



УДК: 517.9

MSC 2010: 39Axx, 93D05

Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля

А. П. Кузнецов, И. Р. Сатаев, Л. В. Тюрюкина

Рассматривается возбуждение двух связанных автоколебательных осцилляторов внешним гармоническим сигналом. Проводится сопоставление и сравнение с картиной синхронизации фазовых осцилляторов. Обсуждается вложение картины периодических, а также двух- и трехчастотных режимов в пространство параметров воздействующего сигнала. Даны иллюстрации режимов трехчастотных торов и резонансных двухчастотных торов, возникающих на их поверхности. Обнаружен ряд существенных отличий от бифуркационных механизмов разрушения синхронизации по сравнению со случаем фазовых осцилляторов.

Ключевые слова: синхронизация, бифуркации, квазипериодическая динамика, хаос

1. Введение

Синхронизация — фундаментальное нелинейное явление, имеющее приложения во многих областях естествознания: физике, электронике, химии, биологии и т. д. [1–7]. Картина наблюдаемых эффектов в задачах синхронизации может быть богатой и разнообразной. В значительной степени она зависит от типа динамики подвергаемой воздействию системы. Это могут быть как простые регулярные автоколебания, так и режимы динамического хаоса. В последнее время получены новые существенные результаты для случая, когда автономная система может демонстрировать двухчастотные и квазипериодические

Получено 4 июля 2011 года

Принято к печати 9 августа 2011 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ проекты No. 09-02-00426, No. 11-02-91334-ННИО и DFG No. 220/14-1.

Кузнецов Александр Петрович

apkuz@rambler.ru

Сатаев Игорь Рустамович

sataevir@rambler.ru

Тюрюкина Людмила Владимировна

lvtur@rambler.ru

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38



колебания [8–15]. Описаны бифуркационные механизмы разрушения точного захвата обоих осцилляторов внешним сигналом в таких системах, а также бифуркации, отвечающие за возникновение трехчастотных колебаний. Однако основные результаты касались фазового приближения [12–15], т. е. приближения, в рамках которого внешний сигнал возмущает только фазы взаимодействующих осцилляторов. В настоящей работе мы рассмотрим случай возбуждения двух связанных автоколебательных осцилляторов внешним сигналом в терминах исходной системы и обсудим, какие черты фазовой динамики сохраняются, как они проявляются в общем случае, а также возникающие при этом отличия.

С этой целью рассмотрим систему двух возбуждаемых гармоническим сигналом диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= B \sin \omega t, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь λ — параметр возбуждения автономных осцилляторов, Δ — их частотная расстройка, μ — коэффициент диссипативной связи, B — амплитуда воздействия, а $\omega = 1 + \Omega$ — его частота. Центральная частота осцилляторов принята за единицу, так что Ω представляет собой отстройку частоты сигнала от центральной.

2. Фазовое приближение

Представим, прежде всего, краткий обзор основных результатов, полученных в рамках фазового приближения [12–15]. При традиционных в этом случае предположениях о малой степени возбуждения осцилляторов, величине связи и т. д. система (1.1) может быть приближенно приведена к фазовым уравнениям:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= -\Omega - \frac{\Delta}{2} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_2 - \psi_1) + b \sin \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= -\Omega + \frac{\Delta}{2} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь ψ_1 и ψ_2 — фазы первого и второго осцилляторов относительно внешнего сигнала, $b = \frac{B}{4}$ — параметр амплитуды воздействия, а все параметры нормированы на величину управляющего параметра λ . (Подробный вывод и детали см. в [12, 13, 15].)

Обратимся к традиционной для неавтономных систем плоскости параметров частота–амплитуда воздействия (Ω, b) . В ситуации возбуждения простой автоколебательной системы геометрическим образом синхронных режимов на такой плоскости является язык Арнольда, погруженный в область двухчастотной квазипериодичности. Для возбуждаемой системы двух фазовых осцилляторов картина существенным образом модифицируется [12–15]. Далее мы ограничимся наиболее исследованным случаем, когда автономная система (2.1) демонстрирует режим захвата, так что $|\Delta| < 2\mu$. Качественно плоскость параметров (Ω, b) системы (2.1) в этом случае выглядит, как показано на рисунке 1.

Прежде всего отметим, что возможен режим, который можно назвать полной синхронизацией, когда одновременно и точно захваченными внешней силой оказываются оба осциллятора. Условия реализации такого режима и его разрушения могут быть найдены

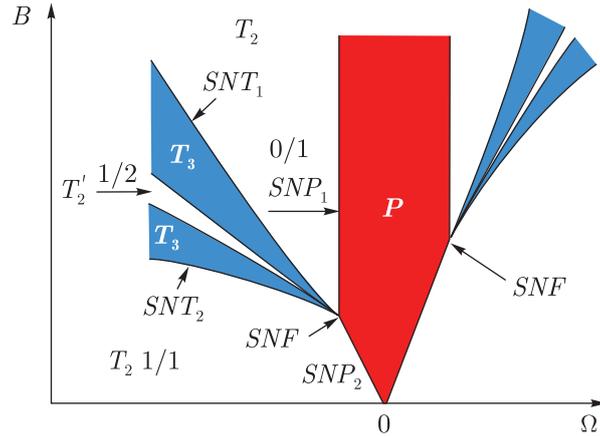


Рис. 1. Качественное представление основных режимов и бифуркаций на плоскости параметров фазовой системы (2.1). P — область точного захвата фаз обоих осцилляторов внешним сигналом; T_2 и T_3 — области двух- и трехчастотной квазипериодичности; $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$ — области с соответствующими числами вращения, отвечающие режимам захвата первого осциллятора и взаимному захвату их фаз; $\frac{1}{2}$ — одна из областей резонансных двухчастотных режимов. Линии и точки бифуркаций объясняются в тексте.

аналитически. Действительно, полагая $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$, из (2.1) можно получить, что

$$\begin{aligned} \sin \psi_1 &= \frac{2\Omega}{b}, \\ \sin(\psi_1 - \psi_2) &= \frac{2\Omega - \frac{\Delta}{2}}{\mu}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Решения уравнений (2.2) при вариации параметров появляются парами, так что

$$\begin{aligned} \psi_1^{(1)} &= \arcsin \frac{2\Omega}{b}, & \psi_1^{(2)} &= \pi - \arcsin \frac{2\Omega}{b}, \\ \psi_2^{(1)} &= \psi_1^{(1)} - \arcsin \frac{2\Omega - \frac{\Delta}{2}}{\mu}, & \psi_2^{(2)} &= \psi_1^{(1)} - \pi + \arcsin \frac{2\Omega - \frac{\Delta}{2}}{\mu}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

В соответствии с (2.3), на фазовой плоскости (ψ_1, ψ_2) возможно сосуществование четырех положений равновесия, из которых два — устойчивый и неустойчивый узлы, а еще два являются седлами [12, 13]. На рисунке 2а показан фазовый портрет системы (2.1) в этом случае.

На плоскости параметров на рисунке 1 четыре равновесия сосуществуют в области P , причем устойчивый узел отвечает за режим полной синхронизации. Границы SNP_1 этой области образованы линиями $2\Omega = \pm b$, на которых в соответствии с (2.2) значения $\psi_1^{(1)} \rightarrow \psi_1^{(2)}$. При выходе из области P через границу SNP_1 все четыре состояния равновесия сближаются и одновременно попарно сливаются в результате специфической седло-узловой бифуркации. При этом из многообразий состояний равновесия возникают устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые (рис. 2б). Устойчивая инвариантная кривая отвечает режиму частичного захвата первого осциллятора внешней силой, когда его фаза колеблется около равновесного значения, а фаза второго неограниченно нарастает. Другая граница SNP_2 области

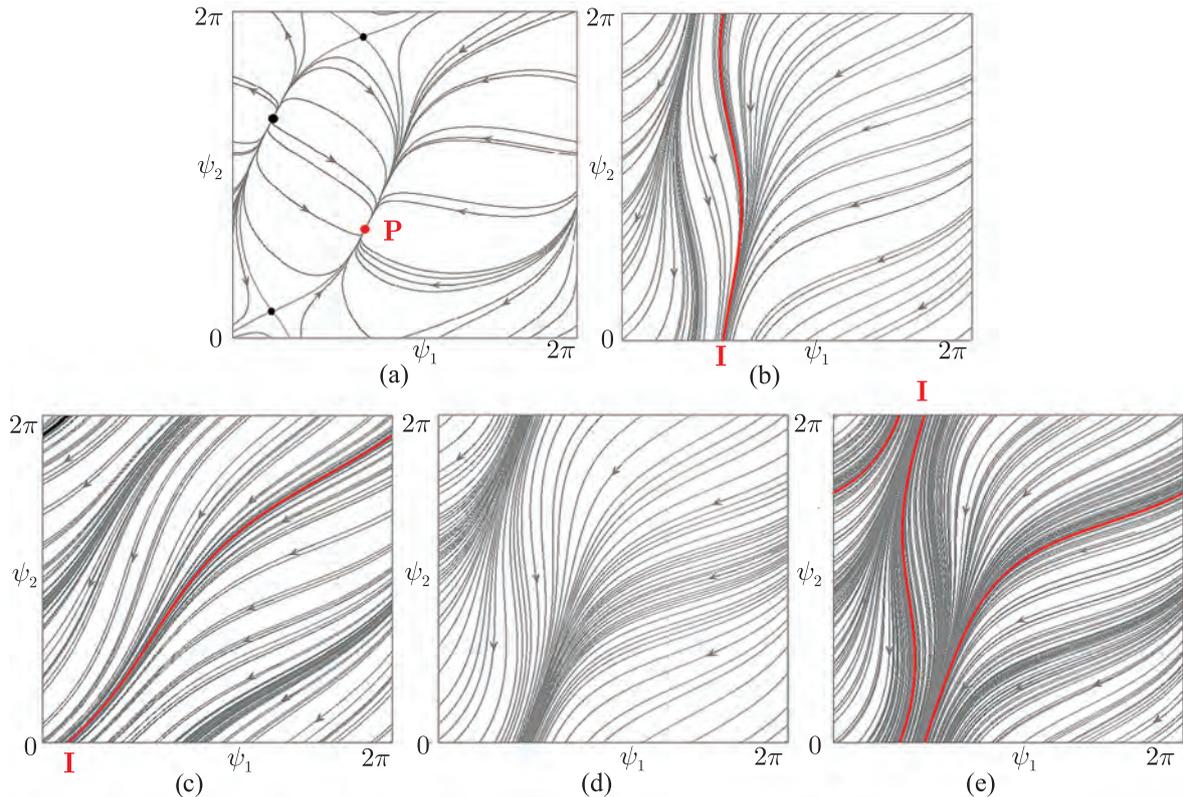


Рис. 2. Основные режимы фазовой системы (2.1). Красным* показаны аттракторы в виде устойчивого состояния равновесия P и инвариантной кривой I . Значения параметров осцилляторов: $\mu = 0.3$, $\Delta = 0.2$ и а) $\Omega = 0.1$, $b = 0.3$; б) $\Omega = 0.75$, $b = 0.9$; в) $\Omega = 0.75$, $b = 0.4$; д) $\Omega = 0.75$, $b = 0.75$; е) $\Omega = 0.75$, $b = 0.79$.

полной синхронизации образована линиями $2\Omega - \frac{\Delta}{2} = \pm\mu$, на которой в соответствии с (2.2) $\psi_2^{(1)} - \psi_1^{(1)} \rightarrow \psi_2^{(2)} - \psi_1^{(2)}$. Эта граница отвечает другой бифуркации седло-узловой типа, когда попарно сливаются другие пары равновесий. При этом из их многообразий возникает устойчивая инвариантная кривая, отвечающая режиму частичного захвата относительных фаз осцилляторов (рис. 2с).

Возникающие в результате бифуркаций состояния равновесия режимы с аттрактором в виде инвариантной кривой отвечают двухчастотной квазипериодичности. В свою очередь, при выходе из двухчастотной области на рисунке 1 через линию SNT_1 происходит седло-узловая бифуркация инвариантных кривых, в результате которой устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые сливаются и исчезают. В результате возникает поток фазовых траекторий, отвечающий трехчастотной квазипериодичности (рис. 2д). Аналогичная бифуркация, но для инвариантных кривых другого типа имеет место на линии SNT_2 .

На плоскости параметров (Ω, b) имеют место характерные точки коразмерности два SNF . Для них на фазовой плоскости все четыре состояния равновесия (2.3) стягиваются в одну точку. Точки SNF играют важную роль в картине режимов и характерны для задач синхронизации квазипериодических колебаний при описании в терминах фаз осцил-

*Для читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/doc/r/pdf/1910/0>

ляторов [12–17]. На плоскости параметров в такой точке сходятся области полной синхронизации, захвата первого осциллятора, захвата относительной фазы осцилляторов и трехчастотных колебаний. Последняя имеет вид языка с вершиной в точке SNF . Кроме того, область трехчастотной квазипериодичности пронизана системой языков резонансных двухчастотных режимов разного типа высших порядков. Эти резонансные режимы можно классифицировать с помощью числа вращения

$$w = \frac{p}{q}, \quad (2.4)$$

где p — число существенных пересечений инвариантной кривой с вертикальной, а q — с горизонтальной стороной фазового квадрата [15, 17]. Для примера на рисунке 2е показан режим, отвечающий числу вращения $w = \frac{1}{2}$.

Благодаря характерной структуре языков двухчастотных режимов авторы [16] называют аналогичные точки *saddle node fan* — «седло-узловой веер». Отметим, что границы всех языков двухчастотных режимов с вершинами в точке SNF образованы линиями седло-узловых бифуркаций соответствующих инвариантных кривых.

3. Фазовые портреты и динамика фазы в исходной системе

Обратимся теперь к анализу исходной системы (1.1). Управляющий параметр выберем достаточно большим, $\lambda = 1$, так что фазовое приближение, формально говоря, не применимо.

Фазовое пространство системы (1.1) $(x, \dot{x}, y, \dot{y}, t)$ имеет размерность пять. Поэтому фазовые портреты можно представить в виде проекций траекторий на фазовые плоскости первого и второго осцилляторов (x, \dot{x}) и (y, \dot{y}) . Поскольку система (1.1) неавтономна, то информативными иллюстрациями являются также *стробоскопические сечения* в этих проекциях, построенные через период внешнего воздействия. Для примера на рисунке 3 в первых двух колонках черным цветом показаны фазовые траектории системы (1.1), а красным — соответствующие стробоскопические сечения.

Для исходной системы (1.1) анализ фазовой динамики можно провести только численным образом. С этой целью на плоскостях (x, \dot{x}) и (y, \dot{y}) введем фазы первого и второго осцилляторов φ_1 и φ_2 — как углы, под которыми изображающая точка видна из начала координат. Аналогичным образом можно ввести и фазы для стробоскопических сечений. Соответствующие иллюстрации даны в третьей колонке.

Серия проекций на рисунке 3а иллюстрирует режим полной синхронизации осцилляторов внешней силой. В этом случае фазовые портреты обоих осцилляторов системы (1.1) представляют собой предельные циклы, близкие по форме к портретам изолированного осциллятора. В стробоскопическом сечении наблюдается неподвижная точка. Как видно из третьей колонки, численно определенные фазы осцилляторов примерно близки друг к другу, а фазы в стробоскопическом сечении постоянны во времени. Таким образом, фазы первого и второго осцилляторов захвачены внешней силой.

Второй пример на рисунке 3б отвечает режиму другого типа. Аттрактором для фазы в стробоскопическом сечении на самом правом фрагменте рисунка 3б является инвариантная кривая, что позволяет классифицировать этот режим как двухчастотный. Таким образом, в исходном фазовом пространстве ему отвечает двумерный тор. Отметим, что инвариантная кривая в стробоскопическом сечении пересекает на плоскости фаз вертикальную и горизонтальную границы области по одному разу, что в соответствии с (2.4) дает число

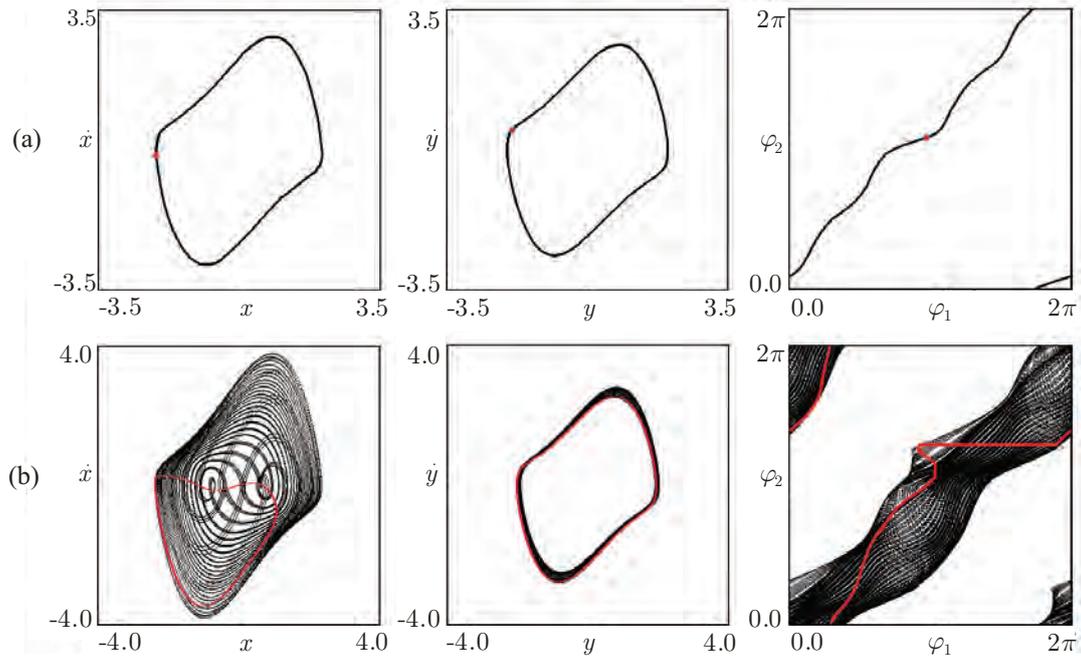


Рис. 3. Фазовые портреты системы (1.1) в проекции на плоскости переменных отдельных осцилляторов и на плоскости фаз. Портреты в стробоскопическом сечении показаны красным цветом. Значения параметров осцилляторов: $\lambda = 1$, $\mu = 0.1$, $\Delta = 0.1$ и а) $\Omega = -0.05$, $B = 0.15$, б) $\Omega = 0.25$, $B = 1.161$.

вращения $w = \frac{1}{1}$. При этом, однако, внешняя сила велика, так что фазовый портрет первого осциллятора в левой колонке на рисунке 3б очень сильно возмущен внешним сигналом. Это с очевидностью означает, что описание с помощью приближенных соотношений (2.1) для этого режима не применимо.

4. Двухчастотные и трехчастотные торы и Фурье-спектры

Представим некоторые иллюстрации, характеризующие торы разной размерности и разных типов для системы (1.1). Для этого используем проекции фазовых портретов в стробоскопическом сечении на плоскость координат обоих осцилляторов (x, y) — своего рода фигуры Лиссажу. Кроме того, представим спектры Фурье первого осциллятора. Соответствующие иллюстрации даны на рисунке 4.

Случай, показанный на рисунке 4а, отвечает двухчастотному тору, когда осцилляторы взаимно захвачены и число вращения $w = \frac{1}{1}$. Соответственно, фигура Лиссажу имеет по одной точке поворота по вертикали и горизонтали. В спектре колебаний доминирует отмеченный стрелкой пик на частоте $\omega_{1,2}$, связанной с взаимным захватом осцилляторов. Частота воздействия ω_{ext} отмечена другой стрелкой. Остальные пики представляют собой комбинационные составляющие.

Случай, показанный на рисунке 4б, отвечает трехчастотному тору. Фигура Лиссажу для такого режима оказывается незамкнутой. На рисунке хорошо видны многочисленные точки поворота, как по вертикальной, так и по горизонтальной оси. В дополнение к частоте сигнала ω_{ext} , вместо $\omega_{1,2}$ в спектре появляются две несоизмеримые частоты ω_1 и ω_2 , а также многочисленные комбинационные составляющие.

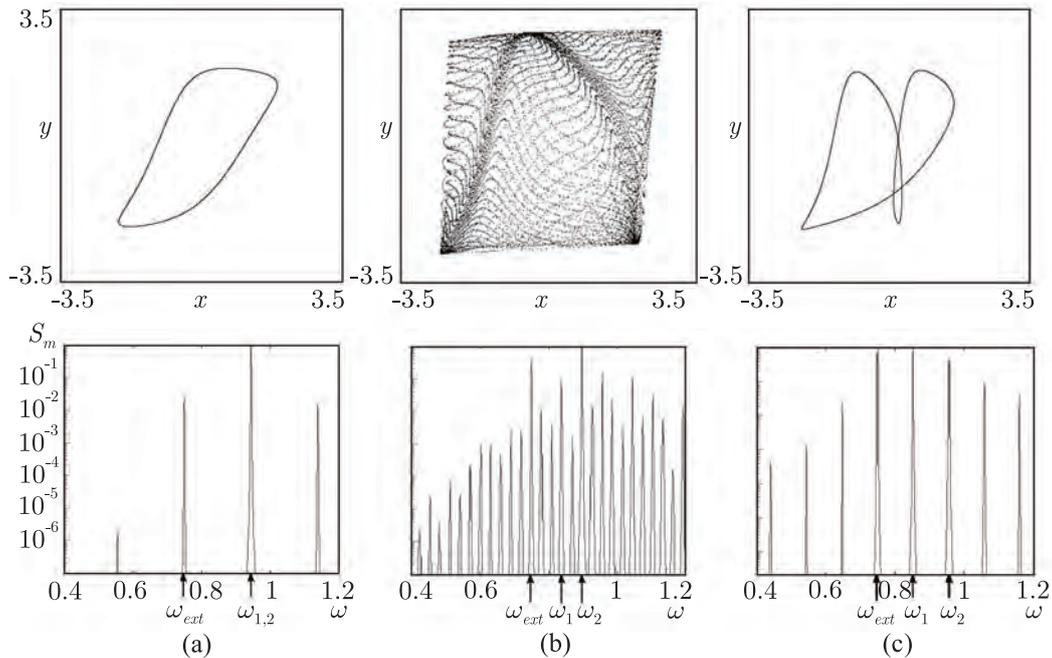


Рис. 4. Фигуры Лиссажу системы (1.1) на плоскости (x, y) и Фурье-спектры. Значения параметров осцилляторов: $\lambda = 1, \mu = 0.1, \Delta = 0.1$ и а) двухчастотный тор $\Omega = -0.25, B = 0.15$; б) трехчастотный тор $\Omega = -0.25, B = 0.45$; в) двухчастотный резонансный тор $\Omega = -0.25, B = 0.5$.

Случай, показанный на рисунке 4с, относится к резонансному двухчастотному тору, который возникает на поверхности трехчастотного. На фигуре Лиссажу в этом случае имеются две точки поворота по вертикали и одна по горизонтали, что соответствует числу вращения $w = \frac{1}{2}$. Пик на частоте ω_1 располагается точно посередине между частотой воздействия ω_{ext} и частотой ω_2 :

$$\frac{\omega_1 - \omega_{ext}}{\omega_2 - \omega_{ext}} = \frac{1}{2}, \tag{4.1}$$

что соответствует числу вращения $w = \frac{1}{2}$. При этом при движении по плоскости параметров в пределах данного языка частоты ω_1 и ω_2 меняются, но соотношение (4.1) сохраняется, что и отвечает *резонансному характеру* такого тора.

5. Плоскость параметров возбуждаемых связанных осцилляторов Ван дер Поля

Для визуализации картины (аналогичной рис. 1) для исходной системы (1.1) используем построение карт ляпуновских показателей. С этой целью вычисляем два старших ляпуновских показателя Λ_1, Λ_2 системы (1.1) в каждой точке плоскости параметров.¹ Затем эту плоскость окрашиваем в разные цвета в соответствии с величинами двух показателей, чтобы визуализировать следующие режимы:

¹Отметим, что система (1.1) имеет также и один дополнительный нулевой показатель, связанный с движением по аттрактору, который при анализе следует отбросить.



1. P : $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$ — периодический режим (точный захват фаз);
2. T_2 : $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 < 0$ — двухчастотный квазипериодический режим;
3. T_3 : $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$ — трехчастотный квазипериодический режим;
4. C : $\Lambda_1 > 0$ — хаос.

Такая карта для системы (1.1) показана на рисунке 5. Соответствие цветов дано в пояснении к рисунку.

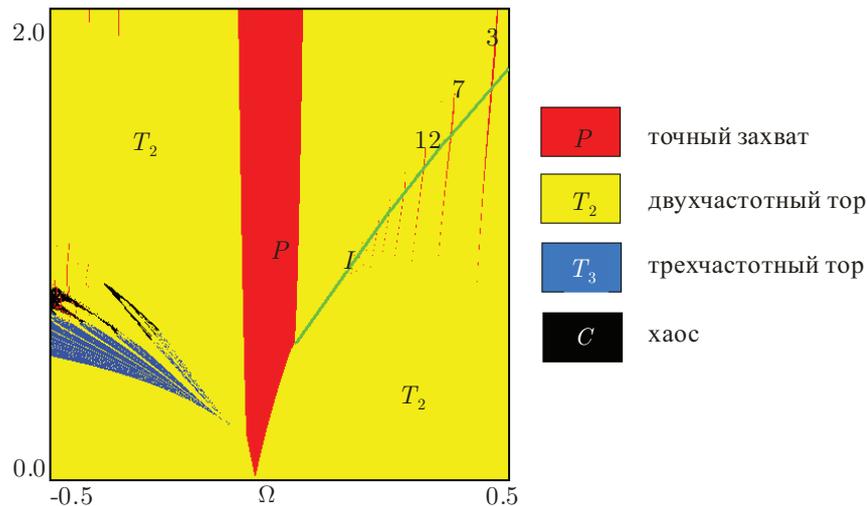


Рис. 5. Карта ляпуновских показателей системы (1.1). Значения параметров осцилляторов: $\lambda = 1$, $\mu = 0.1$ и $\Delta = 0.1$. Цифрами показаны периоды некоторых высших резонансов в стробоскопическом сечении; I — линия, отвечающая подавлению колебаний первого осциллятора внешней силой (см. рис. 9, 10 и соответствующее обсуждение).

Можно видеть, что некоторые черты, выявленные в рамках фазового приближения, сохраняются и в случае больших управляющих параметров, однако возникают и определенные отличия. Так, характерная для низкочастотной точки SNF картина областей сохраняется. Однако в верхней части области трехчастотных торов возникают, хотя и незначительные, области хаоса, невозможные в фазовой системе. С другой стороны, характерная для фазового приближения картина областей в окрестности высокочастотной точки SNF полностью разрушается. В этом случае на смену трехчастотной области приходят двухчастотные режимы со встроенной системой очень узких языков полной синхронизации высоких периодов: 3, 7, 12 и т. д.

Карту ляпуновских показателей полезно дополнить анализом бифуркаций, отвечающих за разрушение полной синхронизации. Как мы отмечали, в случае фазового приближения это линии седло-узловых бифуркаций состояний равновесия двух типов, которые могут пересекаться в специфических точках коразмерности два SNF . Для исходной системы (1.1) наблюдаются бифуркации соответствующих периодических режимов. При этом аналогичная фазовому приближению терминология может быть отнесена к сечению Пуанкаре. Картина бифуркаций системы (1.1) представлена на рисунке 6а, а на рисунках 6б, с показаны увеличенные фрагменты, отвечающие как раз областям, для которых в рамках фазового приближения наблюдались точки SNF — низкочастотная и высокочастотная. Для удобства

сопоставления со случаем фазового приближения, для системы (1.1) мы будем говорить о бифуркациях состояний равновесия предельных циклов в сечении Пуанкаре.

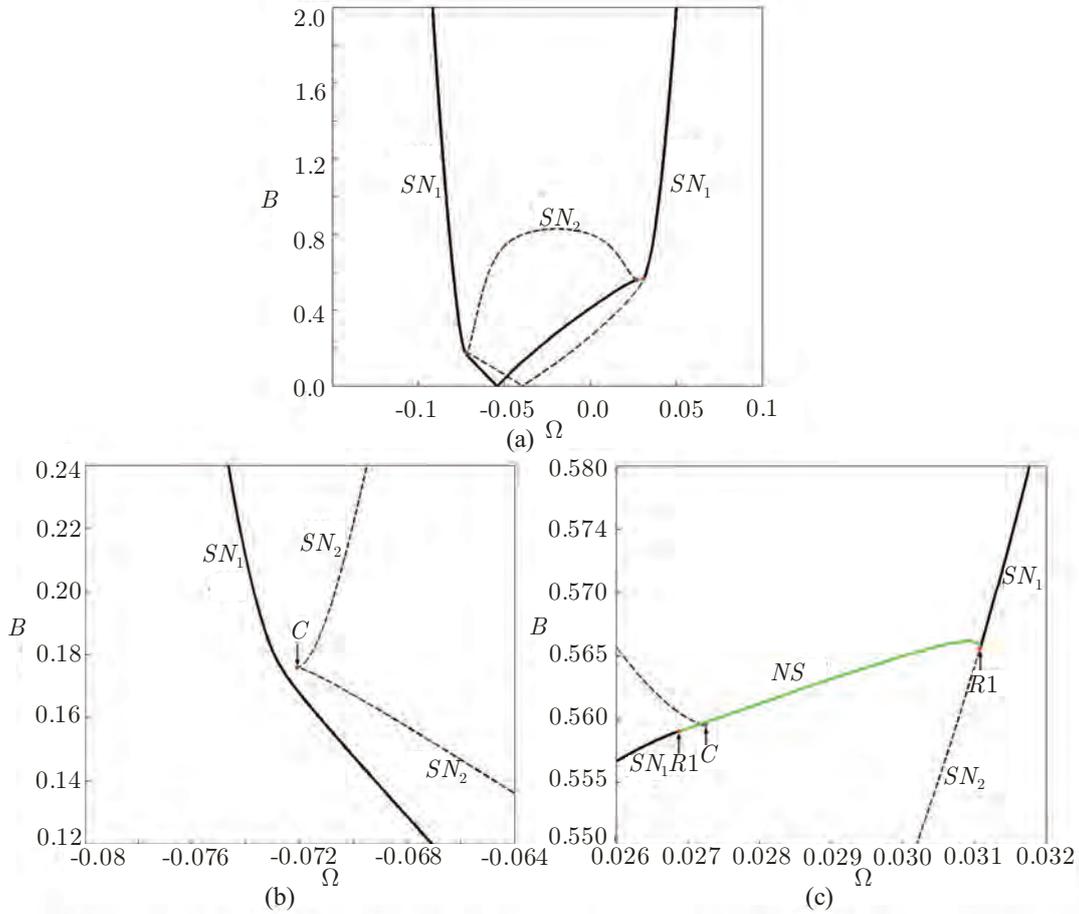


Рис. 6. Бифуркационные линии и точки системы (1.1) на плоскости (Ω, b) , $\lambda = 1$, $\mu = 0.1$, $\Delta = 0.1$. Сплошные линии отвечают бифуркациям устойчивых режимов, пунктирные — неустойчивых. Буквами обозначены: SN — линии седло-узловых бифуркаций, SN_1 отвечает слиянию устойчивого узла и седла, SN_2 — неустойчивого узла и седла, C — точка сборки неустойчивых равновесий, NS — линия Неймарка-Сакера, $R1$ — резонанс 1 : 1.

Обратимся сначала к низкочастотной области. Бифуркационный анализ выявляет следующие особенности картины. Область полной синхронизации системы (1.1) ограничена линиями седло-узловой бифуркации SN_1 , на которой сливаются устойчивый узел и седло. При этом в крупных масштабах на рисунке 6а при $B \approx 0.18$ и $\Omega \approx -0.072$ можно видеть «излом», который визуальнo ассоциируется с точкой SNF в фазовых уравнениях. Это, на первый взгляд, подтверждается и картиной характерных двух- и трехчастотных режимов на ляпуновской карте (рис. 5). Однако в увеличенном масштабе на рисунке 6б обнаруживается, что линия седло-узловой бифуркации устойчивого равновесия, обозначенная как SN_1 , является единственной и плавной. Таким образом, картины пересечения под конечным углом двух разных линий седло-узловых бифуркаций, как это происходит в фазовой системе на рисунке 1, не наблюдается.

Рисунок 6б иллюстрирует в деталях, как происходит разрушение картины, характерной для фазового приближения. В исходной системе (1.1) вырождение, отвечающее фазовой

системе, когда на линиях SNP_1 и SNP_2 (рис. 1) одновременно сливаются четыре равновесия (два седла, устойчивый и неустойчивый узлы), снимается. Соответственно, при уменьшении частоты Ω на рисунке 6b сначала происходит седло-узловая бифуркация неустойчивых состояний равновесия (седло и узел) SN_2 , и лишь затем — аналогичная бифуркация устойчивого узла и седла SN_1 . Ситуация, характерная для точки SNF , когда все четыре равновесия стягиваются в одну точку, также исчезает. Вместо этого на рисунке 6b возможна точка сборки C , когда в одну точку стягиваются два седла и неустойчивый узел. Однако она не лежит на границе области полной синхронизации, а расположена внутри нее. Ниже точки C располагается другая ветвь линии SN_2 , что заменяет ситуацию характерного для фазового уравнения перехода от линии SNP_1 к SNP_2 на рисунке 1.

Таким образом, точка SNF и характерная картина бифуркаций состояний равновесия в ее окрестности имеет место для фазовой системы, а в исходной системе на мелких масштабах разрушается.

Если перейти к высокочастотной области, для которой характерна для фазовой системы картина разрушена уже полностью, то можно отметить и существенные изменения картины бифуркаций, хотя визуально на рисунке 6a также можно все еще видеть характерный «излом». В мелких масштабах на рисунке 6c выявляются следующие детали. Линия седло-узловых бифуркаций, являющаяся нижней границей языка полной синхронизации, локально превращается в небольшой отрезок линии Неймарка–Сакера NS , ограниченный точками бифуркаций коразмерности два $R1$ — резонансов $1 : 1$. В этой окрестности также наблюдается точка сборки на основе неустойчивых режимов. Таким образом, в высокочастотной области картина бифуркаций уже совершенно не соответствует точке SNF , что в данном случае наглядно подтверждается и ляпуновской картой на рисунке 5.

6. Механизмы синхронизации и ее разрушения

Обсудим возможные сценарии изменения колебательных режимов в соответствии с представленной на рисунке 5 картой. Иллюстрации удобно проводить в стробоскопическом сечении, поскольку для них визуально можно оценить тип наблюдаемого режима.

Первая серия (рис. 7) показывает эволюцию стробоскопических сечений на плоскости координат и фаз осцилляторов в низкочастотной области, если отстройка частоты сигнала невелика. При этом фиксируем частоту сигнала $\Omega = -0.1$, выбрав небольшое ее значение, и постепенно увеличиваем амплитуду сигнала. При малой амплитуде наблюдается взаимный захват осцилляторов с числом вращения $w = \frac{1}{1}$ (рис. 7a). При увеличении амплитуды возникают режимы трехчастотной квазипериодичности (рис. 7b), чередующиеся с резонансными двухчастотными режимами разного порядка (рис. 7c, d). Наиболее широкое «окно» отвечает резонансному тору с числом вращения $w = \frac{1}{2}$ (рис. 7c). С ростом амплитуды можно наблюдать окна резонансных торов с числами вращения $w = \frac{1}{N}$. Так, на рисунке 7d представлен пример с $w = \frac{1}{6}$. В этом случае область «сгущения» траекторий появляется как на фазовом портрете первого осциллятора, так и на фазовой диаграмме. При некотором пороговом значении амплитуды воздействия из этого сгущения возникает инвариантная кривая (рис. 7e). Динамика фаз при этом перестраивается так, что наблюдается режим захвата первого осциллятора внешней силой, так что число вращения становится $w = \frac{0}{1}$. Заметим, что вблизи порога такого перехода колебания первого осциллятора происходят вблизи орбиты автономной системы, так что внешнее воздействие возмущает в основном

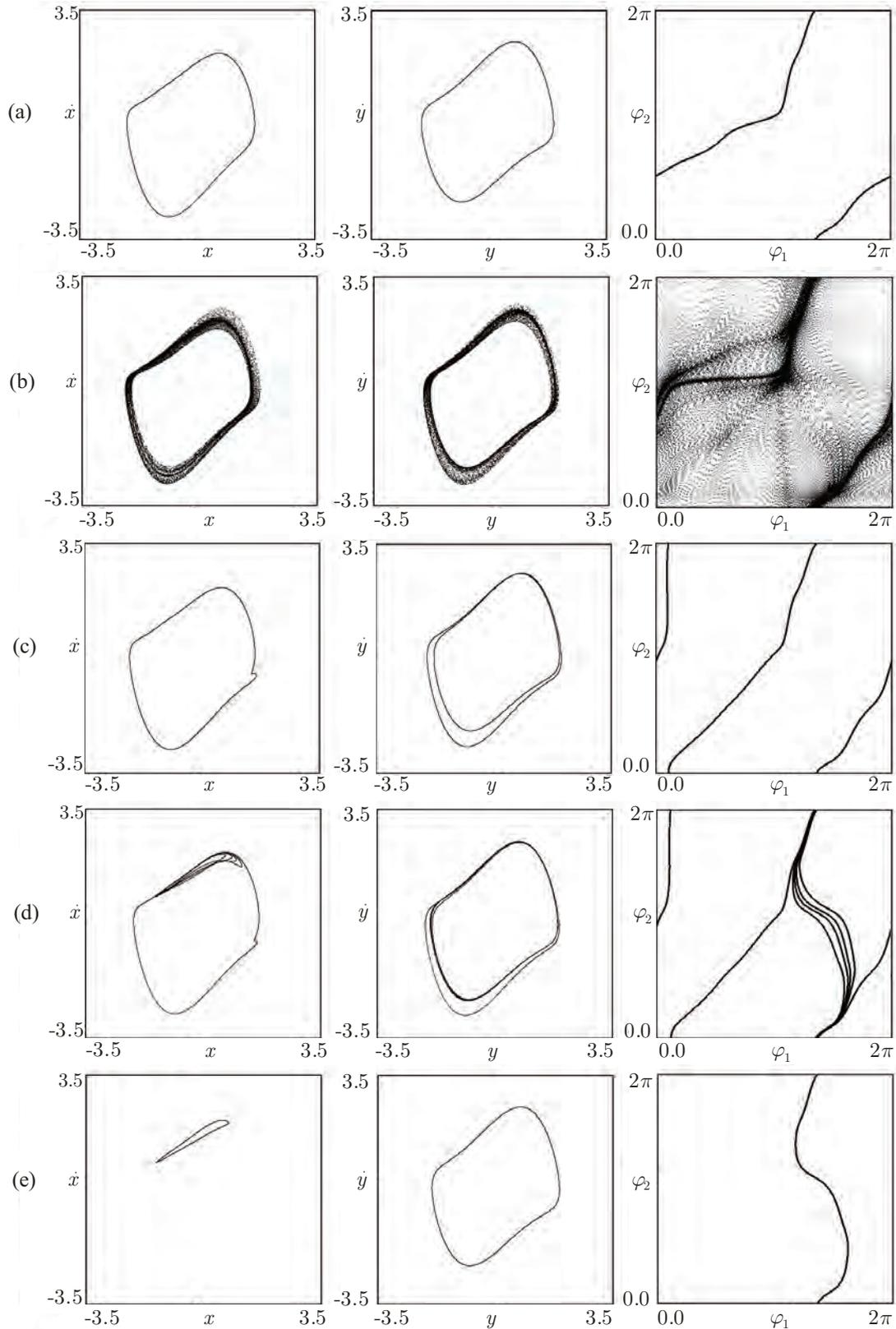


Рис. 7. Эволюция портретов первого и второго осцилляторов и их фаз в стробоскопическом сечении при $\Omega = -0.1$, $\lambda = 1$, $\mu = 0.1$, $\Delta = 0.1$ с ростом амплитуды сигнала: а) $B = 0.212$, б) $B = 0.21284$, с) $B = 0.213$, д) $B = 0.2155$, е) $B = 0.216$.

его фазу. Соответственно, в случае (е) имеет место и неустойчивая инвариантная кривая. Столкновение с ней и приводит к возникновению режимов типа (d). Таким образом, в этом случае наблюдается сценарий, качественно аналогичный фазовому приближению.

Изменим теперь частоту сигнала, увеличив (в отрицательную область) частотную отстройку, так что $\Omega = -0.45$. Это значение достаточно большое и близко к «обрезу» карты на рисунке 5. В этом случае области трехчастотных и резонансных двухчастотных торов захватывают довольно большие значения амплитуды сигнала, в результате чего можно наблюдать режимы, не реализуемые в фазовом приближении. Примеры представлены на рисунке 8. Рисунок 8а демонстрирует в первом осцилляторе *удвоенный тор*, который невозможен в фазовых уравнениях. Интересная особенность картины состоит в том, что одна ветвь инвариантной кривой охватывает начало координат, а вторая — нет. Это отражается в устройстве соответствующей фазовой диаграммы в правой колонке. На рисунке 8b представлен хаотический режим. Можно видеть, что фазовый портрет первого осциллятора сильно разрушен, в то время как для второго портрет возмущен не очень сильно.

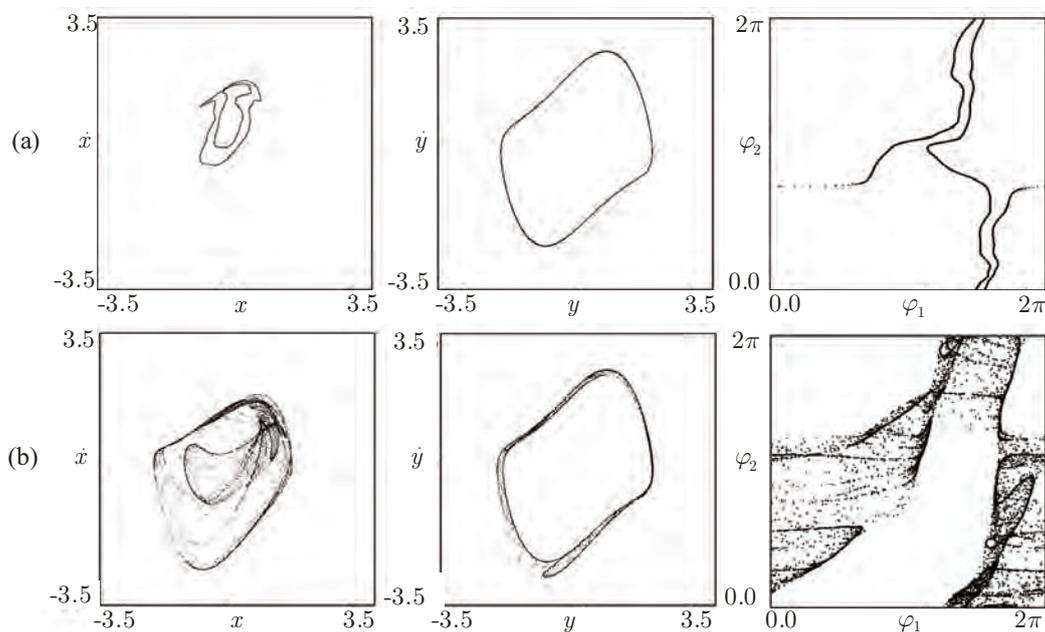


Рис. 8. Примеры портретов первого и второго осцилляторов и их фаз в стробоскопическом сечении при $\Omega = -0.45$, $\lambda = 1$, $\mu = 0.1$, $\Delta = 0.1$: а) $B = 0.947$, б) $B = 0.75$.

Перейдем теперь к высокочастотной области (рис. 9). Фиксируем частоту сигнала $\Omega = 0.25$. В этом случае с ростом амплитуды воздействия трехчастотные режимы не возникают. Тем не менее, наблюдается переход от режима захвата относительной фазы к захвату внешней силой первого осциллятора. Этот переход осуществляется в результате другого механизма. С ростом амплитуды воздействия инвариантная кривая первого осциллятора уменьшается в размере (переход от рис. 9а к рис. 9б). Затем наступает момент, когда она перестает охватывать начало координат (рис. 9с). На плоскости фаз при этом происходит «перезамыкание» ветвей притягивающей инвариантной кривой, с переходом к виду, характерному для захвата первого осциллятора (рис. 9с). Таким образом, захват первого осциллятора происходит через *подавление автоколебаний* за счет большой амплитуды внешней силы.

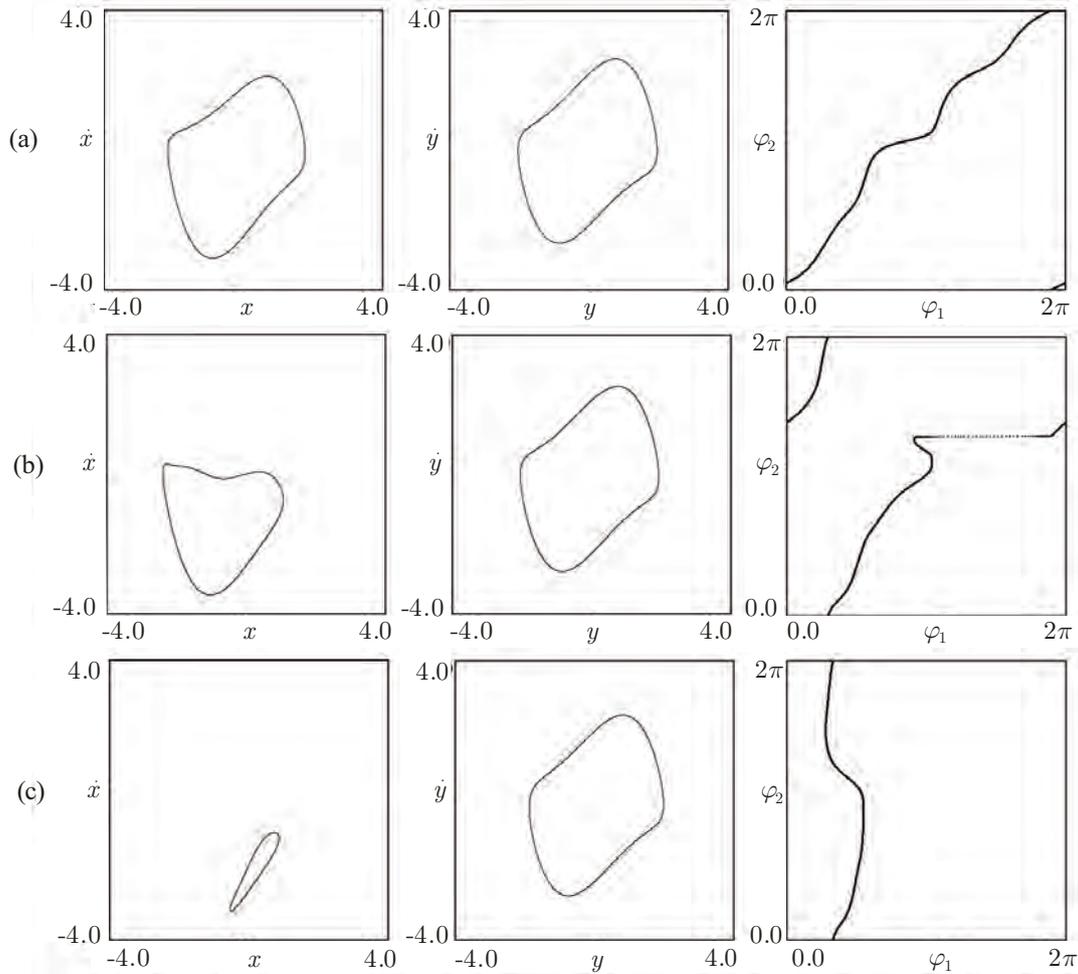


Рис. 9. Эволюция портретов первого и второго осцилляторов и их фаз в стробоскопическом сечении при $\Omega = 0.25$ с ростом амплитуды сигнала: а) $B = 0.5$, б) $B = 1.161$, в) $B = 1.25$. $\lambda = 1$. $\mu = 0.1$.

Рисунок 10 иллюстрирует эволюцию фазового портрета первого осциллятора, отвечающую этому механизму. На рисунке показано, как сосуществуют фазовые портреты аттрактора и инвариантная кривая в стробоскопическом сечении для этого осциллятора. Сначала амплитуда собственных колебаний осцилляторов возмущена не очень сильно (рис. 10а). С ростом амплитуды воздействия возмущение орбиты первого осциллятора возрастает и становится настолько сильным, что изображающая точка начинает посещать начало координат. Инвариантная кривая в стробоскопическом сечении проходит через начало координат (рис. 10б). С дальнейшим ростом внешней силы траектории снова уходят из окрестности начала координат, но теперь инвариантная кривая не охватывает начало координат (рис. 10с). Возникает ситуация, когда внешняя сила существенно подавляет собственные автоколебания первого осциллятора, возмущая не только их фазу, но и амплитуду.

Отметим, что в определенной мере аналогичный механизм реализуется и в возбуждаемом внешней силой одиночном осцилляторе, однако в очень узком диапазоне изменения параметров. (См. п. 7.2.2 в [1] и соответствующее обсуждение.) В случае двух осцилляторов такие режимы занимают значительную часть плоскости параметров. Положение линии I , отвечающей моменту прохождения инвариантной кривой через начало координат, в высоко-

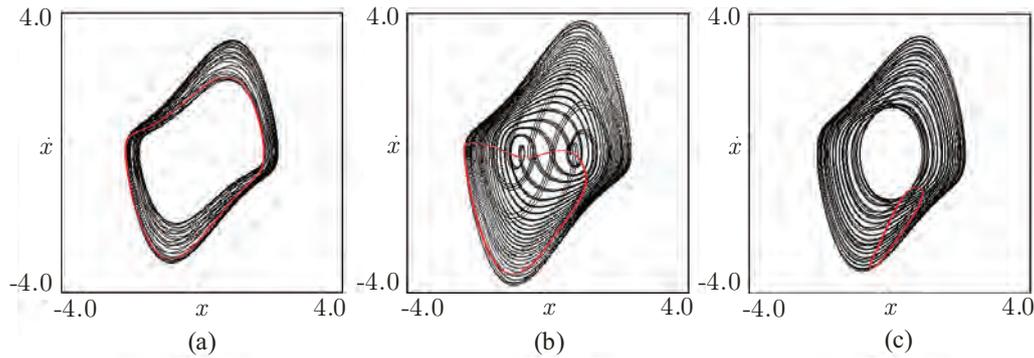


Рис. 10. Фазовые портреты первого осциллятора и инвариантные кривые в стробоскопическом сечении (показаны красным цветом): а) $B = 0.5$, б) $B = 1.161$, в) $B = 1.25$, $\Omega = 0.25$. $\lambda = 1$. $\mu = 0.1$.

частотной области показано на рисунке 5 зеленым цветом. Выше нее наблюдаются режимы, аналогичные показанным на рисунке 10с. Причина столь значительного размера области таких режимов состоит в наличии второго осциллятора: он своими колебаниями разрушает точный захват первого осциллятора внешней силой.

7. Заключение

Синхронизация системы осцилляторов, способных в отсутствие внешнего сигнала демонстрировать двухчастотные колебания, характеризуется своими, специфическими сценариями эволюции динамических режимов. В случае задачи о возбуждении двух связанных осцилляторов Ван дер Поля наблюдаются некоторые черты, выявленные ранее для фазовой модели, однако возникают и существенные отличия. При исследованных в работе значениях параметров в низкочастотной области наблюдается характерная для фазового приближения картина областей двух- и трехчастотных торов, а также аналогичные механизмы перехода от взаимного захвата осцилляторов к захвату только первого осциллятора внешней силой. При этом, однако, ассоциирующаяся с возникновением трехчастотных режимов бифуркационная точка коразмерности два разрушается. Также модифицируется и типичная для фазовой системы картина бифуркаций состояний равновесия в ее окрестности. При уменьшении частоты сигнала возникают отсутствующие в фазовой системе эффекты: появление хаоса и удвоенных двухчастотных торов. В высокочастотной области картина, характерная для фазовой модели, уже полностью разрушается. Трехчастотные режимы вообще невозможны, а переход к синхронизации первого осциллятора внешней силой происходит в результате другого механизма, связанного с подавлением собственных автоколебаний автономной системы. В отличие от случая одиночного осциллятора, такой режим реализуется в значительном диапазоне частоты и амплитуды воздействия. Возникает также система языков полной синхронизации высших порядков, которым отвечают различные значения периодов, определенных в стробоскопическом сечении.

Список литературы

- [1] Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
- [2] Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 359 с.



- [3] Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 495 с.
- [4] Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 352 с.
- [5] Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves, and turbulence. (Springer Ser. Synergetics, vol. 19.) Berlin: Springer, 1984. 156 pp.
- [6] Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу: Ритмы жизни. М.: Мир, 1991. 248 с. [Glass L., MacKey M. C. From clocks to chaos: The rhythms of life. Princeton, NY: Princeton Univ. Press, 1988. 248 pp.]
- [7] Winfree A. The geometry of biological time. 2nd ed. New York: Springer, 2001. 777 pp.
- [8] Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е, Стрелкова Г. И. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2008. 144 с.
- [9] Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // Chaos, 2008, vol. 18, 037123, 7 pp.
- [10] Анищенко В. С., Николаев С. М. Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 1, с. 39–55.
- [11] Анищенко В. С., Николаев С. М. Синхронизация квазипериодических колебаний с двумя частотами // Изв. вузов. ПНД, 2008, т. 16, № 2, с. 69–86.
- [12] Anishchenko V., Astakhov V., Vadivasova T. Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // Europhys. Lett., 2009, vol. 86, 30003.
- [13] Анищенко В. С., Астахов С. В., Вадивасова Т. Е., Феоктистов А. В. Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 2, с. 237–252.
- [14] Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Синхронизация квазипериодических колебаний связанных фазовых осцилляторов // Письма в ЖТФ, 2010, т. 36, № 10, с. 73–80.
- [15] Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Фазовая динамика возбуждаемых квазипериодических автоколебательных осцилляторов // Изв. вузов. ПНД, 2010, т. 18, № 4, с. 17–32.
- [16] Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R. S. Three coupled oscillators: Mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // Phys. D, 1991, vol. 49, pp. 387–475.
- [17] Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Синхронизация и многочастотные колебания в цепочке фазовых осцилляторов // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 693–717.

Forced synchronization of two coupled van der Pol self-oscillators

Alexander P. Kuznetsov¹, Igor R. Sataev², Ludmila V. Turukina³

^{1,2,3}Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch
Zelyenaya 38, Saratov, 410019, Russia

¹apkuz@rambler.ru, ²sataevir@rambler.ru, ³lvtur@rambler.ru

The problem of external driving by the harmonic signal of two coupled self-oscillators is investigated. Comparison with the synchronization picture for phase oscillators is given. We discuss the configuration of periodic, two- and three-frequency regimes in the parameter space of external signal. The illustrations of three-frequency tori and resonance two-frequency tori are given. A number of significant differences from the bifurcation mechanisms for the destruction of synchronization are found compared with the case of phase oscillators.

MSC 2010: 39Axx, 93D05

Keywords: synchronization, bifurcations, quasi-periodic dynamics, chaos

Received July 4, 2011, accepted August 9, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 411–425 (Russian)