



УДК: 517.9:534.1  
MSC 2010: 34C15

## О глобальном поведении решений системы двух уравнений Дюффинга – Ван дер Поля

Р. Е. Кондрашов, А. Д. Морозов

Рассматривается задача о глобальном поведении решений системы двух уравнений Дюффинга – Ван дер Поля, близких к нелинейным интегрируемым. В областях, не содержащих невозмущенных сепаратрис, приводятся частично усредненные системы, описывающие поведение решений исходной системы в резонансных зонах. Устанавливается ограниченность числа нетривиальных резонансных структур. Приводятся полностью усредненные системы, определяющие поведение решений вне окрестностей нетривиальных резонансных структур. Приводятся численные результаты исследования этих систем.

Ключевые слова: предельные циклы, резонансы, усреднение

### 1. Введение

Одним из основных уравнений в теории колебаний является уравнение Дюффинга. Важную роль играют также автоколебательные, по терминологии Андронова, уравнения и наиболее популярное среди них уравнение Ван дер Поля. Воздействие периодического по времени возмущения на автоколебательную систему приводит к явлению, которое называют синхронизацией колебаний [1]. Это явление изучалось для квазилинейных систем с  $3/2$ , двумя и большим числом степеней свободы (см., например, [2]). В последние годы проведено глобальное исследование систем, близких к двумерным нелинейным гамильтоновым [3, 4], и, в частности, изучено явление синхронизации колебаний. Однако до сих пор отсутствует пример системы двух слабосвязанных нелинейных осцилляторов, для которой

---

Получено 31 марта 2011 года  
После доработки 15 июля 2011 года

---

Данная работа поддержана РФФИ, грант № 09-01-00356, ФЦП «Кадры», № НК-13П-13, а также правительством РФ, грант № 111.G34.31.0039.

---

Кондрашов Роман Евгеньевич  
[romicmmf2006@rambler.ru](mailto:romicmmf2006@rambler.ru)  
Морозов Альберт Дмитриевич  
[morozov@mm.unn.ru](mailto:morozov@mm.unn.ru)

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23



была бы решена подобная задача. Решение этой задачи приводит к изучению резонансных структур. В данной работе делается попытка восполнить этот пробел на примере системы двух уравнений Дюффинга – Ван дер Поля.

Работа является непосредственным продолжением работ [5, 6]. В [5] рассматриваются неконсервативные системы с двумя степенями свободы общего вида, близкие к нелинейным интегрируемым; приводится трехмерная усредненная в резонансном случае система; проведено исследование резонансных структур для модельной усредненной системы. Наряду с периодическими решениями найдены нерегулярные притягивающие множества. В [6] начато исследование системы двух слабосвязанных уравнений Дюффинга – Ван дер Поля. Получена система первого приближения и проведено ее исследование. Рассмотрена задача о существовании гомоклинической структуры Пуанкаре. В данной работе продолжено исследование этой системы.

Итак, рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\ddot{x} + x + \beta x^3 &= \varepsilon[(p_1 - x^2)\dot{x} + p_2 y], \\ \ddot{y} + y + \gamma y^3 &= \varepsilon[(p_3 - y^2)\dot{y} + p_4 x],\end{aligned}\tag{1.1}$$

где  $\beta, \gamma, p_1, p_2, p_3, p_4$  — параметры,  $\varepsilon$  — малый положительный параметр. Рассмотрим два случая: 1)  $\beta = 1, \gamma = 1$  (у невозмущенных нелинейных уравнений отсутствуют сепаратрисы), 2)  $\beta = -1, \gamma = 1$  (у первого невозмущенного уравнения имеются сепаратрисы). В обоих случаях невозмущенные уравнения имеют ячейку, заполненную замкнутыми фазовыми кривыми.

Уравнения (1.1) играют фундаментальную роль в теории нелинейных колебаний. Однако мы до сих пор далеки от понимания того, как ведут себя их решения. Как мы упомянули выше, наиболее продвинуто исследование квазилинейных систем, которые отличаются от рассматриваемой существенно нелинейной системы. Много работ, в которых проводится численное исследование подобных систем (см., например, [7], а также ссылки в [6]). Как известно, в невозмущенных линейных системах частоты постоянные и колебания изохронны. В рассматриваемом случае невозмущенные уравнения нелинейные и частоты не являются постоянными. Это приводит к наличию бесконечного множества резонансов. Кроме этого, решения таких уравнений не являются гармоническими, а представляются через эллиптические функции (иначе говоря, представляются в виде специальных тригонометрических рядов). При использовании метода усреднения это приводит к значительным трудностям в вычислении усредненных систем. Наконец, невозмущенные уравнения могут иметь ячейки, заполненные замкнутыми фазовыми кривыми, в границу которых входят сепаратрисы и состояния равновесия типа седло. Указанные факты привели к тому, что для связанных уравнений ( $\varepsilon \neq 0$ ) до сих пор отсутствует более или менее удовлетворительный глобальный анализ. В связи с этим нами предпринята попытка продвинуть исследование системы (1.1). Как было упомянуто выше, мы опираемся на работы [5, 6], а также на ранние работы [8, 9]. Ссылки на работы по этой тематике можно найти в [4].

Будем говорить, что в системе (1.1) имеет место резонанс, если

$$p\omega_1(h_1) = q\omega_2(h_2),\tag{1.2}$$

где  $\omega_1, \omega_2$  — частоты невозмущенных нелинейных осцилляторов,  $p, q$  — взаимно простые целые числа, а  $h_1, h_2$  — значения интегралов энергии

$$\dot{x}^2/2 + x^2/2 + \beta x^4/4 = h_1, \quad \dot{y}^2/2 + y^2/2 + \gamma y^4/4 = h_2\tag{1.3}$$



невозмущенных уравнений Дюффинга

$$\ddot{x} + x + \beta x^3 = 0, \quad \ddot{y} + y + \gamma y^3 = 0 \quad (1.4)$$

соответственно. Заметим, что  $(h_1, h_2) \in D$ , где  $D = \Delta_1 \times \Delta_2$ ,  $\Delta_1 = (0, \infty)$ ,  $\Delta_2 = (0, \infty)$  в случае 1 и  $\Delta_1 = (0, 0.25)$ ,  $\Delta_2 = (0, \infty)$  в случае 2. В работе [6] приводятся выражения для  $w_1(h_1)$ ,  $w_1(h_2)$ , а также графики резонансных кривых (1.2) на «энергетической» плоскости.

Отметим, что при отсутствии связи в (1.1) имеем два уравнения, в которых могут существовать устойчивые предельные циклы [6]. При наличии таких циклов в четырехмерном фазовом пространстве системы (1.1) существует устойчивый двумерный инвариантный тор с условно периодическим движением на нем. Учет связи ( $p_2 \neq 0, p_4 \neq 0$ ), как правило, приводит в резонансном случае к разрушению тора и существованию устойчивого периодического решения. В этом случае говорят о синхронизации колебаний.

Переходя в системе (1.1) к переменным действие  $I$ ,  $J$ -угол  $\vartheta, \varphi$ , вводя в резонансном случае резонансную фазу  $\vartheta = v - (q/p)\varphi$  и усредняя полученную систему по быстрой переменной  $\varphi$ , приходим к трехмерной частично усредненной системе (ЧУС) [6]. Далее, следуя [5], ЧУС преобразуется к более удобному виду. Отметим, что в [6] была получена усредненная система первого приближения и, следуя [4], указана структура системы второго приближения. Резонансы, для которых система первого приближения имеет простые состояния равновесия, были названы нетривиальными (нетривиальные резонансные структуры). В этом случае у исходной системы существуют резонансные периодические решения.

Мы вычислим правые части ЧУС второго приближения и покажем, что в областях, не содержащих невозмущенных сепаратрис, число нетривиальных резонансов ограничено. Далее, используя полностью усредненную систему (ПУС), которая получается из (1.1) после перехода к переменным действие-угол и усреднения по угловым координатам, установим глобальное поведение решений. Итак, если зафиксировать точку  $M$  на плоскости  $(h_1, h_2)$  и, соответственно, по одной точке на замкнутых фазовых кривых (1.3) и начать интегрировать систему (1.1), то фазовая точка начнет движение по соответствующей фазовой кривой. Если точка  $M$  не принадлежит окрестности резонансной точки, для которой ЧУС имеет простые состояния равновесия, то движение будет определяться траекторией ПУС. В противном случае движение будет определяться ЧУС. В зависимости от поведения фазовых кривых ЧУС различают: проходимые, частично проходимые и непроходимые резонансы [4].

## 2. Частично усредненная система

Система (1.1) в  $\sqrt{\varepsilon}$ -окрестности точки  $(I_{pq}, J_{pq})$  (или, в других обозначениях, — в окрестности точки  $(h_{1pq}, h_{2pq})$ ) резонансной кривой (1.2) преобразуется к следующему виду [5]:

$$\begin{aligned} v' &= w + \mu[a_{20}u^2 + a_{02}w^2 + a_{11}wu], \\ w' &= A(v; I_{pq}, J_{pq}) + \mu[C_1(v; I_{pq}, J_{pq})u + C_2(v; I_{pq}, J_{pq})w], \\ u' &= A_1(v; I_{pq}, J_{pq}) + \mu[C_3(v; I_{pq}, J_{pq})u + C_4(v; I_{pq}, J_{pq})w], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где «штрих» означает производную по «медленному» времени  $\tau = \mu t$ ,  $\mu = \sqrt{\varepsilon}$ ,  $A = b_{10}A_1 + b_{20}A_2$ ,  $a_{20} = b_{11} + b_{21}b_{10}^2/b_{20}^2$ ,  $a_{02} = b_{21}/b_{20}^2$ ,  $a_{11} = -2(b_{21}b_{10}/b_{20}^2)$ ,  $b_{1j} = (d^{j+1}\omega_1(I_{pq})/dI^{j+1})/(j+1)!$ ,  $b_{2j} = (q/p)(d^{j+1}\omega_2(J_{pq})/dJ^{j+1})/(j+1)!$ ,  $j = 0, 1$ . Функции  $A_k(v; I_{pq}, J_{pq})$ ,  $k = 1, 2$ , были вычислены в [6]. Фазовым пространством системы (2.1) является полноторий  $Q \times v \pmod{2\pi/p}$ , где  $Q$  — область изменения переменных  $w, u$ .

В данной работе мы вычислим функции  $C_m(v; I_{pq}, J_{pq})$ ,  $m = 1, \dots, 4$ , определяющие второе приближение. Прежде заметим, что  $A_k(v; I_{pq}, J_{pq}) = \tilde{A}_k(v; I_{pq}, J_{pq}) + B_k$ , причем функции  $\tilde{A}_k(v; I_{pq}, J_{pq})$  представляются в виде тригонометрических рядов, в которых преобладает первая гармоника,  $B_1 = B_1(I_{pq})$ ,  $B_2 = B_2(J_{pq})$ . Оставляя главные гармоники в функциях  $A_k(v; I_{pq}, J_{pq})$ ,  $C_m(v; I_{pq}, J_{pq})$ , придем к следующим выражениям<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} A &= c_{01} \begin{pmatrix} \sin(pv) \\ \cos(pv) \end{pmatrix} + c_{02}, & A_1 &= c_{03} \begin{pmatrix} \sin(pv) \\ \cos(pv) \end{pmatrix} + c_{04}, \\ C_1 &= c_{11} \begin{pmatrix} \sin(pv) \\ \cos(pv) \end{pmatrix} + c_{12}, & C_2 &= c_{21} \begin{pmatrix} \sin(pv) \\ \cos(pv) \end{pmatrix} + c_{22}, \\ C_3 &= c_{31} \begin{pmatrix} \sin(pv) \\ \cos(pv) \end{pmatrix} + c_{32}, & C_4 &= c_{41} \begin{pmatrix} \sin(pv) \\ \cos(pv) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{01} &= \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix} 4\pi^2 (b_{10} p_2 p + b_{20} p_4 q) A_{10}(k_{1pq}) A_{20}(k_{2pq}), \\ c_{02} &= b_{10} B_1(k_{1pq}) + b_{20} B_2(k_{2pq}), \\ c_{03} &= \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix} 4\pi^2 p_2 A_{10}(k_{1pq}) A_{20}(k_{2pq}) p, \\ c_{04} &= B_1(k_{1pq}), \\ c_{11} &= \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix} 4\pi^2 (b_{10} p_2 p + b_{20} p_4 q) \left[ \frac{dA_{10}(k_{1pq})}{dI} A_{20}(k_{2pq}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b_{10}}{b_{20}} \frac{dA_{20}(k_{2pq})}{dJ} A_{10}(k_{1pq}) \right], \\ c_{12} &= b_{10} \left( \frac{dB_1(k_{1pq})}{dI} - \frac{dB_2(k_{2pq})}{dJ} \right), \\ c_{21} &= \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} 4\pi^2 p_2 p \left[ \frac{dA_{10}(k_{1pq})}{dI} A_{20}(k_{2pq}) - \frac{b_{10}}{b_{20}} \frac{dA_{20}(k_{2pq})}{dJ} A_{10}(k_{1pq}) \right], \\ c_{22} &= \sigma - \frac{dB_1(k_{1pq})}{dI}, \\ c_{31} &= \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix} 4\pi^2 p_2 p \left[ \frac{dA_{10}(k_{1pq})}{dI} A_{20}(k_{2pq}) - \frac{b_{10}}{b_{20}} \frac{dA_{20}(k_{2pq})}{dJ} A_{10}(k_{1pq}) \right], \\ c_{32} &= \frac{dB_1(k_{1pq})}{dI}, \\ c_{41} &= \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix} 4 \frac{\pi^2 p_2 p}{b_{20}} \frac{dA_{20}(k_{2pq})}{dJ} A_{10}(k_{1pq}). \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

В формулах (2.3) верхняя часть в круглых скобках соответствует случаю 1, а нижняя — случаю 2. Далее, справедливы следующие соотношения:

<sup>1</sup>Для удобства вместо  $I_{pq}, J_{pq}$  используем модули эллиптических интегралов  $k_{1pq}$  и  $k_{2pq}$  соответственно [6].

$$\left. \begin{aligned}
 B_1(k_{1pq}) &= \frac{4}{\pi(1-2k_{1pq}^2)^{5/2}} \{p_1[(1-k_{1pq}^2)(1-2k_{1pq}^2)\mathbf{K}(k_{1pq}) - (1-2k_{1pq}^2)^2\mathbf{E}(k_{1pq})]/3- \\
 &\quad - 2[(k_{1pq}^2-1)(2-k_{1pq}^2)\mathbf{K}(k_{1pq}) + 2(1-k_{1pq}^2+k_{1pq}^4)\mathbf{E}(k_{1pq})]/15\}, \\
 b_{10} &= \frac{\pi^2(1-2k_{1pq}^2)[(k_{1pq}^2-1)\mathbf{K}(k_{1pq}) + (1-2k_{1pq}^2)\mathbf{E}(k_{1pq})]}{8k_{1pq}^2\mathbf{K}^3(k_{1pq})(k_{1pq}^2-1)}, \\
 b_{11} &= \frac{1}{2} \frac{db_{10}}{dI} = \frac{\pi}{8} \frac{(1-2k_{1pq}^2)^{5/2}}{k_{1pq}\mathbf{K}} \frac{db_{10}}{dk_1}, \\
 a_1 &= \exp\left(-\pi \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-k_{1pq}^2})}{\mathbf{K}(k_{1pq})}\right), \quad a_2 = \exp\left(-\pi \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-k_{2pq}^2})}{\mathbf{K}(k_{2pq})}\right), \\
 B_2(k_{2pq}) &= \frac{4}{\pi(1-2k_{2pq}^2)^{5/2}} \{p_3[(1-k_{2pq}^2)(1-2k_{2pq}^2)\mathbf{K}(k_{2pq}) - (1-2k_{2pq}^2)^2\mathbf{E}(k_{2pq})]/3- \\
 &\quad - 2[(k_{2pq}^2-1)(2-k_{2pq}^2)\mathbf{K}(k_{2pq}) + 2(1-k_{2pq}^2+k_{2pq}^4)\mathbf{E}(k_{2pq})]/15\}, \\
 A_{10} &= \frac{a_1^{p/2}}{(1+a_1^p)\sqrt{(1-2k_{1pq}^2)\mathbf{K}(k_{1pq})}}, \quad A_{20} = \frac{a_2^{q/2}}{(1+a_2^q)\sqrt{(1-2k_{2pq}^2)\mathbf{K}(k_{2pq})}}, \\
 \sigma &= p_1 + p_3 - 2 \frac{\mathbf{E}(k_{1pq}) - (1-k_{2pq}^2)\mathbf{K}(k_{1pq})}{(1-2k_{1pq}^2)\mathbf{K}(k_{1pq})} - 2 \frac{\mathbf{E}(k_{2pq}) - (1-k_{2pq}^2)\mathbf{K}(k_{2pq})}{(1-2k_{2pq}^2)\mathbf{K}(k_{2pq})}, \\
 b_{20} &= \frac{\pi^2(1-2k_{2pq}^2)[(k_{2pq}^2-1)\mathbf{K}(k_{2pq}) + (1-2k_{2pq}^2)\mathbf{E}(k_{2pq})]}{8k_{2pq}^2\mathbf{K}^3(k_{2pq})(k_{2pq}^2-1)} \frac{q}{p}, \\
 b_{21} &= \frac{db_{10}}{dJ} = \frac{\pi}{8} \frac{(1-2k_{2pq}^2)^{5/2}}{k_{2pq}\mathbf{K}} \frac{q}{p} \frac{db_{20}}{dk_2}
 \end{aligned} \right\} \tag{2.4}$$

в случае 1 и

$$\left. \begin{aligned}
 B_1(k_{1pq}) &= \frac{4}{\pi(1+k_{1pq}^2)^{5/2}} \{p_1[(k_{1pq}^4-1)\mathbf{K}(k_{1pq}) + (1+k_{1pq}^2)^2\mathbf{E}(k_{1pq})]/3- \\
 &\quad - 2[(k_{1pq}^2-1)(2-k_{1pq}^2)\mathbf{K}(k_{1pq}) + 2(1-k_{1pq}^2+k_{1pq}^4)\mathbf{E}(k_{1pq})]/15\}, \\
 A_{10} &= \frac{a_1^{p/2}}{(1-a_1^p)\sqrt{(1+k_{1pq}^2)\mathbf{K}(k_{1pq})}}, \\
 \sigma &= p_1 + p_3 - 2 \frac{\mathbf{K}(k_{1pq}) - \mathbf{E}(k_{1pq})}{\mathbf{K}(k_{1pq})(1+k_{1pq}^2)} - 2 \frac{\mathbf{E}(k_{2pq}) - (1-k_{2pq}^2)\mathbf{K}(k_{2pq})}{(1-2k_{2pq}^2)\mathbf{K}(k_{2pq})}, \\
 b_{10} &= -\frac{\pi^2(1+k_{1pq}^2)[(k_{1pq}^2-1)\mathbf{K}(k_{1pq}) + (1+k_{1pq}^2)\mathbf{E}(k_{1pq})]}{8k_{1pq}^2\mathbf{K}^3(k_{1pq})(k_{1pq}^2-1)}, \\
 b_{11} &= \frac{db_{10}}{dJ} = \frac{\pi}{8} \frac{(1+k_{1pq}^2)^{5/2}}{k_{1pq}\mathbf{K}(1-k_{1pq}^2)} \frac{db_{10}}{dk_1}
 \end{aligned} \right\} \tag{2.5}$$



в случае 2. Здесь  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{E}$  — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода соответственно,  $k_1, k_2$  — их модули. Заметим, выражения для  $B_2, A_{20}, b_{20}, b_{21}$  в случае 2 имеют тот же вид, что и в случае 1.

В случае четных  $p$  и/или  $q$  имеем  $A(v; I_{1pq}, I_{2pq}) \equiv c_{02}$  и  $A_1(v; I_{1pq}, I_{2pq}) \equiv c_{04}$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Функции  $B_1(k_1), B_2(k_2)$  являются порождающими функциями Пуанкаре – Понтрягина [6]. Простые нули этих функций определяют грубые предельные циклы в несвязанных уравнениях ( $p_2 = p_4 = 0$ ).

### 3. Исследование ЧУС

Исследование ЧУС первого приближения не представляет труда, ибо в этом случае система интегрируемая [6]. Далее будем рассматривать ЧУС второго приближения (2.1).

#### 3.1. Состояния равновесия

Если система (2.1) не имеет состояний равновесия, то поведение фазовых кривых достаточно простое (проходимый резонанс). При выполнении условий [6]

$$\begin{aligned} p_2 p B_2(k_2, p_3) &= p_4 q B_1(k_1, p_1), \\ p \omega_1(k_1) &= q \omega_2(k_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

система (2.1) может иметь состояния равновесия. Действительно, исключая из уравнений  $A(v; I_{pq}, J_{pq}) = 0$ ,  $A_1(v; I_{pq}, J_{pq}) = 0$  функцию  $\sin pv$  в первом случае и функцию  $\cos pv$  во втором случае, приходим к выражению  $c_{01} c_{04} = c_{02} c_{03}$ , из которого вытекает первое соотношение в (3.1).

Из (3.1) находим резонансную точку  $(k_{1pq}, k_{2pq})$ , для которой система (2.1) может иметь состояния равновесия  $O_1(v_1, 0, 0)$ ,  $O_2(v_2, 0, 0)$ , где  $v_{1,2}$  — корни уравнения

$$c_{01} \begin{pmatrix} \sin(pv) \\ \cos(pv) \end{pmatrix} + c_{02} = 0. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) имеет вещественные корни, если  $|c_{01}| > |c_{02}|$ .

При  $|c_{01}| = |c_{02}|$  система первого приближения имеет сложное состояние равновесия. Тогда у двумерной системы, к которой приводит анализ системы первого приближения, существует вырожденное состояние равновесия с двумя нулевыми корнями характеристического уравнения [6], которое при изменении параметров либо исчезает, либо разваливается на два простых состояния равновесия типа седло и центр.

Далее предполагаем, что система первого приближения имеет два состояния равновесия  $O_1(v_1, 0, 0)$ ,  $O_2(v_2, 0, 0)$ .

Обратимся к системе второго приближения. Характеристическое уравнение для состояний равновесия имеет вид

$$\lambda^3 + a_2 \mu \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \mu = 0, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} a_2 &= - \left[ (c_{21} + c_{31}) \begin{pmatrix} \sin(pv_0) \\ \cos(pv_0) \end{pmatrix} + c_{22} + c_{32} \right], \\ a_1 &= pc_{01} \begin{pmatrix} \cos(pv_0) \\ -\sin(pv_0) \end{pmatrix} + \mu^2 \left[ (c_{21} \begin{pmatrix} \sin(pv_0) \\ \cos(pv_0) \end{pmatrix} + c_{22})(c_{31} \begin{pmatrix} \sin(pv_0) \\ \cos(pv_0) \end{pmatrix} + c_{32}) - c_{41} \begin{pmatrix} \sin(pv_0) \\ \cos(pv_0) \end{pmatrix} (c_{11} \begin{pmatrix} \sin(pv_0) \\ \cos(pv_0) \end{pmatrix} + c_{12}) \right], \\ a_0 &= p \begin{pmatrix} \cos(pv_0) \\ -\sin(pv_0) \end{pmatrix} \left[ (c_{01}c_{31} - c_{03}c_{11}) \begin{pmatrix} \sin(pv_0) \\ \cos(pv_0) \end{pmatrix} + c_{01}c_{32} - c_{03}c_{12} \right], \end{aligned} \tag{3.4}$$

$v_0 = v_1$  или  $v_0 = v_2$ , при этом верхняя часть в круглых скобках соответствует случаю 1, а нижняя — случаю 2. Состояние равновесия  $O_1$  является узлом–фокусом или седло–фокусом с корнями характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a_1} + \mu \frac{a_0 - a_1 a_2}{2a_1} + O(\mu^2), \quad \lambda_3 = -\mu \frac{a_0}{a_1} + O(\mu^2), \quad a_1 < 0. \tag{3.5}$$

Состояние равновесия  $O_2$  — седлового типа с вещественными корнями характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a_1} + \mu \frac{a_0 - a_1 a_2}{2a_1} + O(\mu^2), \quad \lambda_3 = -\mu \frac{a_0}{a_1} + O(\mu^2), \quad a_1 > 0. \tag{3.6}$$

Рассмотрим бифуркации состояния равновесия  $O_1$  (очевидно, состояние равновесия  $O_2$  при достаточно малых  $\mu$  не меняет тип).

1) При выполнении условия

$$p \begin{pmatrix} \cos(pv_0) \\ -\sin(pv_0) \end{pmatrix} \left[ (c_{11}c_{03} + c_{21}c_{01}) \begin{pmatrix} \sin(pv_0) \\ \cos(pv_0) \end{pmatrix} + c_{12}c_{03} + c_{22}c_{01} \right] = 0, \tag{3.7}$$

согласно (3.4), (3.5), имеем  $\text{Re } \lambda_{1,2} = 0$ . Эта бифуркация связана с возможностью рождения предельного цикла (бифуркация Андронова–Хопфа).

2) При

$$p \begin{pmatrix} \cos(pv_0) \\ -\sin(pv_0) \end{pmatrix} \left[ (c_{31}c_{01} - c_{11}c_{03}) \begin{pmatrix} \sin(pv_0) \\ \cos(pv_0) \end{pmatrix} + c_{32}c_{01} - c_{12}c_{03} \right] = 0 \tag{3.8}$$

имеем  $\lambda_3 = 0$ . При изменении знака  $\lambda_3$  происходит смена устойчивости одномерного сепаратрисного многообразия. Как показано в [5], в момент бифуркации имеем консервативную структуру, что отличает данную ситуацию от случая «общего положения».

Из (2.1), (2.2) и (3.1) следует, что резонансные структуры существенно зависят от того, совпадают ли выбранные замкнутые фазовые кривые в невозмущенных осцилляторах с уровнями, порождающими предельные циклы в несвязанных уравнениях.

### 3.2. Численное исследование ЧУС

Исследование четырехпараметрического семейства (1.1) достаточно сложно. Поэтому зафиксируем в системе (1.1) три параметра и будем изменять один параметр. Например, решим вопрос о поведении фазовых кривых ЧУС в зависимости от параметра  $p_1$  при фиксированных  $p_2, p_3, p_4$ . Для нахождения коэффициентов в системе (2.1) по формулам (2.2)–(2.5), а также решения системы (3.1) была написана программа в Maple. При построении фазовых кривых систем (1.1), (2.1) использовалась программа WinSet [10].





### 3.2.1. Случай 1

Положим  $p_2 = 0.2$ ,  $p_3 = 0.3$ ,  $p_4 = 0.5$ . Установлено существование единственного нетривиального резонанса с  $p = 1$ ,  $q = 1$ . Тогда  $k_1 = k_2$ .

Из (2.3)–(2.5) при  $p = q = 1$  находим  $c_{11} = 0$ ,  $c_{21} = 0$ ,  $c_{31} = 0$ .

Очевидно, при  $B_1(k_1) = 0$ ,  $B_2(k_2) = 0$  и выполнении второго соотношения в (3.1) нетривиальный резонанс существует.

При отсутствии связи ( $p_2 = 0$ ) параметр  $p_1$  «управляет» положением предельного цикла первого осциллятора в системе (1.1). Поэтому при  $p_1 = p_3$  имеем  $B_1 = B_2 = 0$ . Проведем анализ поведения фазовых кривых ЧУС при изменении параметра  $p_1$ .

- 1) При положительных  $p_1 < p_{11} \approx 0.122$  нет значений  $k_1$ ,  $k_2$ , удовлетворяющих условию (3.1), и, следовательно, отсутствуют состояния равновесия в системе (2.1).
- 2) При  $p_{11} < p_1 < p_{12} \approx 0.207$  имеем  $|c_{01}| > |c_{02}|$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$  и  $\lambda_3 > 0$ . В этом случае в системе существуют два неустойчивых состояния равновесия: седло-фокус  $O_1$  и седло  $O_2$ .
- 3) При  $p_{12} < p_1 < p_{13} \approx 0.29$  имеем  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$  и в системе существуют два аттрактора: состояние равновесия узел-фокус  $O_1$  и предельный цикл второго рода (периодическая по  $v$  фазовая кривая на рис. 1). При изменении  $p_1$  от  $p_{12}$  из бесконечности родится предельный цикл второго рода, который при  $p_1 = p_{13}$  влипают в контур из сепаратрис седла  $O_2$  и исчезает.
- 4) При  $p_{13} < p_1 < p_{14} \approx 0.31$  в системе существует только один аттрактор — устойчивое состояние равновесия  $O_1$ , имеем непроходимый резонанс и синхронизацию колебаний.
- 5) При  $p_{14} < p_1 < p_{15} \approx 0.482$  в системе существуют два аттрактора: состояние равновесия узел-фокус  $O_1$  и предельный цикл второго рода. При изменении  $p_1$  в данном промежутке  $|c_{02}|$  растет, и при  $p_1 = p_{15}$  выполняется условие  $|c_{01}| = |c_{02}|$ .
- 6) При  $p_1 > p_{15}$  состояния равновесия отсутствуют; в системе остается только устойчивый предельный цикл второго рода.

Для представленного на рисунке 1 случая имеем  $p_1 = 0.288$ ,  $p_2 = 0.2$ ,  $p_3 = 0.3$ ,  $p_4 = 0.5$ . Тогда для коэффициентов ЧУС из (2.2) находим следующие значения параметров:  $c_{01} \approx -0.127162$ ,  $c_{02} \approx -0.006833$ ,  $c_{03} \approx -0.103663$ ,  $c_{04} \approx 0.005570$ ,  $c_{12} \approx -0.004206$ ,  $c_{22} \approx -0.218505$ ,  $c_{32} \approx -0.230505$ ,  $c_{41} \approx -0.173016$ .

### 3.2.2. Случай 2

В системе (2.1) могут существовать состояния равновесия только для резонансов с нечетным  $p$  и  $q = 1$ . Так как  $h_{p_1} \approx 1/4$  ( $k_1 \approx 1$ ) при  $p \geq 5$ , то не имеет смысла рассматривать резонансы с большими  $p$ . Рассмотрим резонанс с  $p = 3$ ,  $q = 1$ .

Положим  $p_2 = 0.2$ ,  $p_3 = 1.5$ ,  $p_4 = 0.5$  и исследуем поведение фазовых кривых ЧУС при изменении параметра  $p_1$ .

- 1) При положительных  $p_1 < p_{21} \approx 0.064$  не выполняется условие  $|c_{01}| \geq |c_{02}|$  и, следовательно, отсутствуют состояния равновесия в системе (2.1).





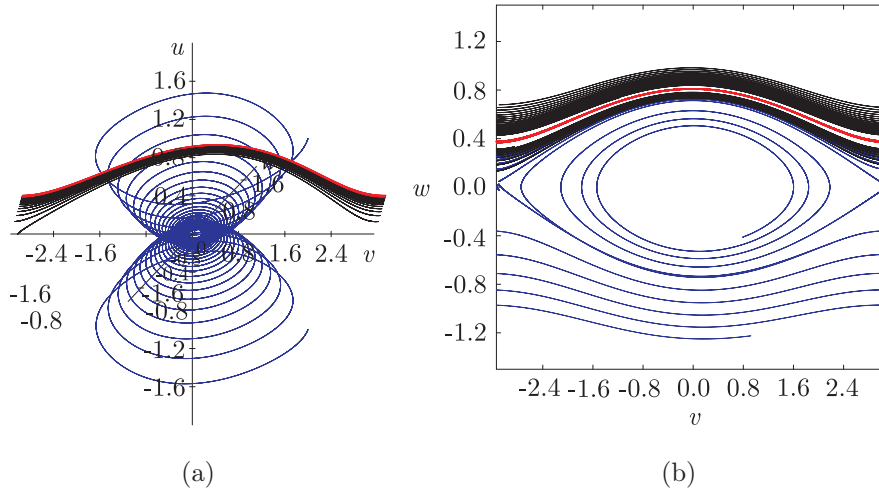


Рис. 1. Поведение фазовых кривых ЧУС (а) и проекция на плоскость  $(v, w)$  для  $p_1 = 0.288$  (б).

- 2) При  $p_{21} < p_1 < p_{22} \approx 0.132$  имеем  $|c_{01}| > |c_{02}|$ ,  $Re\lambda_{1,2} < 0$  и  $\lambda_3 > 0$ . В этом случае в системе на промежутке  $[-\pi/3, \pi/3)$  существуют неустойчивые состояния равновесия  $O_1, O_2$  и устойчивый предельный цикл второго рода, который при  $p_1 = p_{22}$  влипает в контур из сепаратрис седла  $O_2$  и исчезает.
- 3) При  $p_{22} < p_1 < p_{23} \approx 0.136$  в системе существует только один аттрактор  $O_1$  и имеем непроходимый резонанс и синхронизацию колебаний.
- 4) При  $p_{23} < p_1 < p_{24} \approx 0.204$  в системе существуют два аттрактора: состояние равновесия узел–фокус  $O_1$  и предельный цикл второго рода.
- 5) При  $p_1 > p_{24}$  состояния равновесия отсутствуют; устойчивый предельный цикл второго рода при увеличении  $p_1$  уходит на бесконечность.

#### 4. Ограниченность числа нетривиальных резонансов

Не для каждой резонансной кривой (1.2) в ЧУС существуют простые состояния равновесия (периодические решения соответствующего периода в исходной системе). Обозначим через  $M_{pq}$  множество пар  $(p; q)$ , для которых такие состояния равновесия существуют.

**Теорема 1.** При условии  $B_1(k_{1pq})B_2(k_{2pq}) \neq 0$  множество  $M_{pq}$  не более чем конечно.

*Доказательство.* Множество  $M_{pq}$  будет ограниченным, если система уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1(v, k_{1pq}, k_{2pq}) + B_1(k_{1pq}) &= 0, \\ \tilde{A}_2(v, k_{1pq}, k_{2pq}) + B_2(k_{2pq}) &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

имеет вещественное решение лишь для конечного числа резонансных уровней  $k_1 = k_{1pq}$ ,  $k_2 = k_{2pq}$ .

Дальнейшее доказательство будем проводить от противного. Рассмотрим область  $\Delta_k = [0; 1/\sqrt{2} - c) \times [0; 1/\sqrt{2} - c)$  для случая 1 и  $\Delta_k = [0; 1 - c) \times [0; 1/\sqrt{2} - c)$  для случая 2;  $c$  — сколь угодно малая постоянная.

Пусть у ЧУС при  $(k_1, k_2) \in \Delta_k$  и достаточно малых  $\varepsilon$  есть бесчисленное множество пар  $(p, q)$ , для которых система (4.1) имеет простые корни. Тогда существуют последовательности  $\{k_{1p_j q_j}\}$ ,  $\{k_{2p_j q_j}\}$ , такие, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} k_{1p_j q_j} = k_{1*} \in \Delta_k$  и  $\lim_{j \rightarrow \infty} k_{2p_j q_j} = k_{2*} \in \Delta_k$ , и, следовательно,  $\lim_{j \rightarrow \infty} (p_j/q_j) = w_{1*}/w_{2*}$ , где  $w_{1*}$  — частота на уровне  $k_1 = k_{1*}$ , а  $w_{2*}$  — частота на уровне  $k_2 = k_{2*}$ . Из [6] следует

$$\tilde{A}_{1,2}(v, k_{1p_j q_j}, k_{2p_j q_j}) = \sum_{r \neq 0}^{\infty} a_{1,2,r,p_j q_j} e^{irp_j v}. \quad (4.2)$$

Справедливы следующие оценки [6]:

$$a_{1,r,p_j,q_j} \sim \frac{4\pi^2 p_2 p_j (2r+1) \exp(-\pi(2r+1)(p_j+q_j)/2)}{\sqrt{1+k_{1p_j q_j}} \sqrt{1-2k_{2p_j q_j}} \mathbf{K}(k_{1p_j q_j}) \mathbf{K}(k_{2p_j q_j})} \quad (4.3)$$

для случая 1,

$$a_{2,r,p_j,q_j} \sim \frac{4\pi^2 p_4 q_j (2r+1) \exp(-\pi(2r+1)(p_j+q_j)/2)}{(1 - \exp(-\pi(2r+1)p_j)) \sqrt{1-2k_{1p_j q_j}} \sqrt{1-2k_{2p_j q_j}} \mathbf{K}(k_{1p_j q_j}) \mathbf{K}(k_{2p_j q_j})} \quad (4.4)$$

для случая 2.

Поэтому  $\max_v |\tilde{A}_{1,2}(v, k_{1p_j q_j}, k_{2p_j q_j})| \rightarrow 0$  при  $p_j, q_j \rightarrow \infty$ . При этом справедливо  $|B_{1,2}(k_{1p_j q_j}, k_{2p_j q_j})| \rightarrow |B_{1,2}(k_{1*}, k_{2*})| = \text{const} > 0$ . В результате получаем, что система (4.1) при достаточно больших  $p_j, q_j$  не может иметь вещественных корней, что противоречит сделанному предположению. ■

Из данной теоремы следует, что при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  на плоскости  $(I, J)$  окрестности нетривиальных резонансов не пересекаются. Тогда мы можем говорить о глобальном поведении решений.

## 5. Полностью усредненная система и глобальное поведение решений

Рассмотрим полностью усредненную систему (ПУС)

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon B_1(I), \\ \dot{J} &= \varepsilon B_2(J), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $B_1, B_2$  определяются в (2.4), (2.5).

Качественное поведение решений системы (5.1) нетрудно получить, ибо двумерная система разбивается на две одномерные системы. Так как у каждой системы имеется нетривиальное устойчивое состояние равновесия [6], то, соответственно, у двумерной системы будет существовать устойчивое состояние равновесия  $O(I_0, J_0)$ . В этом случае у каждого автоколебательного уравнения, получающегося из (1.1) при отсутствии связи ( $p_2 = p_4 = 0$ ), существует устойчивый предельный цикл. Возможны два случая: 1) резонансный, когда  $I_0 = I_{pq}, J_0 = J_{pq}$  и 2) нерезонансный. В резонансном случае в исходной системе, как правило, будет существовать периодическое решение, в нерезонансном — двумерный устойчивый инвариантный тор с квазипериодической обмоткой.



Используя (5.1), можно получить представление о глобальном поведении решений исходной системы (1.1). При отсутствии нетривиальных резонансов ПУС описывает эволюцию в исходной системе. Если на плоскости  $(I, J)$  выбрать начальные значения вне окрестностей нетривиальных резонансов, то фазовая точка системы (1.1) при изменении  $t$  будет двигаться так, что переменные  $(I, J)$  будут изменяться в соответствии с движением по траектории ПУС. Далее, она либо попадает в окрестность нетривиального резонанса, либо не попадает в окрестность такого резонанса и имеет место стремление к состоянию равновесия ПУС, либо покидает рассматриваемую область. В первом случае фазовая точка либо стремится к устойчивому резонансному периодическому движению, либо проходит эту окрестность и продолжает движение по соответствующей траектории ПУС.

Остановимся на глобальном поведении решений в каждом из рассматриваемых случаев. Проанализируем поведение решений системы (1.1) в зависимости от выбора точки на фазовой плоскости ПУС. Положим  $p_2 = 0.2, p_4 = 0.5, \varepsilon = 0.1$ . Пусть  $p_3 = 0.3$  в случае 1 и  $p_3 = 1.5$  в случае 2; проведем анализ в зависимости от  $p_1$ . Для удобства вместо переменных  $I, J$  будем рассматривать переменные  $k_1, k_2$  соответственно.

### 5.1. Случай 1

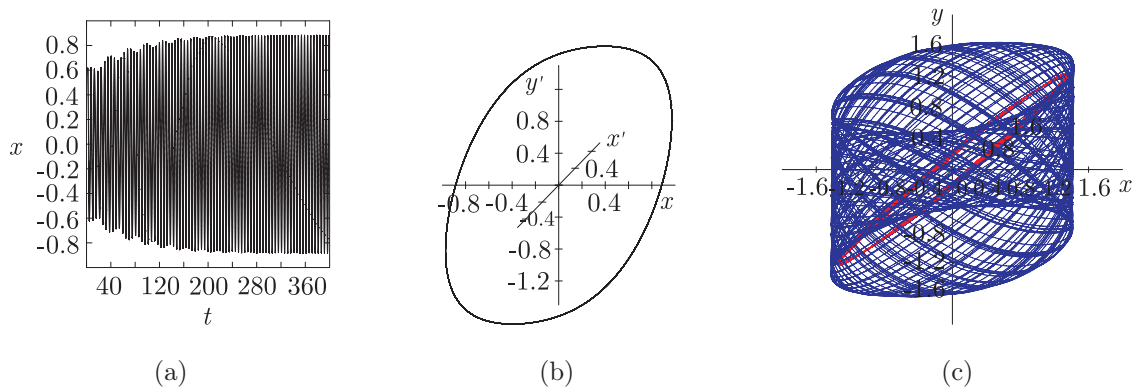


Рис. 2. (а) График зависимости  $x(t)$  (выход на периодическое решение), (б) проекция устойчивого периодического решения системы (1.1) на  $(x, \dot{x}, \dot{y})$  при  $p_1 = 0.3$ ; (с) проекция устойчивого периодического решения и квазипериодического движения при  $p_1 = 0.4$  (с).

Уравнение  $B_1(k_1) = 0$  имеет простой вещественный корень  $k_1 \in [0, 1/\sqrt{2}]$ , если  $p_1 > 0$ . При  $p_1 = 0$  предельный цикл, соответствующий этому корню, стягивается в точку и при увеличении  $p_1$  от значения  $p_1 = 0$  увеличивается в размерах. Для  $B_2(k_2)$  рассуждения аналогичны.

Если зафиксировать точку  $M$  на плоскости  $(k_1, k_2)$  и начать интегрировать систему (5.1), то фазовая точка начнет движение по соответствующей фазовой кривой. Если точка  $M$  принадлежит окрестности нетривиальной резонансной точки, то мы должны обратиться к ЧУС, которая в этом случае будет иметь простые состояния равновесия. Тогда в системе (1.1) будет существовать периодическое решение. При выбранных значениях параметров из системы (3.1) находим  $k_1 \approx 0.517419, k_2 \approx 0.517419$ . Для этих значений модулей эллиптического интеграла находим начальную точку  $(1.073590667; 0; 1.073590667; 0)$ . Полученная точка определяется как точка пересечения замкнутой фазовой кривой первого (второго) невозмущенного осциллятора с осью  $x(y)$  и определяет точку, из окрестности которой попадаем на резонансное периодическое решение системы (1.1), представленное

на рисунке 2b. Данное поведение решений системы (1.1) соответствует выбору параметра  $p_1$  из интервала  $(p_{13}, p_{14})$ . При  $p_1 = 0.4$  получаем двумерный устойчивый инвариантный тор с квазипериодической обмоткой и периодическое решение (рис. 2c).

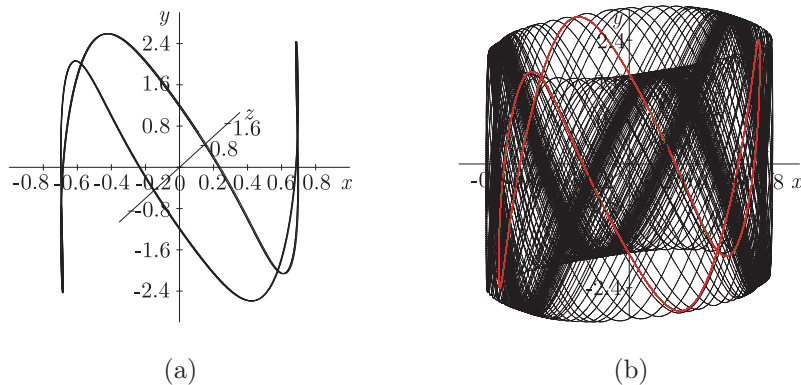


Рис. 3. (a) Проекция устойчивого периодического решения системы (1.1) на  $(x, \dot{x} = z, y)$  при  $p_1 = 0.15$ ,  $p_2 = 0.2$ ,  $p_3 = 1.5$ ,  $p_4 = 0.5$ ; (b) устойчивый инвариантный тор с квазипериодической обмоткой и периодическое решение.

## 5.2. Случай 2

Уравнение  $B_1(k_1) = 0$  имеет не более одного вещественного нуля на интервале  $(0; 1)$ . Предельный цикл рождается из фокуса при  $p_1 = 0$  и с ростом  $p_1$  растет по величине, вливая в сепаратрису при  $p_1 = 0.2$ .

Пусть  $p_3 = 1.5$ . Зафиксируем точку  $M$  на плоскости  $(k_1, k_2)$  и начнем интегрировать систему (5.1). Фазовая точка начнет движение по соответствующей фазовой кривой. Положим, например,  $p_1 = 0.15$ . При выбранных значениях параметров из системы (3.1) получим точку  $k_1 \approx 0.92736$ ,  $k_2 \approx 0.541125$ . Для найденных значений модулей эллиптического интеграла находим начальную точку  $(0.7542204178; 0; 2.361554286; 0)$ . Полученная точка определяет точку, из окрестности которой попадем на резонансное периодическое решение системы (1.1) с периодом  $\frac{2\pi}{3}$  (рис. 3a). При выходе за границы области существования нетривиального резонанса наблюдается устойчивый инвариантный тор с квазипериодической обмоткой (рис. 3b).

## Список литературы

- [1] Андронов А. А., Витт А. А. К теории захватывания Ван дер Поля // Собр. тр. А. А. Андронина / А. А. Андронов. М.: АН СССР, 1956. С. 51–64.
- [2] Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
- [3] Морозов А. Д., Шильников Л. П. О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым // ПММ, 1983, т. 47, № 3, с. 385–394.
- [4] Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 420 с.
- [5] Morozov A. D., Kondrashov R. E. On resonances in systems of two weakly connected oscillators // Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 14, no. 2, pp. 237–247.



- [6] Кондрашов Р. Е., Морозов А. Д. К исследованию резонансов в системе двух уравнений Дюффинга – Ван дер Поля // *Нелинейная динамика*, 2010, т. 6, № 2, с. 241–254.
- [7] Belykh V. N., Pankratova E. V. Chaotic dynamics of two Van der Pol–Duffing oscillators with Huygens coupling // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2010, vol. 15, nos. 2–3, pp. 274–284.
- [8] Морозов А. Д. К исследованию резонансов в системе нелинейных слабосвязанных осцилляторов // *Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. темат. сб. науч. трудов / Е. А. Леонтович-Андропова*. Горький: ГГУ, 1984. С. 147–158.
- [9] Карабанов А. А. Некоторые аспекты резонансной динамики четырехмерных квазигамильтоновых систем. (Научные доклады / Коми научный центр УрО РАН, вып. 415.) Сыктывкар, 1999. 32 с.
- [10] Морозов А. Д., Драгунов Т. Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2003. 304 с.

### On global behaviour of the solutions of system of two Duffing–Van der Pole equations

Roman E. Kondrashov<sup>1</sup>, Albert D. Morozov<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>N. I. Lobachevski State University of Nizhni Novgorod  
Prospekt Gagarina 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia  
<sup>1</sup>romicmmf2006@rambler.ru, <sup>2</sup>morozov@mm.unn.ru

The problem of global behavior of solutions in system of two Duffing–Van der Pole equations close to nonlinear integrable is considered. For regions without unperturbed separatrices we give partially averaged systems which describe the behavior of solutions of original system in resonant zones. The finiteness of number of non-trivial resonant structures is established. Also we give fully averaged systems which describe the behavior of solutions outside of neighborhoods of non-trivial resonant structures. The results of numerically investigation of these systems are resulted.

MSC 2010: 34C15

Keywords: limit cycles, resonances, averaging

Received March 31, 2011, accepted July 15, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 437–449 (Russian)