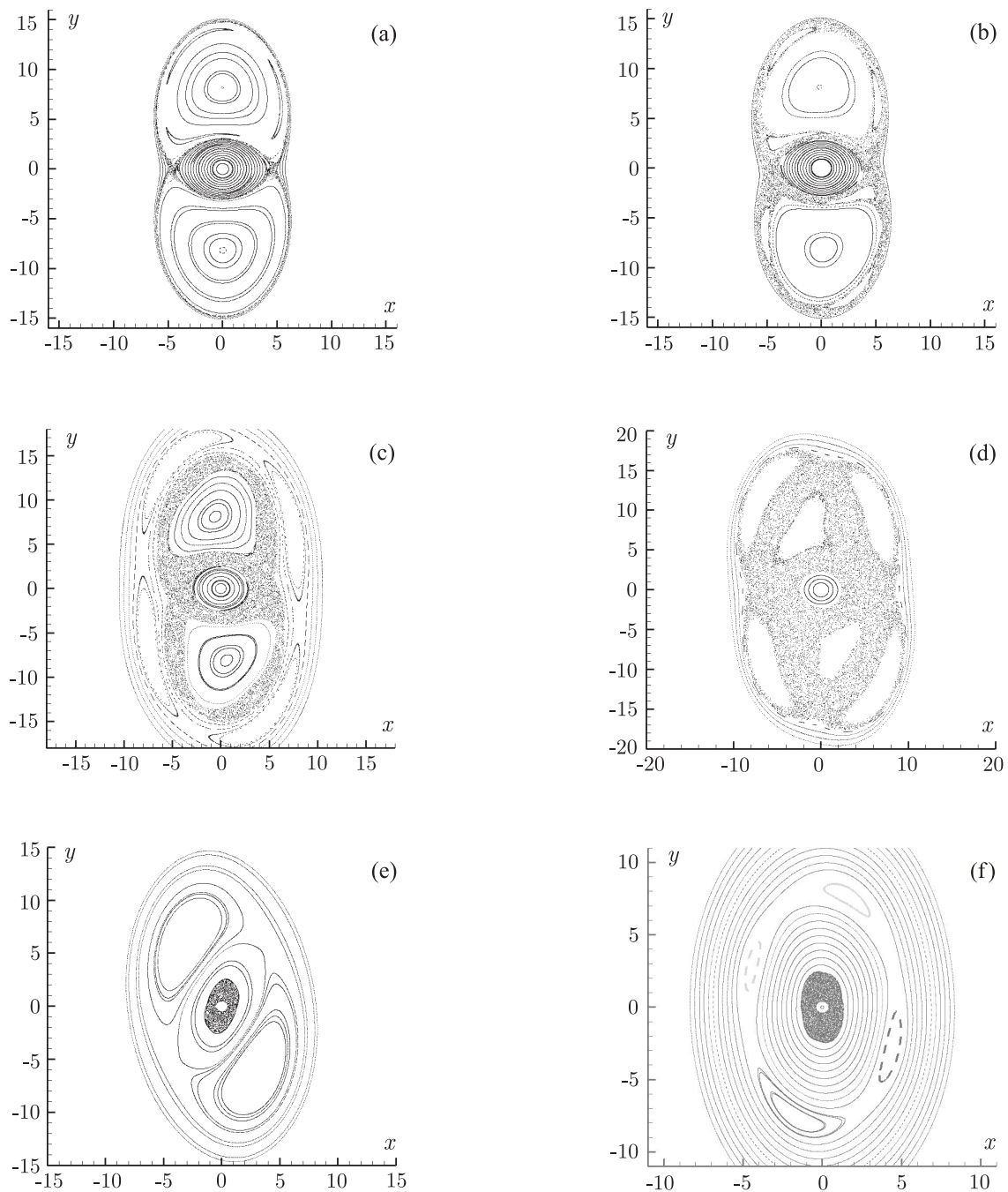


Рис. 3. Сечения Пуанкаре системы (3.16) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $S_0 = -0.01$, $\Omega_0 = -0.02$, $x_c(0) = 1$, $y_c(0) = 1$ и ε, ν : а) 0.01, 0.1, б) 0.1, 0.1, в) 0.3, 0.1, г) 1.0, 0.1, е) 40.0, 2.0, ф) 70.0, 2.0.

При условии стационарности деформационного потока движение вихревой пары интегрируемо для любых значений интенсивностей и начальных положений вихрей и для произвольных значений параметров сдвига и вращения деформационного потока. В случае переменного деформационного потока система неинтегрируема, что приводит к тому, что

часть фазовых траекторий движения вихрей становятся хаотическими, т. е. экспоненциально расходятся за конечное время. Показано, что такой поток ведет к колебаниям фазового пространства относительно центра завихренности, а при определенных значениях амплитуды и частоты приводит к бифуркации фазового пространства: вместо двух областей рециркуляции образуется четыре подобных области.

Список литературы

- [1] Кошель К. В., Пранц С. В. Хаотическая адвекция в океане. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 360 с.
- [2] McWilliams J. C. The emergence of isolated, coherent vortices in turbulent flow // *J. Fluid Mech.*, 1984, vol. 146, pp. 1–43.
- [3] Baey J.-M., Carton X. Vortex multipoles in two-layer rotating shallow-water flow // *J. Fluid Mech.*, 2002, vol. 460, pp. 151–175.
- [4] Carton X. Hydrodynamical modelling of oceanic vortices // *Surveys Geophys.*, 2001, vol. 22, pp. 179–263.
- [5] Horton C. W., Baylor K. J. Observations of cold-core Gulf Stream ring with an «explosive» elliptical instability // *J. Phys. Oceanogr.*, 1991, vol. 21, pp. 364–368.
- [6] Kennelly M. A., Evans R. H., Joyce T. M. Small-scale cyclones on the periphery of Gulf Stream warm-core rings // *J. Geophys. Res.*, 1985, vol. 90, pp. 8845–8857.
- [7] Nof D. Generation of ringlets // *Tellus A*, 1993, vol. 45, pp. 299–310.
- [8] Smeed D. A. Baroclinic instability of three-layer flows: 2. Experiments with eddies // *J. Fluid Mech.*, 1988, vol. 194, pp. 233–259.
- [9] Thivolle-Cazat E., Sommeria J., Galmiche M. Baroclinic instability of two-layer vortices in laboratory experiments // *J. Fluid Mech.*, 2005, vol. 544, pp. 69–97.
- [10] Roenby J., Aref H. Chaos in body-vortex interactions // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2010, vol. 466, no. 2119, pp. 1871–1891.
- [11] Sutyryn G. G., Perrot X., Carton X. Integrable motion of a vortex dipole in an axisymmetric flow // *Phys. Lett. A*, 2008, vol. 372, no. 33, pp. 5452–5457.
- [12] Aref H. Integrable, chaos and turbulent vortex motion in two-dimensional flows // *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1983, vol. 15, pp. 345–389.
- [13] Flierl G. R. Isolated eddy models in geophysics // *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1987, vol. 19, pp. 493–530.
- [14] Hopfinger E. J., van Heijst G. J. F. Vortices in rotating fluids // *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1993, vol. 25, pp. 241–289.
- [15] Rom-Kedar V., Leonard A., Wiggins S. An analytical study of transport, mixing and chaos in an unsteady vortical flow // *J. Fluid Mech.*, 1990, vol. 214, pp. 347–394.
- [16] Trieling R. R., van Wesenbeeck J. M. A., van Heijst G. J. F. Dipolar vortices in a strain flow // *Phys. Fluids*, 1998, vol. 10, pp. 144–159.
- [17] Банникова Е. Ю., Конторович В. М., Резник Г. М. Динамика вихревой пары в радиальном потоке // *ЖЭТФ*, 2007, т. 132, с. 615–622.
- [18] Perrot X., Carton X. Point-vortex interaction in an oscillatory deformation field: Hamiltonian dynamics, harmonic resonance and transition to chaos // *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2009, vol. 11, no. 4, pp. 971–995.
- [19] Sokolovskiy M. A., Koshel K. V., Carton X. Baroclinic multipole evolution in shear and strain // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 2010, <http://dx.doi.org/10.1175/2010JPO4429.1>
- [20] Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 368 с.
- [21] Соколовский М. А., Веррон Ж. Динамика вихревых структур в стратифицированной вращающейся жидкости. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 386 с.



- [22] Килин А. А., Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика точечных вихрей внутри и вне круговой области // *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев, М. А. Соколовский (ред.). М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2003. С. 414–440.*
- [23] *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев, М. А. Соколовский (ред.). М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2003. 704 с.*
- [24] Tur A., Yanovsky V. Point vortices with a rational necklace: New exact stationary solutions of the two-dimensional Euler equation // *Phys. Fluids*, 2004, vol. 16, no. 8, pp. 2877–2875.
- [25] Yanovsky V. V., Tur A. V., Kulik K. N. Singularities motion equations in 2-dimensional ideal hydrodynamics of incompressible fluid // *Phys. Lett. A*, 2009, vol. 373, pp. 2484–2487.
- [26] Кулик К. Н., Тур А. В., Яновский В. В. Взаимодействие точечного и дипольного вихрей в несжимаемой жидкости // *ТМФ*, 2010, т. 162, № 3, с. 459–480.
- [27] Резник Г. М. Динамика локализованных вихрей на бета-плоскости // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*, 2010, т. 46, № 6, с. 846–860.
- [28] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: В 10 тт.: Т. 6: Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [29] Pedlosky J. *Geophysical fluid dynamics*. 2nd ed. New York: Springer, 1987. 720 pp.
- [30] Гряник В. М., Тевс М. В. Динамика сингулярных геострофических вихрей в N -слойной модели атмосферы (океана) // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 1989, т. 25, № 3, с. 243–256.
- [31] Рыжов Е. А., Кошель К. В. Эффекты хаотической адвекции в трехслойной модели океана // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*, 2011, т. 47, № 2, с. 263–274.
- [32] Козлов В. Ф., Кошель К. В. Некоторые особенности хаотизации пульсирующего баротропного потока над осесимметричной подводной возвышенностью // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*, 2001, т. 37, № 3, с. 378–389.
- [33] Koshel K. V., Sokolovskiy M. A., Davies P. A. Chaotic advection and nonlinear resonances in an oceanic flow above submerged obstacle // *Fluid Dynam. Res.*, 2008, vol. 40, pp. 695–736.
- [34] Zaslavsky G. M. *Physics of chaos in Hamiltonian systems*. 2nd ed. London: Imperial College Press, 2007. 315 pp.

The integrable and nonintegrable motion of a vortex pair embedded inside an asymmetrical deformation flow

Evgeny A. Ryzhov

V.I.Ilichev Pacific Oceanological Institute
43, Baltiyskaya st., Vladivostok, 690041, Russia
ryzhovea@poi.dvo.ru

The integrable and nonintegrable motion of a vortex pair, which consists of two vortices of arbitrary intensities, embedded inside a steady and periodic external deformation flow is studied. In the general case, such an external deformation flow impacts asymmetrically on the vortex pair, which results in nonconservation of motion invariants: the linear momentum and the angular momentum. An analytical expression for the linear momentum, which gives an opportunity to reduce the initial system with 2.5 degrees of freedom to a system with 1.5 degrees of freedom, is obtained. For the steady state of a constant deformation flow the integrability of the dipole motion is shown for any initial vortices positions and intensities of vortices, and for arbitrary values of shear and rotation of the deformation flow.

MSC 2010: 37D45, 76F10, 76F25, 76U05

Keywords: vortex pair, deformation flow, integrals of motion

Received May 23, 2011, accepted June 14, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 2, pp. 283–293 (Russian)

