Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 3. С. 451–463.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 532.135+539.374
MSC 2010: 76A05

Тензорно нелинейные сдвиговые течения: материальные функции и диффузионно-вихревые решения

Д. В. Георгиевский

Работа посвящена анализу тензорно нелинейных определяющих соотношений, связывающих девиаторы напряжений и скоростей деформаций в несжимаемых изотропных средах, называемых в механике сплошной среды жидкостями Рейнера – Ривлина. Приведены связи квадратичных и кубических инвариантов тензоров, куда входят две материальные функции среды. Основное внимание уделено одномерным сдвиговым течениям в различных криволинейных системах координат. Описана схема нахождения материальных функций для сдвигов из анализа стационарного течения Пуазейля в плоском слое. Получены автомодельные решения, соответствующие обобщенной диффузии вихревого слоя в плоском и осесимметричном случаях.

Ключевые слова: тензорная нелинейность, инвариант, материальная функция, определяющее соотношение, жидкость Рейнера – Ривлина, сдвиг, диффузия вихря, вихревой слой

Введение

В конце 40-х годов XX века внимание специалистов по неньютоновской гидродинамике привлекло любопытное явление, обнаруженное К. Вайссенбергом в экспериментах с очень вязкими жидкостями (растворами каучука, целлюлозы, крахмала, пористым битумом, некоторыми пищевыми продуктами) и получившее название «центростремительный насос». Если такие жидкости вращать между двумя соосными цилиндрами, один из которых может, не вращаясь, двигаться только вдоль своей оси, а второй вращается и собственно захватывает среду, то последняя заметно поднимается вверх и течет при этом внутрь. Эти течения противоположны действиям тяжести и центробежной силы.

Получено 5 июля 2011 года
После доработки 31 августа 2011 года

Георгиевский Дмитрий Владимирович
georgiev@mech.math.msu.su
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
119991, Россия, г. Москва, Воробьёвы горы

Одним из объяснений эффекта Вайссенберга [1, с. 149–152, 2] как механического эффекта второго порядка стало введение в неньютоновскую модель так называемой поперечной вязкости и, таким образом, привлечение тензорно нелинейных определяющих соотношений между напряжениями и скоростями деформаций. Аналогичные соотношения в механике деформируемого твердого тела, связывающие напряжения и сами деформации и описывающие, например, еще одно известное в экспериментах явление второго порядка — эффект Пойнтинга, — к тому времени были известны уже давно.

По предложению К. Трусделла подобные среды стали называть жидкостями Рейнера–Ривлина [1, 3, 4]. К их числу относятся коллоидные растворы, высокополимерные соединения, некоторые геоматериалы [5]. Различные аспекты и качественные особенности течений жидкостей Рейнера–Ривлина к настоящему времени хорошо изучены и вошли в обзоры, монографии и учебники [6–13].

Вопросы существования, единственности и непрерывной зависимости от входных данных решений нелинейных параболических задач в гильбертовом пространстве, моделирующих течение тензорно нелинейных сред, рассмотрены в [14]. Применены техника разрешающих операторов и метод априорной оценки.

В [11, 15] на примере жидкости Рейнера–Ривлина развиты новые подходы в решении классификационной задачи группового анализа и поиска инвариантных решений. Конкретная задача о нестационарном течении с теплоотдачей к пористому диску бесконечного радиуса, вращающемуся в жидкости Рейнера–Ривлина, подробно исследована в [16].

Интерес публикуемой ниже работы помимо анализа определяющих соотношений несжимаемых тензорно нелинейных сред, инвариантов и материальных функций сосредоточен на поиске автомодельных решений, соответствующих обобщенной диффузии вихревого слоя (как плоскопараллельного, так и осесимметричного) и вихревой нити. Диффузионно-вихревые решения традиционно считаются тестовыми для апробации новых и сложных физических моделей течения (см., например, работу [17], посвященную динамике неполярных жидкостей). Данная работа развивает исследования в [18, 19], где для одномерных процессов введено понятие обобщенной диффузии вихря, характеризуемой достаточно общими кинематикой процесса, физической нелинейностью среды и степенью вырожденности граничного условия в точке разрыва.

1. Изотропные тензор-функции и их инварианты

Представим тензор напряжений $\underset{\sim}{\sigma}(\mathbf{x},t)$ в каждой точке изотропной сплошной среды в виде суммы девиаторной $\underset{\sim}{s}(\mathbf{x},t)$ и шаровой $-p(\mathbf{x},t)\,\underset{\sim}{I}$ частей. Тензор скоростей деформаций $\underset{\sim}{v}(\mathbf{x},t)$ в силу требуемого условия несжимаемости $\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{v}=0$ совпадает со своим девиатором. Тензорные определяющие соотношения среды, связывающие девиаторы $\underset{\sim}{s}$ и $\underset{\sim}{v}$, выберем в наиболее общем виде изотропной полиномиальной тензор-функции одного тензорного аргумента[1]. В трехмерном пространстве в силу формулы Гамильтона–Кели этот вид следующий:

$$\underset{\sim}{s}=A_1(I_{v2},I_{v3})\,\underset{\sim}{v}+A_2(I_{v2},I_{v3})\big(\underset{\sim}{v}^2-I_{v2}^2\,\underset{\sim}{I}\,/3\big), \tag{1.1}$$

[1]Первое строгое доказательство формы записи такой функции в R^n содержится, видимо, в [3]. Математический аппарат нелинейных тензорных функций и их инвариантов хорошо освещен в монографиях, учебниках и статьях по тензорному анализу [20–25] и продолжает развиваться в настоящее время.

$$\underset{\sim}{v} = B_1(I_{s2}, I_{s3})\,\underset{\sim}{s} + B_2(I_{s2}, I_{s3})\big(\underset{\sim}{s}^2 - I_{s2}^2\,\underset{\sim}{I}/3\big), \tag{1.2}$$

$$I_{v2} = \sqrt{\operatorname{tr}\underset{\sim}{v}^2}, \quad I_{v3} = \sqrt[3]{\operatorname{tr}\underset{\sim}{v}^3}, \quad I_{s2} = \sqrt{\operatorname{tr}\underset{\sim}{s}^2}, \quad I_{s3} = \sqrt[3]{\operatorname{tr}\underset{\sim}{s}^3}, \tag{1.3}$$

где $\underset{\sim}{I}$ — единичный тензор второго ранга; I_{v2}, I_{v3}, I_{s2}, I_{s3} — квадратичные и кубические инварианты (линейные инварианты I_{v1} и I_{s1} нулевые); $A_i(I_{v2}, I_{v3})$, $B_i(I_{s2}, I_{s3})$ $(i = 1, 2)$ — материальные функции среды, определяемые с помощью установочных экспериментов; $[A_1] = 1/[B_1] = ML^{-1}T^{-1}$, $[A_2] = ML^{-1}$, $[B_2] = M^{-2}L^2T^3$ (как видно, по своей размерности величина A_2 является статической).

Инварианты $I_{v2} = \|\,\underset{\sim}{v}\,\|$ и $I_{s2} = \|\,\underset{\sim}{s}\,\|$, часто называемые в механике сплошной среды интенсивностями напряжений и скоростей деформаций, могут служить мерами тензоров $\underset{\sim}{v}$ и $\underset{\sim}{s}$ в соответствующих метрических пространствах. Введем в рассмотрение также безразмерные единичные, или направляющие, девиаторы $\underset{\sim}{s}_0$ и $\underset{\sim}{v}_0$:

$$\underset{\sim}{s}_0 = \underset{\sim}{s}/I_{s2}, \quad \underset{\sim}{v}_0 = \underset{\sim}{v}/I_{v2}; \quad \|\underset{\sim}{s}_0\| = \|\underset{\sim}{v}_0\| = 1. \tag{1.4}$$

Взаимно обратные функции (1.1) и (1.2) тензорно нелинейны из-за наличия слагаемых с A_2 и B_2. Если материальные функции A_2 и B_2 тождественно равны нулю, то функции (1.1) и (1.2) будут квазилинейными [22], что означает тензорную линейность (для девиаторов она равносильна тому, что $\underset{\sim}{s}_0 = \underset{\sim}{v}_0$), но возможную скалярную нелинейность. Единственной физически линейной моделью, т. е. линейной и тензорно, и скалярно, в классе функций (1.1) и (1.2) будет ньютоновская вязкая жидкость, для которой $A_1 = 1/B_1 \equiv 2\mu$; $A_2 = B_2 \equiv 0$, где μ — динамическая вязкость, не зависящая от каких-либо инвариантов. Физическая линейность математически напрямую связана со свойством суперпозиции операторов $\check{\underset{\sim}{s}}\,(\underset{\sim}{v})$ и $\check{\underset{\sim}{v}}\,(\underset{\sim}{s})$.

Из (1.1) непосредственно следует алгебраическая связь пары инвариантов I_{s2}, I_{s3} с парой I_{v2}, I_{v3}:

$$I_{s2}^2 = I_{v2}^2 A_1^2 + 2I_{v3}^3 A_1 A_2 + \frac{1}{6} I_{v2}^4 A_2^2, \tag{1.5}$$

$$I_{s3}^3 = I_{v3}^3 A_1^3 + \frac{1}{2} I_{v2}^4 A_1^2 A_2 + \frac{1}{2} I_{v2}^2 I_{v3}^3 A_1 A_2^2 - \frac{1}{36} I_{v2}^6 A_2^3 + \frac{1}{3} I_{v3}^6 A_2^3, \tag{1.6}$$

называемая скалярными определяющими соотношениями среды. Они характеризуют данный материал и имеют место при любом напряженно-деформированном состоянии, реализуемом в нем.

Связь пары функций B_1, B_2 с парой A_1, A_2 следующая [23]:

$$B_1 = \frac{-\,6A_1^2 + I_{v2}^2 A_2^2}{-\,6A_1^3 + 3I_{v2}^2 A_1 A_2^2 + 2I_{v3}^3 A_2^3}, \quad B_2 = \frac{6A_2}{-\,6A_1^3 + 3I_{v2}^2 A_1 A_2^2 + 2I_{v3}^3 A_2^3}.$$

2. Одномерные сдвиговые течения. Плоскопараллельный сдвиг

Предположим, тензор $\underset{\sim}{v}$ таков, что существует ортогональная криволинейная система эйлеровых координат (q_1, q_2, q_3), такая, что физические компоненты тензора $\underset{\sim}{v}$ в ней имеют простой вид:

$$v_{q_1q_2} = v_{q_2q_1} = d(q_2, t). \tag{2.1}$$

Остальные компоненты тождественно равны нулю. При этом, естественно, должно существовать векторное поле скорости $\mathbf{v}$ ($\underset{\sim}{v} = \mathrm{Def}\,\mathbf{v}$). Тогда говорят об одномерном (q_2, q_1)-сдвиговом течении, или чистом сдвиге.

Вычислим по (2.1) инваринаты I_{v2} и I_{v3} (1.3)

$$I_{v2} = \sqrt{2}\,|d|, \quad I_{v3} \equiv 0 \tag{2.2}$$

и введем обозначения для функций двух переменных A_1 и A_2 в сечении $I_{v3} = 0$:

$$A_1(I_{v2}, 0) = 2\mu_1(I_{v2}), \quad A_2(I_{v2}, 0) = 12\mu_2(I_{v2}), \tag{2.3}$$

где μ_1 и μ_2 носят название тензорно линейной (сдвиговой) и поперечной вязкостей. Тогда тензорные (1.1) и скалярные (1.5), (1.6) определяющие соотношения запишутся следующим образом:

$$s_{q_1q_1} = s_{q_2q_2} = -s_{q_3q_3}/2 = 4\mu_2 d^2, \quad s_{q_1q_2} = 2\mu_1 d, \quad s_{q_1q_3} = s_{q_2q_3} \equiv 0, \tag{2.4}$$

$$I_{s2}^2 = 4I_{v2}^2(\mu_1^2 + 6\mu_2^2 I_{v2}^2) \equiv 8d^2(\mu_1^2 + 12\mu_2^2 d^2), \tag{2.5}$$

$$I_{s3}^3 = 24\mu_2 I_{v2}^4(\mu_1^2 - 2\mu_2^2 I_{v2}^2) \equiv 96\mu_2 d^4(\mu_1^2 - 4\mu_2^2 d^2). \tag{2.6}$$

Связи $I_{s2}(I_{v2})$ и $I_{s3}(I_{v2})$ в (2.5) и (2.6) универсальны для любого одномерного сдвига (2.1), реализуемого в среде с тензорными определяющими соотношениями (1.1) и (1.2). Две материальные функции $\mu_1(I_{v2})$ и $\mu_2(I_{v2})$ одного переменного должны быть восстановлены из двух независимых измерений в установочных экспериментах. В [7] показано, что в силу принципа материальной объективности в механике сплошной среды обе эти материальные функции не могут быть одновременно ненулевыми константами.

Рассмотрим плоскопараллельное сдвиговое течение в декартовых координатах $q_i = x_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $v_{12} = v_{1,2}/2 = d(x_2, t)$, $I_{v2} = |v_{1,2}|/\sqrt{2}$, $v_2 = v_3 \equiv 0$:

$$s_{11} = s_{22} = -s_{33}/2 = \mu_2 v_{1,2}^2, \quad s_{12} = \mu_1 v_{1,2}. \tag{2.7}$$

Областью Ω течения может быть слой $-h < x_2 < h$ либо полупространство $x_2 > 0$. В (2.7) и ниже запятая в индексе обозначает частную производную по соответствующей независимой переменной.

Знание функций μ_1 и μ_2 позволяет последовательно решить прямую задачу нахождения параметров движения. Действительно, из начально-краевой задачи для первого уравнения движения (при отсутствии массовых сил)

$$k(t) + (\mu_1 v_{1,2})_{,2} = \rho v_{1,t} \tag{2.8}$$

определяется скорость $v_1(x_2, t)$. В (2.8) $k(t)$ — известный перепад давления:

$$p(x_1, x_2, t) = -k(t)x_1 + p_0(x_2, t). \tag{2.9}$$

Затем из (2.7) вычисляется компонента $s_{22}(x_2, t)$. Наконец, второе уравнение движения $(s_{22} - p)_{,2} = 0$ позволяет найти неизвестную функцию p_0:

$$p_0(x_2, t) = s_{22} - p_{00} \tag{2.10}$$

с точностью до задаваемого дополнительно гидростатического давления $p_{00}(t)$.

Заметим, что кинематика сдвигового течения и касательное напряжение в Ω не зависят от μ_2 и полностью определяются тензорно линейной вязкостью μ_1 в отличие от диагональных компонент $s_{\alpha\alpha}$ и давления p.

Экспериментальное нахождение материальных функций в вискозиметрии [6] обычно связывают с решением обратных задач для течений, являющихся комбинациями течений Куэтта и Пуазейля в плоском слое, в трубе либо между вращающимися соосными цилиндрами. Приведем пример такого установочного эксперимента. Рассмотрим стационарное течение Пуазейля исследуемой тензорно нелинейной среды в плоском слое $\Omega = \{-h < x_2 < h\}$. Перепад давления вдоль оси x_1 постоянен: $k = \mathrm{const}$; на границах слоя $x_2 = \pm h$ приняты условия прилипания.

Продольная компонента скорости $v_1(x_2)$ согласно (2.8) удовлетворяет обыкновенной краевой задаче

$$\mu_1\left(\frac{|v_1'|}{\sqrt{2}}\right)v_1' = -kx_2, \quad -h < x_2 < h, \qquad v_1(\pm h) = 0. \tag{2.11}$$

Полагая для определенности $k > 0$, получим $\operatorname{sign} v_1' = -\operatorname{sign} x_2$, т. е. в половине слоя $\Omega_- = \{-h < x_2 < 0\}$ аргумент у μ_1 равен $v_1'/\sqrt{2}$.

Знание из эксперимента профиля $v_1(x_2)$ в Ω_-, а следовательно, и скорости деформаций $v_1'/\sqrt{2} = F(x_2)$ позволяет построить обратную функцию $x_2 = F^{-1}(v_1'/\sqrt{2}) < 0$ и подставить ее в (2.11). Предполагая монотонность функции $F(x_2)$, запишем

$$\mu_1(I_{v2}) = -\frac{k}{\sqrt{2}}\,\frac{F^{-1}(I_{v2})}{I_{v2}}. \tag{2.12}$$

Знание же профиля давления $p(x_1^0, x_2) \equiv -kx_1^0 + G(F^{-1}(v_1'/\sqrt{2}))$ в некотором сечении $x_1 = x_1^0$ позволяет на основании (2.7), (2.9), (2.10) ($p_{00} = 0$) найти μ_2:

$$\mu_2(I_{v2}) = \frac{G(F^{-1}(I_{v2}))}{2I_{v2}^2}. \tag{2.13}$$

3. Обобщенная диффузия вихревого слоя

Вернемся к уравнению (2.8) при $k(t) \equiv 0$ и поставим для него в полупространстве $\Omega = \{x_2 > 0\}$ при $t > 0$ начально-краевую задачу с условиями

$$x_2 = 0\colon v_1 = 0, \quad x_2 = \infty\colon v_1 = V_0 > 0, \quad t = 0,\ x_2 > 0\colon v_1 = V_0, \tag{3.1}$$

где $V_0 = \mathrm{const}$. Эта задача моделирует диффузию разрыва решения в начальный момент времени на границе Ω, который следует из несогласованности начального и граничного условий (3.1) в точке $x_2 = 0$, $t = 0$.

Так как $V_0 > 0$, то по смыслу задачи $v_{1,2} \geqslant 0$ всюду в Ω в любой момент времени $t > 0$ (т. е. ищутся физически достоверные решения, описывающие монотонное торможение среды по мере приближения x_2 к нулю). Уравнение (2.8) запишется следующим образом:

$$\left[\mu_1\left(\frac{v_{1,2}}{\sqrt{2}}\right)v_{1,2}\right]_{,2} = \rho v_{1,t}. \tag{3.2}$$

Поставим вопрос о возможности построения автомодельных решений задачи (3.2), (3.1) для различных функций $\mu_1(v_{1,2}/\sqrt{2})$. Отметим сразу принципиальное отличие уравнения (3.2) от аналогичного ему нелинейного одномерного уравнения теплопроводности $[c(T)T_{,x}]_{,x} = T_{,t}$, в котором коэффициент теплопроводности c зависит от температуры, а не от ее производной по координате (теплового потока). Зависимость μ_1 от I_{v2}, а не от v_1 в (3.2) заведомо допускает автомодельность лишь для степенного закона тензорно линейной вязкости:

$$\mu_1(I_{v2}) = \mu_1^\circ I_{v2}^\gamma, \quad \gamma > -1. \tag{3.3}$$

Переход $\gamma \to -1+0$ соответствует стремлению к материалу с пределом текучести. Сдвиговые течения таких сред отличаются наличием жестких прослоек, имеют самостоятельный интерес и в сферу внимания данной работы не входят. Различают псевдопластические ($-1 < \gamma < 0$) и упрочняющиеся ($\gamma > 0$) степенные жидкости. По другой терминологии, более принятой в механике деформируемого твердого тела, говорят о материалах с мягкой либо жесткой характеристикой.

Вводя обозначение $\nu = \mu_1^\circ/(2^{\gamma/2}\rho)$ для обобщенной кинематической вязкости ($[\nu] = L^2T^{\gamma-1}$), запишем (3.2) в удобном для анализа виде

$$\nu\bigl(v_{1,2}^{\gamma+1}\bigr)_{,2} = v_{1,t}. \tag{3.4}$$

Автомодельной заменой

$$v_1(x_2,t) = V_0 u(\xi), \quad \xi = \frac{x_2}{(V_0^\gamma \nu t)^{1/(\gamma+2)}} \tag{3.5}$$

начально-краевая задача (3.4), (3.1) сводится к обыкновенной

$$\bigl[(u')^{\gamma+1}\bigr]' + \frac{\xi u'}{\gamma+2} = 0, \qquad u(0) = 0, \quad u(\infty) = 1, \tag{3.6}$$

для безразмерной функции u относительно неотрицательной безразмерной переменной ξ.

В случае линейной вязкости $\gamma = 0$ придем к классическому решению

$$u(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\xi \mathrm{e}^{-\eta^2/4}\, d\eta, \quad v_{1,2}(x_2,t) = \frac{V_0}{\sqrt{\pi\nu t}}\,\mathrm{e}^{-x_2^2/(4\nu t)}, \tag{3.7}$$

моделирующему диффузию вихревого слоя в Ω. Величины s_{22} и p вычисляются на основе (3.7) из (2.7) и (2.10).

Пусть $\gamma \in (-1;0) \cup (0;+\infty)$. Проводя интегрирование задачи (3.6), получим

$$u(\xi) = \int\limits_0^\xi \left[1 - \frac{1}{2}\,\gamma a(\gamma)\ln\pi - \frac{\gamma\eta^2}{2(1+\gamma)(2+\gamma)}\right]^{1/\gamma} d\eta, \tag{3.8}$$

$$v_{1,2}(x_2,t) = \left(\frac{V_0^2}{\nu t}\right)^{1/(2+\gamma)} \left[1 - \frac{1}{2}\,\gamma a(\gamma)\ln\pi - \frac{\gamma x_2^2}{2(V_0^\gamma \nu t)^{2/(2+\gamma)}(1+\gamma)(2+\gamma)}\right]^{1/\gamma}, \tag{3.9}$$

где функция $a(\gamma)$ такова, что $a \to 1$ при $\gamma \to \pm 0$. В (3.8) учтено, что подынтегральное выражение равномерно по η стремится к $(1/\sqrt{\pi})\,\mathrm{e}^{-\eta^2/4}$ при $\gamma \to \pm 0$, как это и должно быть согласно (3.7). Профиль $v_{1,2}$ (3.9) при таком предельном переходе также стремится к профилю $v_{1,2}|_{\gamma=0}$ (3.7).

Обратим внимание на качественное различие областей определения правых частей (3.8), (3.9) в случаях псевдопластической ($-1 < \gamma < 0$) и упрочняющейся ($\gamma > 0$) жидкостей.

а) $-1 < \gamma < 0$. В этом случае в предположении $a(\gamma) > 0$ выражения в квадратных скобках в (3.8) и (3.9) положительны для любых η, x_2 и t. Следовательно, автомодельная переменная ξ (3.5) меняется вплоть до бесконечности, т. е. сдвиговое течение реализуется в любой момент $t > 0$ при $0 < x_2 < \infty$. Неизвестная до сих пор функция $a(\gamma)$ находится из последнего условия (3.6):

$$\int\limits_0^\infty \left[1 - \frac{1}{2}\,\gamma a(\gamma)\ln\pi - \frac{\gamma\xi^2}{2(1+\gamma)(2+\gamma)}\right]^{1/\gamma} d\xi = 1. \tag{3.10}$$

Так, для значений $\gamma = -1/n$, $n = 2, 3, \ldots$, имеем [26, с. 295]:

$$a\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{\ln\pi}\left\{\left[\frac{\pi(n-1)(2n-1)}{2n}\left(\frac{\Gamma(n-1/2)}{(n-1)!}\right)^2\right]^{1/(2n-1)} - 1\right\} \tag{3.11}$$

$$a(-1/2) \approx 0.796, \quad a(-1/3) \approx 0.957, \qquad \lim_{\gamma\to -0} a(\gamma) = 1.$$

Нетрудно обобщить формулу (3.11) и на произвольные $\gamma \in (-1; 0)$.

б) $\gamma > 0$. При положительных показателях γ решение (3.8), (3.9) определено лишь на отрезке $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_\infty(\gamma)$, где

$$\xi_\infty^2 = (1+\gamma)(2+\gamma)\left(\frac{2}{\gamma} - a(\gamma)\ln\pi\right), \quad a(\gamma) < \frac{2}{\gamma\ln\pi}. \tag{3.12}$$

В точке $\xi = \xi_\infty$ скорость деформации $v_{1,2}$ (3.9) нулевая, поэтому необходимо положить

$$\xi \geqslant \xi_\infty\colon v_1 \equiv V_0 \quad\Longrightarrow\quad v_{1,2} \equiv 0.$$

Граничное условие $u(\infty) = 1$ переносится из бесконечности в точку $\xi = \xi_\infty$, т. е. функция $a(\gamma)$ должна находиться из алгебраического уравнения

$$\int\limits_0^{\xi_\infty} \left[1 - \frac{1}{2}\,\gamma a(\gamma)\ln\pi - \frac{\gamma\xi^2}{2(1+\gamma)(2+\gamma)}\right]^{1/\gamma} d\xi = 1. \tag{3.13}$$

Его особенностью является то, что неизвестная $a(\gamma)$ входит, согласно (3.12), в верхний предел интегрирования.

Таким образом, начальное возмущение, создаваемое внезапной остановкой границы, распространяется вглубь с конечной скоростью, так что толщина области сдвига растет пропорционально $t^{1/(2+\gamma)}$. Такой эффект в теории нелинейных параболических уравнений известен (см., например, [27, с. 40–45], где идет речь о сильных тепловых волнах). В исследуемой задаче механически он объясняется тем, что при сколь угодно малых, но положительных γ и малых скоростях сдвига поведение среды близко к поведению идеальной жидкости, которая в силу отсутствия межслойного сцепления не реагирует на сдвиг вообще и допускает тривиальное решение

$$x_2 > 0, \quad t > 0\colon v(x_2, t) \equiv V_0; \quad v_1(0, t) \equiv 0 \tag{3.14}$$

с разрывом на границе Ω. Формально в (3.14) можно считать, что $\xi_* = 0$ (или $\gamma = \infty$).

Существует класс автомодельных решений, обобщающих (3.8), и при отличном от нуля перепаде давления $k(t)$. В случае степенного закона вязкости (3.3) независимо от показателя γ перепад $k(t)$ должен быть неограниченным в начальный момент времени:

$$k(t) = \frac{k_0 \rho V_0}{t}, \tag{3.15}$$

где k_0 — безразмерная интенсивность. Тогда функция $u(\xi)$ (3.5) удовлетворяет вместо (3.6) неоднородному уравнению

$$\big[(u')^{\gamma+1}\big]' + \frac{\xi u'}{\gamma+2} = -k_0, \tag{3.16}$$

с теми же, что и в (3.6), граничными условиями.

4. Продольные осесимметричные (r, z)-сдвиговые течения

Рассмотрим в цилиндрических координатах $q_1 = z$, $q_2 = r$, $q_3 = \theta$ продольное осесимметричное течение тензорно нелинейной среды, характеризуемое скоростью $v_z(r,t)$. В (2.1) $d = v_{rz} = v_{z,r}/2$, $I_{v2} = |v_{z,r}|/\sqrt{2}$;

$$s_{zz} = s_{rr} = -s_{\theta\theta}/2 = \mu_2 v_{z,r}^2, \quad s_{rz} = \mu_1 v_{z,r}. \tag{4.1}$$

Область течения, естественно, должна быть выбрана симметричной относительно оси z.

Остаются справедливыми аналоги уравнений (2.8) и (2.10):

$$k(t) + (\mu_1 v_{z,r})_{,r} + \frac{\mu_1 v_{z,r}}{r} = \rho v_{z,t}, \tag{4.2}$$

$$p(r,z,t) = -k(t)z + s_{rr}(r,t) - p_{00}. \tag{4.3}$$

Таким образом, система (4.2), (4.3) с учетом зависимости (4.1) s_{rr} от v_z совместна и замкнута.

Ее совместность обеспечивается исключительно осевой симметрией, т. е. одномерностью течения. Если же рассмотреть двумерную картину сдвига, выбрать поле скоростей (для простоты в декартовых координатах) в виде $v_1 = v_1(x_2, x_3, t)$, $v_2 = v_3 \equiv 0$ и вычислить по (1.1) компоненты s_{ij} девиатора напряжений (все они будут отличными от тождественно нулевых), то можно показать [10, с. 67–70], что скорость v_1 должна одновременно удовлетворять двум уравнениям:

$$k(t) + s_{12,2} + s_{13,3} = \rho v_{1,t}, \qquad (s_{22} - s_{33})_{,23} = s_{23(,22-,33)}. \tag{4.4}$$

Второе из них — уравнение совместности — получено путем исключения из второго и третьего уравнений движения давления. Оно автоматически удовлетворяется в случае продольного осесимметричного сдвига (4.1), когда

$$s_{22} = s_{rr}\cos^2\theta + s_{\theta\theta}\sin^2\theta, \quad s_{33} = s_{rr}\sin^2\theta + s_{\theta\theta}\cos^2\theta,$$

$$s_{23} = (s_{rr} - s_{\theta\theta})\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \frac{x_2^2 - x_3^2}{r^2}, \quad \sin 2\theta = \frac{2x_2x_3}{r^2}.$$

Доказательство этого утверждения несложно и сводится к проверке тождества

$$\big((x_2^2 - x_3^2)f(r)\big)_{,23} = \big(x_2x_3 f(r)\big)_{(,22-,33)}$$

для произвольной функции f от $r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$.

Несовместность системы (4.4) означает невозможность существования одномерного поля скоростей с компонентой $v_1 = v_1(x_2, x_3, t)$. В связи с этим упомянем работу [28] — одну из первых, где отмечена невозможность одномерного течения Пуазейля тензорно нелинейной жидкости (названной позднее жидкостью Рейнера – Ривлина) в трубе некругового сечения.

Рассмотрим уравнение (4.2) во всем пространстве R^3 без оси z при $t > 0$ и положим $k(t) \equiv 0$. В качестве начального и одного из граничных условий примем следующие требования:

$$r = \infty\colon v_z = V_0 > 0, \qquad t = 0\colon v_z = V_0. \tag{4.5}$$

Точное условие при $r \to 0$ в каждой задаче будет оговорено особо. Пока же укажем возможные формы записи этого условия:

$$\lim_{r\to 0}\left(r^{\alpha} v_z(r,t)\right) = -C \quad \text{либо} \quad \lim_{r\to 0}\frac{v_z(r,t)}{\ln r} = C, \tag{4.6}$$

где $C > 0$ — заданная константа, а α — некоторый показатель вырожденности, зависящий от выбранной модели среды.

Бесконечная отрицательная скорость оси z при $t > 0$, естественно, рассогласуется с начальным условием (4.5). Поэтому решение начально-краевой задачи (4.2), (4.5), (4.6) призвано моделировать диффузию осесимметричного, или цилиндрического, вихревого слоя при $r > 0$, $t > 0$ и описать бесконечный разгон среды (а не торможение, как это было для плоскопараллельного сдвига) в сторону, противоположную ее начальному поступательному движению.

По смыслу задачи неравенство $v_{z,r} \geqslant 0$ должно выполняться всюду в области течения в любой момент времени. Уравнение (4.2) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\left[\mu_1\left(\frac{v_{z,r}}{\sqrt{2}}\right) v_{z,r}\right] = \rho v_{z,t} \tag{4.7}$$

для степенной материальной функции μ_1 (3.3) и принятых ранее обозначений перепишется следующим образом:

$$\nu\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\left(v_{z,r}^{\gamma+1}\right) = v_{z,t}, \quad \gamma > -1. \tag{4.8}$$

Замена типа (3.5), где вместо v_1 и x_2 надо взять v_z и r, приводит к обыкновенному уравнению

$$\left(\frac{d}{d\xi} + \frac{1}{\xi}\right)\left[(u')^{\gamma+1}\right] + \frac{\xi u'}{\gamma+2} = 0, \qquad u(\infty) = 1, \tag{4.9}$$

для безразмерной функции $u(\xi)$, $\xi \geqslant 0$.

В случае линейной сдвиговой вязкости ($\gamma = 0$) интеграл задачи (4.9)

$$u(\xi) = 1 - c_0\int_{\xi}^{\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2/4}\,\frac{d\eta}{\eta}, \qquad v_{z,r}(r,t) = \frac{c_0 V_0}{r}\,\mathrm{e}^{-r^2/(4\nu t)} \tag{4.10}$$

дает функцию u с логарифмической особенностью в нуле и содержит положительную константу c_0, которую необходимо задать граничным условием

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{u(\xi)}{\ln\xi} = c_0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{r\to 0}\frac{v_z(r,t)}{\ln(r/\sqrt{\nu t})} = c_0 V_0, \tag{4.11}$$

являющимся безразмерным аналогом (4.6). Решение (4.11) определено во всех точках $0 < \xi < \infty$. Это означает, что сдвиговое течение при $\gamma = 0$ реализуется в любой момент времени $t > 0$ во всем пространстве $r > 0$ без оси z.

В общем случае уравнение (4.9) сводится к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными для функции $\xi \cdot (u')^{\gamma+1}(\xi)$. Его интеграл зависит от показателя γ $(\gamma > -1)$:

$$u'(\xi) = \frac{1}{\xi^{1/(1+\gamma)}} \left[1 + \gamma a(\gamma) - \frac{\gamma}{(2+\gamma)(2+3\gamma)} \xi^{\frac{2+3\gamma}{1+\gamma}} \right]^{1/\gamma}, \quad \gamma \neq 0; -\frac{2}{3}, \tag{4.12}$$

$$u'(\xi) = \frac{1}{\xi^3} \left(\frac{2}{3(\ln \xi - \ln \xi_0(-2/3))} \right)^{3/2}, \quad \gamma = -\frac{2}{3}, \tag{4.13}$$

где $\xi_0(-2/3)$ и $a(\gamma)$ — постоянные интегрирования. При $\gamma \to 0$ выражение в правой части (4.12) стремится к предельному профилю $u'|_{\gamma=0}(\xi)$, вытекающему из (4.10), если положить $a(0) = \ln c_0$.

Интегрируемость либо неинтегрируемость в нуле и на бесконечности профилей (4.12), (4.13), а также необходимость выполнения неравенства $u' \geqslant 0$, следующего из $v_{z,r} \geqslant 0$, обусловливают различное качественное поведение решений при разных γ и, прежде всего, по-разному сужают область определения с положительной полуоси $\xi \in (0; \infty)$ до интервала $\xi \in (\xi_0(\gamma), \xi_\infty(\gamma))$. Граничные условия из точек $\xi = 0$ и $\xi = \infty$ переносятся в точки $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_\infty$ соответственно (для некоторых интервалов показателя γ может быть $\xi_0(\gamma) \equiv 0$ и $\xi_\infty(\gamma) \equiv \infty$).

Область $0 < \xi < \xi_0$, отвечающая расширяющемуся со временем цилиндру $r < \xi_0(V_0^\gamma \nu t)^{1/(2+\gamma)}$, движется с бесконечной отрицательной скоростью, которой обладала в момент $t = 0$ лишь ось z. Область $\xi > \xi_\infty$, т. е. внешность $r > \xi_\infty(V_0^\gamma \nu t)^{1/(2+\gamma)}$ расширяющегося со временем цилиндра, движется поступательно со скоростью V_0; начальное возмущение оси z туда еще не дошло. Радиальные скорости обоих описанных цилиндрических фронтов со временем убывают пропорционально $t^{-(1+\gamma)/(2+\gamma)}$.

а) $-1 < \gamma < -2/3$. В этом случае $\xi_\infty(\gamma) \equiv \infty$,

$$\lim_{\xi \to \xi_0 + 0} (\xi - \xi_0)^{-(1+\gamma)/\gamma} u(\xi) = -c < 0. \tag{4.14}$$

Граница ξ_0 и постоянная интегрирования a в (4.12) определяются из системы

$$\begin{gathered} \xi_0 = \left(\frac{\gamma}{(1+\gamma a)(2+\gamma)(2+3\gamma)} \right)^{-\frac{1+\gamma}{2+3\gamma}}, \\ -c = \frac{\gamma}{1+\gamma} \left(-\frac{1+\gamma}{(1+\gamma a)(2+3\gamma)} \right)^{-1/\gamma} \xi_0^{-\frac{1+2\gamma}{\gamma(1+\gamma)}}, \end{gathered} \tag{4.15}$$

первое уравнение которой соответствует обращению в нуль квадратной скобки в (4.12), а второе выводится из граничного условия (4.14).

Итак, в области своего определения $\xi_0(\gamma) < \xi < \infty$ решение в случае а) имеет вид

$$u(\xi) = 1 - \int\limits_{\xi}^{\infty} \left[1 + \gamma a(\gamma) - \frac{\gamma}{(2+\gamma)(2+3\gamma)} \eta^{\frac{2+3\gamma}{1+\gamma}} \right]^{1/\gamma} \frac{d\eta}{\eta^{1/(1+\gamma)}}. \tag{4.16}$$

б) $\gamma = -2/3$. По-прежнему, $\xi_\infty(\gamma) \equiv \infty$, но теперь

$$\lim_{\xi \to \xi_0(-2/3)+0} \sqrt{\xi - \xi_0(-2/3)}\, u(\xi) = -c < 0 \quad \Longrightarrow \quad c = 2\left(\frac{2}{3\xi_0(-2/3)}\right)^{3/2}.$$

В области своего определения $\xi_0(-2/3) < \xi < \infty$ решение таково:

$$u(\xi) = 1 - \int_{\xi}^{\infty} \left(\frac{2}{3(\ln\eta - \ln\xi_0(-2/3))}\right)^{3/2} \frac{d\eta}{\eta^3}. \tag{4.17}$$

в) $-2/3 < \gamma < 0$. Тогда $\xi_0(\gamma) \equiv 0$, $\xi_\infty(\gamma) \equiv \infty$,

$$\lim_{\xi \to +0} \xi^{-\gamma/(1+\gamma)}\, u(\xi) = -c < 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 + \gamma a = \left(-\frac{c\gamma}{1+\gamma}\right)^{\gamma}. \tag{4.18}$$

На всей положительной полуоси $\xi > 0$ решение записывается в виде (4.16).

г) Случай $\gamma = 0$ изучен ранее (см. профили (4.10)). Как и в п. в), для него $\xi_0(\gamma) \equiv 0$, $\xi_\infty(\gamma) \equiv \infty$.

д) $\gamma > 0$. Имеем $\xi_0(\gamma) \equiv 0$,

$$\xi_\infty = \left(\frac{\gamma}{(1+\gamma a)(2+\gamma)(2+3\gamma)}\right)^{-\frac{1+\gamma}{2+3\gamma}}, \quad u(\xi_\infty) = 1. \tag{4.19}$$

Особенность в нуле у функции u' (4.12) интегрируемая, поэтому второе граничное условие записывается просто: $u(0) = 0$, т. е. продольная скорость ограничена. Данный случай качественно аналогичен п. б) раздела 3.

Решение $u(\xi)$ в области своего определения $0 < \xi < \xi_\infty(\gamma)$ следующее:

$$u(\xi) = 1 - \int_{\xi}^{\xi_\infty} \left[1 + \gamma a(\gamma) - \frac{\gamma}{(2+\gamma)(2+3\gamma)}\, \eta^{\frac{2+3\gamma}{1+\gamma}}\right]^{1/\gamma} \frac{d\eta}{\eta^{1/(1+\gamma)}}. \tag{4.20}$$

Как и в (3.13), функция $a(\gamma)$ находится из (4.20) в результате подстановки $u(0) = 0$.

Все рассмотренные в этом разделе автомодельные диффузионно-вихревые решения, описывающие осесимметричный (r, z)-сдвиг среды, могут быть обобщены на случай отличного от нуля перепада давления $k(t)$ вдоль оси z. Выбирая для степенного закона вязкости (3.3) функцию $k(t)$ в виде (3.15), придем вместо (4.9) к следующему уравнению для $u(\xi)$:

$$\left(\frac{d}{d\xi} + \frac{1}{\xi}\right)\left[(u')^{\gamma+1}\right] + \frac{\xi u'}{\gamma + 2} = -k_0. \tag{4.21}$$

5. Заключение

Осуществленный в работе анализ автомодельных диффузионно-вихревых решений в тензорно нелинейных средах показал разнообразие количественного и качественного поведения решений даже для одного степенного закона сдвиговой вязкости. Наряду с плоскопараллельным и осесимметричным (r, z)-сдвиговыми течениями было бы интересно построить серию точных решений, соответствующих (r, θ)-сдвигам, или обобщенной вихревой нити [18, 19], когда $d = v_{r\theta}$ в (2.1).

Список литературы

[1] Рейнер М. Реология. М.: Мир, 1965. 224 с. [Reiner M. Rheology // Handbuch der Physik: Bd. 6: Elastizität und Plastizität / Hrsg. von S. Flügge. Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer, 1958. P. 434–550.]

[2] Малинин Н. И. К вопросу об эффекте Вайссенберга // Коллоидный журнал, 1960, т. 22, № 2, с. 201.

[3] Rivlin R. S., Ericksen J. L. Stress-deformation relations for isotropic materials // J. Rational Mech. Anal., 1955, vol. 4, no. 2, pp. 323–425.

[4] Rivlin R. S. The formulation of constitutive equations in continuum physics: Part 1 // Arch. Ration. Mech. Anal., 1960, vol. 4, no. 2, pp. 129–144;
Rivlin R. S. The formulation of constitutive equations in continuum physics: Part 2 // Arch. Ration. Mech. Anal., 1960, vol. 4, no. 3, pp. 262–272.

[5] Николаевский В. Н. Механика геоматериалов. Усложненные модели // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. Т. 19. М.: ВИНИТИ, 1987. С. 148–176.

[6] Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости: Гидромеханика, перемешивание и теплообмен. М.: Мир, 1964. 216 с. [Wilkinson W. L. Non-Newtonian fluids: Fluid mechanics, mixing and heat transfer. London: Pergamon Press, 1960. 138 pp.]

[7] Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 312 с. [Astarita G., Marrucci G. Principles of non-Newtonian fluid mechanics. London: McGraw Hill, 1974. 289 pp.]

[8] Бибик Е. Е. Реология дисперсных систем. Л.: ЛГУ, 1981. 172 с.

[9] Литвинов В. Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. М.: Наука, 1982. 374 с.

[10] Брутян М. А., Крапивский П. Л. Гидродинамика неньютоновских жидкостей // Итоги науки и техники. Сер. Комплексные и специальные разделы механики. Т. 4. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 3–98.

[11] Андреев В. К., Бублик В. В., Бытев В. О. Симметрии неклассических моделей гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2003. 352 с.

[12] Скульский О. И., Аристов С. Н. Механика аномально вязких жидкостей. М.–Ижевск: РХД, 2004. 156 с.

[13] Мирошниченко Д. С. Влияние неньютоновских свойств дисперсионных жидкостей на реологическое поведение разбавленных суспензий: Дисс.... канд. физ.-мат. наук. 01.02.05. Киев: КНУ им. Т. Г. Шевченко, 2000. 129 с.

[14] Воротников Д. А. О движении нелинейно-вязкой жидкости в R^n // Вестн. Воронежского ГУ. Сер. Физика, математика, 2002, № 1, с. 102–120.

[15] Эскин Л. Д. Уравнения, описывающие динамику неньютоновской жидкости с реологическим законом Рейнера – Ривлина: 1. Групповой анализ // Изв. вузов. Математика, 2004, № 3, с. 64–72;
Эскин Л. Д. Уравнения, описывающие динамику неньютоновской жидкости с реологическим законом Рейнера – Ривлина: 2. Инвариантные решения // Изв. вузов. Математика, 2004, № 4, с. 73-82.

[16] Хазем Али Аттиа. Численное исследование течения и теплоотдачи к пористому диску, вращающемуся в жидкости Рейнера – Ривлина // ПМТФ, 2005, т. 46, № 1, с. 85–95.

[17] Нигматулин Р. И., Николаевский В. Н. Диффузия вихря и сохранение момента количества движения в динамике неполярных жидкостей // ПММ, 1970, т. 34, вып. 2, с. 318–323.

[18] Георгиевский Д. В. Автомодельные решения в задаче об обобщенной диффузии вихря // Изв. РАН. МЖГ, 2007, № 2, с. 3–12.

[19] Георгиевский Д. В. Обобщенная диффузия вихря: автомодельность и задача Стефана // Соврем. математ. и её прилож., 2009, т. 62, с. 28–46.

[20] Лохин В. В., Седов Л. И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, с. 393–417.

[21] Спенсер Э. Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с. [Spencer A. J. M. Theory of invariants // Continuum physics / Ed. by A. C. Eringen. Vol. 1, pp. 239–353. New York–London: Academic Press, 1971.]

[22] Победря Б. Е. Лекции по тензорному анализу. М.: МГУ, 1986. 263 с.

[23] Георгиевский Д. В. Тензорно-нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // Успехи механики, 2002, т. 1, № 2, с. 150–176.

[24] Никабадзе М. У. Некоторые вопросы тензорного исчисления: В 2-х частях. М.: ЦПИ МГУ, 2007. 86 с.; 94 с.

[25] Димитриенко Ю. И. Механика сплошной среды: Т. 1: Тензорный анализ. М.: МГТУ, 2011. 464 с.

[26] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.

[27] Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 256 с.

[28] Green A. E., Rivlin R. S. Steady flow of non-Newtonian fluids through tubes // Quart. Appl. Math., 1956, vol. 14, no. 3, pp. 299–308.

Tensor-nonlinear shear flows: Material functions and the diffusion-vortex solutions

Dimitri V. Georgievskii

M. V. Lomonosov Moscow State University
Vorob'evy gory, Moscow, 119899, Russia
georgiev@mech.math.msu.su

This work deals with tensor-nonlinear constitutive relations connecting the deviators of stress tensor and strain rate tensor in incompressible isotropic media which are called in continuum mechanics as Reiner – Rivlin fluids. The connections of quadratic and cubic invariants of two tensors, where two material functions involve, are presented. The main attention is given to one-dimensional shear flows in various curvilinear coordinate systems. The scheme of obtaining of the material functions for shear on the basis of the steady Poiseuille flow in a plane layer is described. The self-similar solutions corresponding to the generalized diffusion of vortex layer both in plane and axially symmetric cases are derived.

MSC 2010: 76A05
Keywords: tensor nonlinearity, invariant, material function, constitutive relation, Reiner – Rivlin fluid, shear, diffusion of vortex, vortex layer

Received July 5, 2011, accepted August 31, 2011
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 451–463 (Russian)