



УДК: 532.517

MSC 2010: 76B47, 34D20, 70K30

Об устойчивости томсоновского вихревого пятиугольника внутри круга

Л. Г. Куракин

Исследуется устойчивость стационарного вращения системы пяти одинаковых точечных вихрей, расположенных в вершинах правильного пятиугольника внутри круговой области. Основным результатом работы — доказательство теорем, анонсированных автором в заметке (Докл. РАН, 2004, т. 399, № 1, с. 52).

Ключевые слова: точечный вихрь, стационарное движение, устойчивость, резонанс

Введение

Система точечных вихрей исследуется давно (см. обзоры [1–5]). Эта простейшая модель вихревой динамики кажется наиболее доступной для полного и глубокого анализа. Значительный прогресс в этой области достигнут в последние годы благодаря применению методов современной теории динамических систем. Здесь мы имеем в виду прежде всего вопросы качественной теории: устойчивость, бифуркации, интегрируемость, неинтегрируемость, возникновение и развитие хаотических движений и др.

Получено 17 июля 2011 года

После доработки 29 августа 2011 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральных целевых программ: «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы» (госконтракт № 16.516.11.6106), «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № 14.740.11.0877, Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-05-00646, 11-05-01138, 11-05-91052) и Американского фонда гражданских исследований и развития (АФГИР/CRDF), грант RUM1-2943-RO-09.

Куракин Леонид Геннадиевич

kurakin@math.rsu.ru

Факультет математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет
344090, Россия, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

Южный математический институт ВЦ РАН

362027, Россия, г. Владикавказ, ул. Маркуса, д. 22



Вместе с тем, многие классические конфигурации систем точечных вихрей долгое время оставались и остаются недостаточно исследованными.

Например, лишь сравнительно недавно была окончательно решена в точной нелинейной постановке проблема Кельвина (В. Томсона) об устойчивости стационарного вращения томсоновского вихревого многоугольника — системы одинаковых точечных вихрей, расположенных на плоскости в вершинах правильного n -угольника [6–8], завершено исследование устойчивости всех правильных вихревых конфигураций на сфере (см. работы [9, 10] и имеющиеся там ссылки).

В заметке [11] были анонсированы результаты нелинейного анализа устойчивости томсоновских вихревых n -угольников внутри круговой области. После работы Хавелока [12], исследовавшего задачу в линейной постановке, открытые вопросы остались лишь в случаях $n = 2, \dots, 6$. При их анализе в точной нелинейной постановке оказалась важна четность числа вихрей. Четный случай $n = 2, 4, 6$ удалось исследовать в рамках единого подхода (подробное доказательство приведено в работе [13]). Каждый из случаев $n = 3, 5$ распался на серию задач, потребовавших индивидуального подхода, в частности, применения КАМ-теории и нелинейного анализа всех резонансов до четвертого порядка включительно, встречающихся в задаче. Случай вихревого треугольника детально разобран в работе [14] и ее англоязычной версии [15].

Основная цель данной работы — доказательство теорем, анонсированных в заметке [11], для томсоновского вихревого пятиугольника.

1. Постановка задачи и формулировка результатов

Движение системы n точечных вихрей на плоскости внутри круга радиуса R описывается уравнениями (см., например, [16])

$$\dot{\bar{z}}_k = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{\varkappa_j}{z_k - z_j} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \frac{\varkappa_j}{z_k - \hat{z}_j}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Здесь $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \dots, n$ — комплексные переменные, x_k, y_k — декартовы координаты k -го вихря, \varkappa_k — его интенсивность, $\hat{z}_k = \frac{R^2}{\bar{z}_k}$ — отражение k -го вихря границей круга.

Система (1.1) — гамильтонова, с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \varkappa_j \varkappa_k \ln [(z_j - z_k)(\bar{z}_j - \bar{z}_k)] + \frac{1}{8\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \varkappa_j \varkappa_k \ln [(R^2 - z_j \bar{z}_k)(R^2 - \bar{z}_j z_k)]. \quad (1.2)$$

Ее суммарный момент инерции

$$M = \sum_{k=1}^n \varkappa_k |z_k|^2. \quad (1.3)$$



Далее будем полагать, что все вихри имеют одинаковую интенсивность \varkappa . Система (1.1) имеет точное решение

$$z_k = e^{i\omega t} u_k, \quad u_k = R_0 e^{2\pi i(k-1)/n}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.4)$$

$$\omega = \frac{\varkappa}{4\pi R_0^2} \left(\frac{2n}{1-p^n} - n - 1 \right), \quad p = \frac{R_0^2}{R^2} < 1.$$

Таким образом, система одинаковых вихрей, расположенных на окружности радиуса R_0 в вершинах вписанного правильного n -угольника, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \omega(p)$.

Заметим, что режим стационарного вращения (1.4) при всех n заведомо неустойчив по Ляпунову. Действительно, если в начальный момент $t = 0$ возмутить правильный вихревой n -угольник так, чтобы он остался правильным, но другого размера, то дальнейшее движение по-прежнему будет равномерным вращением, но с другой угловой скоростью. В результате, как бы ни было мало такое возмущение сначала, со временем оно станет порядка диаметра многоугольника. Этой очевидной неустойчивости соответствует линейно растущее решение линеаризованной системы и жорданова клетка (2×2) -матрицы линеаризации, отвечающая ее нулевому двукратному собственному значению. Такая ситуация обычна для стационарных движений гамильтоновых систем при наличии циклических координат.

Поскольку в случае перманентного вращения устойчивость по Ляпунову невозможна, уточним определения. Ниже замена переменных переходим от системы (1.1) к гамильтоновой системе с циклической координатой. В теории устойчивости стационарного движения таких систем, развитой Раусом [17], учитывается, что относительно циклической координаты стационарное движение всегда неустойчиво (возмущения растут линейно со временем). Таким образом, речь должна идти об устойчивости относительно части переменных — позиционных координат и импульсов. Исключая из системы импульс, отвечающий циклической координате, приходим к приведенной гамильтоновой системе. Под *устойчивостью по Раусу* стационарного вращения (1.4) будем понимать устойчивость по Ляпунову положения равновесия этой приведенной системы. Соответственно, неустойчивость вихревого многоугольника будет означать неустойчивость по Ляпунову этого положения равновесия.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [8] и ее русскоязычном варианте [18] развита общая теория устойчивости стационарных движений динамической системы с группой симметрии. Изложены специфические для стационарных движений определения устойчивости и неустойчивости. При этом консервативность системы не предполагается, так что результаты применимы не только к различным режимам вихревых течений идеальной жидкости, но и, например, к движениям вязкой жидкости. Отметим, что в разделе ПД работ [8, 18] рассмотрены гамильтоновы системы с циклическими переменными и приведены условия, когда развитая общая теория соответствует теории Рауса.

Далее будет использовано и понятие формальной устойчивости по Раусу, которое определяется как формальная устойчивость по Ляпунову приведенной системы. Формальная устойчивость по Ляпунову положения равновесия системы означает (см., например, [23]), что существует степенной ряд, возможно расходящийся, который формально является интегралом системы, достигающий минимума на этом положении равновесия. В случае формальной устойчивости по Раусу неустойчивость по Ляпунову решения (если она существует) не обнаруживается в приведенной системе при учете в ее разложении слагаемых до сколь угодно большого, но конечного порядка.

Применение результатов В. И. Арнольда [30, 33] на отрезке $p \in [a, b]$, изображенном схематично на рисунке 1, позволило доказать устойчивость равновесия приведенной систе-

мы для большинства в смысле меры Лебега начальных данных. Как известно (ссылки см. в работе [23]), это не исключает неустойчивость по Ляпунову.

Ниже для удобства читателя сначала формулируются результаты работ [11, 13–15] об устойчивости томсоновского вихревого n -угольника внутри круговой области при $n \neq 5$. Затем проводится анализ устойчивости правильного вихревого пятиугольника, результаты которого схематично изображены на рисунке 1. Критические значения параметра p имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} p_{05} &= .3410383818, & a &= .3412172781, & b &= .3429140261, \\ p^* &= .3443792197, & p_{*5} &= .3461008645. \end{aligned} \quad (1.5)$$

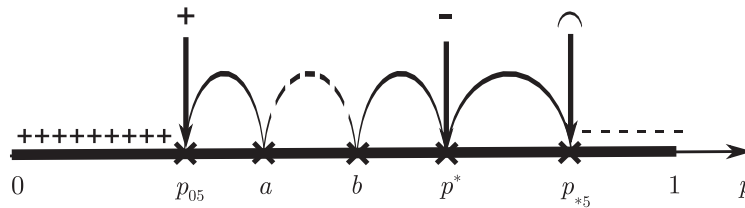


Рис. 1. Критерий устойчивости томсоновского вихревого пятиугольника: $p \in (0, p_{05}]$ — устойчивость по Раусу (++); $p \in (p_{05}, a) \cup (b, p^*) \cup (p^*, p_{*5}]$ — формальная устойчивость по Раусу (сплошная дуга); $p \in [a, b]$ — устойчивость по Раусу для большинства начальных условий (пунктирная дуга); $p = p^*$ и $p \in (p_{*5}, 1)$ — неустойчивость (--). Критические значения параметра $p = \frac{R_0^2}{R^2}$ приведены в (1.5).

2. Устойчивость правильного вихревого n -угольника

Замена переменных

$$z_k(t) = e^{i\omega t} v_k(t)$$

приводит уравнения (1.1) к гамильтоновой системе:

$$\dot{\bar{v}}_k = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{\varkappa}{v_k - v_j} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \frac{\varkappa}{v_k - \bar{v}_j} + i\omega \bar{v}_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

с гамильтонианом

$$E(v) = H(v) + \frac{\omega}{2} M(v), \quad M = \varkappa \sum_{k=1}^n |v_k|^2, \quad v = (v_1, \dots, v_n) \in C^n. \quad (2.2)$$

На каждой плоскости переменных v_k введем квазиполярные координаты и запишем v_k в виде

$$v_k = R_0 \sqrt{2\left(\frac{1}{2} + r_k\right)} e^{i\left(\frac{2\pi}{n}(k-1) + \theta_k\right)}. \quad (2.3)$$

В переменных $r = (r_1, \dots, r_n)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ уравнение (2.1) после замены $t \rightarrow t/R_0^2$ принимает вид

$$\dot{r}_k = \frac{\partial E}{\partial \theta_k}(v(r, \theta)), \quad \dot{\theta}_k = -\frac{\partial E}{\partial r_k}(v(r, \theta)). \quad (2.4)$$



Гамильтониан E в новых переменных (r, θ) имеет вид

$$\begin{aligned}
 E = & -\frac{\varkappa^2}{4\pi} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \ln \left(R_0^2 \left[2(1 + r_k + r_j) - 2\sqrt{(1 + 2r_k)(1 + 2r_j)} \cos \left(\frac{2\pi(k - j)}{n} + \theta_{kj} \right) \right] \right) + \\
 & + \frac{\varkappa^2}{8\pi} \sum_{j,k=1}^n \ln \left(R_0^4 \left[(1 + 2r_k)(1 + 2r_j) + \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} \sqrt{(1 + 2r_k)(1 + 2r_j)} \cos \left(\frac{2\pi(k - j)}{n} + \theta_{kj} \right) \right] \right) + \\
 & + \frac{\omega}{2} R_0^2 \sum_{k=1}^n (1 + 2r_k), \quad \theta_{kj} \stackrel{def}{=} \theta_k - \theta_j.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Разложим функцию $E(v(\rho))$, где $\rho \stackrel{def}{=} (r, \theta)$, в ряд Тейлора в окрестности нулевого решения:

$$E(v(\rho)) = \frac{\varkappa^2}{4\pi} (E_0 + E_2(v(\rho)) + E_3(v(\rho)) + E_4(v(\rho)) + \dots).
 \tag{2.6}$$

Многоточием обозначены слагаемые выше четвертой степени. Квадратичная форма E_2 представима в виде

$$E_2 = (S\rho, \rho), \quad S = \begin{pmatrix} F_1 & \frac{1}{2}G_0 \\ -\frac{1}{2}G_0 & F_2 \end{pmatrix}, \quad \rho = (r, \theta),
 \tag{2.7}$$

а матрица линеаризации системы (2.4) на нулевом решении имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} -G_0 & 2F_2 \\ -2F_1 & -G_0 \end{pmatrix}.
 \tag{2.8}$$

Матрицы F_1, F_2, G_0 являются циркулянтами (см., например, [19], а также пункт 5.1 работы [14]), причем F_1, F_2 — симметрические матрицы, а G_0 — кососимметрическая. Они выписаны в работе Хавелока [12] и являются полиномами

$$F_m \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n-1} f_{mk} \mathbb{C}^k, \quad G_0 \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n-1} g_{0k} \mathbb{C}^k$$

от циклической матрицы \mathbb{C} :

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.
 \tag{2.9}$$

Коэффициенты f_{mk} и g_{0k} имеют вид

$$f_{10} = -\frac{n^2-1}{12} - (n-1) - \frac{n^2 p^n}{(1-p^n)^2} + \frac{2n}{1-p^n} - \frac{2p^2-3p+2}{(1-p)^2},$$

$$f_{1k} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \cos \frac{2\pi k}{n}} - \frac{p \left((1+p^2) \cos \frac{2\pi k}{n} - 2p \right)}{\left(1 - 2p \cos \frac{2\pi k}{n} + p^2 \right)^2}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$f_{20} = \frac{n^2-1}{12} + \frac{n^2 p^n}{(1-p^n)^2} - \frac{p}{(1-p)^2},$$

$$f_{2k} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \cos \frac{2\pi k}{n}} - \frac{p \left((1+p^2) \cos \frac{2\pi k}{n} - 2p \right)}{\left(1 - 2p \cos \frac{2\pi k}{n} + p^2 \right)^2}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$g_{0k} = \frac{2p(1-p^2) \sin \frac{2\pi k}{n}}{\left(1 - 2p \cos \frac{2\pi k}{n} + p^2 \right)^2}.$$

Собственные значения λ_{1k} , λ_{2k} и $i\lambda_{0k}$ ($k = 1, \dots, n$) матриц F_1 , F_2 и G_0 , соответственно, также выписаны в работе Хавелока [12]¹:

$$\lambda_{1k} = -\frac{1}{2}k(n-k) - (n+1) - \frac{n^2 p^{n-k} (1+p^k)^2}{2(1-p^n)^2} - \frac{nk(p^k - p^{n-k})}{2(1-p^n)} + \frac{2n}{1-p^n}, \quad (2.10)$$

$$\lambda_{2k} = \frac{1}{2}k(n-k) - \frac{nk(p^k - p^{n-k})}{2(1-p^n)} - \frac{n^2 p^{n-k} (1-p^k)^2}{2(1-p^n)^2}, \quad (2.11)$$

$$\lambda_{0k} = \frac{nk(p^k + p^{n-k})}{1-p^n} - \frac{n^2 p^{n-k} (1-p^{2k})}{(1-p^n)^2}. \quad (2.12)$$

Собственные значения матрицы S получаем, собирая корни полиномов:

$$\Lambda^2 - (\lambda_{1k} + \lambda_{2k})\Lambda + \lambda_{1k}\lambda_{2k} - \frac{1}{4}\lambda_{0k}^2, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

Собственные значения матрицы линеаризации (2.8) вычисляются по формулам [12]

$$\sigma_k^\pm = -i\lambda_{0k} \pm 2\sqrt{-\lambda_{1k}\lambda_{2k}}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.14)$$

Следующая теорема обосновывает метод линеаризации в задаче устойчивости вихревого n -угольника. Величины p_{0k} , p_{*k} заданы в таблице 1.

Теорема 1. *Стационарное вращение (1.4) правильного вихревого n -угольника устойчиво по Раусу в случаях*

1°. $0 < p < p_{*n}$ при четном $n = 2, 4, 6$;

2°. $0 < p < p_{0n}$ для $n = 3, 5$, а также при $n = 1$,

и неустойчиво, когда $n \geq 7$ или $p_{*n} < p < 1$ при любом $n = 2, \dots, 6$.

¹По поводу опечаток работы [12] см. сноску 22 работы [22].



Таблица 1. Критические значения p_{*n} и p_{0n} — корни полиномов P_n и Q_n соответственно

$P_2 = 7p^3 - 3p^2 + 5p - 1$	$p_{*2} \approx .2137403629$
$P_3 = 10p^6 + 3p^5 + 6p^4 + 10p^3 + 6p^2 + 3p - 2$	$p_{*3} \approx 0.3212811546$
$Q_3 = 5p^6 + 9p^5 + 5p^3 + 9p^2 - 1$	$p_{03} \approx 0.3040641646$
$P_4 = 7p^6 + p^4 + 9p^2 - 1$	$p_{*4} \approx .3298399891$
$P_5 = 18p^{10} + 10p^8 + 15p^7 + 34p^5 + 15p^3 + 10p^2 - 2$	$p_{*5} \approx 0.3461008645$
$Q_5 = 27p^{12} + 81p^{11} + 132p^{10} + 135p^9 + 90p^8 + 96p^7 + 153p^6 + 196p^5 + 165p^4 + 60p^3 + 2p^2 - 9p - 3$	$p_{05} \approx .3410383818$
$P_6 = 23p^9 + 13p^6 + 37p^3 - 1$	$p_{*6} \approx .2991212951$

Подробное аналитическое доказательство этой теоремы см. в работах [14, 15] вместе со ссылками на работы [12, 22]. Условия неустойчивости были получены Хавелоком [12]. Условия устойчивости численно установил Кэмпбел [22], которой применял метод «энергия–момент».

Следующие две теоремы требуют для своего доказательства учета нелинейных слагаемых системы.

Теорема 2 ([11, 13–15]). *Стационарное вращение (1.4) правильного вихревого n -угольника устойчиво по Раусу в случаях*

- 1) $p = p_{*n}$ при любом $n = 2, 3, 4, 6$;
- 2) $p_{03} < p < p_{*3}$ для $n = 3$
и неустойчиво в резонансном случае
- 3) $n = 3, p = p_{03}$.

Подробное доказательство для четного n приведено в работе [13], а для $n = 3$ в [14] и ее англоязычной версии [15].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналоги теорем 1 и 2 для правильного вихревого n -угольника вне круга доказаны в работах [20, 21].

Доказательство следующей теоремы является главной целью нашей работы. Критические значения параметра p заданы в (1.5).

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения об устойчивости стационарного вращення (1.4) правильного вихревого пятиугольника (см. рис. 1):*

1. *формальная устойчивость по Раусу в случае*

$$p \in (p_{05}, a) \cup (b, p^*) \cup (p^*, p_{*5}); \tag{2.15}$$

2. *устойчивость по Раусу для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий, когда $p \in [a, b]$;*



3. формальная устойчивость по Раусу на интервале $p \in [a, b]$ почти для всех значений p ; исключения, быть может, составляют значения p , при которых выполняется хотя бы одно резонансное соотношение вида:

$$n_1\sigma_1^+ + n_3\sigma_3^+ + n_4\sigma_4^+ = n_2\sigma_2^+, \quad \sum_{k=1}^4 n_k \geq 5, \quad (2.16)$$

где (n_1, n_2, n_3, n_4) — произвольный ненулевой вектор с целочисленными неотрицательными компонентами;

4. устойчивость по Раусу в резонансном случае $p = p_{05}$, формальная устойчивость по Раусу при $p = p_{*5}$ и неустойчивость в резонансном случае $p = p^*$.

Доказательство этой теоремы приведено в следующем разделе 3. В п. п. 3.1 проводится нормализация квадратичной части гамильтониана и построение приведенной системы. Доказательству утверждений 1–3 посвящен п. п. 3.2. Далее в п. п. 3.3–3.5 последовательно исследуются резонансные случаи, которым отвечают значения $p = p_{*5}, p = p_{05}, p = p^*$.

3. Доказательство теоремы 3 об устойчивости вихревого пятиугольника

3.1. Нормализация квадратичной части гамильтониана и построение приведенной системы

Собственные значения $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}$ и $i\lambda_{0k}$ ($k = 1, \dots, 5$) матриц F_1, F_2 и G_0 задаются выражениями (2.10)–(2.12) при $n = 5$.

Матрицы F_1, F_2 имеют общий собственный базис

$$h_m = (1, \cos(m\alpha), \dots, \cos(4m\alpha))^T, \quad h_{5-m} = (0, \sin(m\alpha), \dots, \sin(4m\alpha))^T, \\ h_5 = (1, 1, 1, 1, 1)^T, \quad m = 1, 2, \quad \alpha = \frac{2\pi}{5},$$

так что

$$F_j h_k = \lambda_{jk} h_k, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots, 5.$$

Для матрицы G_0 выполняются соотношения

$$G_0 h_m = -\lambda_{0m} h_{5-m}, \quad G_0 h_{5-m} = \lambda_{0m} h_m, \quad G_0 h_5 = 0.$$

Собственные значения матрицы линеаризации (2.8) вычисляются по формулам (2.14). Все они лежат на мнимой оси, когда выполнено неравенство

$$0 < p \leq p_{*5}. \quad (3.1)$$

Если же это условие нарушено, то собственное значение σ_2^+ матрицы линеаризации L лежит в правой полуплоскости: $\operatorname{Re} \sigma_2^+ > 0$.

Критическое значение величины $p = p_{*5}$ находится из условия $\lambda_{12} = 0$, приведено в таблице 1 и является корнем полинома P_5 .

Пусть выполнено условие $p \in (0, p_{*5})$. Введем симплектическую матрицу A нормализующего преобразования квадратичной части гамильтониана E_2 (см., например, [23])



$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\nu_1 h_4 & -\nu_2 h_3 & -\nu_2 h_3 & -\nu_1 h_4 & \frac{h_5}{\sqrt{2\lambda_{15}}} & \nu_1 h_1 & \nu_2 h_2 & -\nu_2 h_2 & -\nu_1 h_1 & h_0 \\ -\frac{h_1}{\nu_1} & -\frac{h_2}{\nu_2} & \frac{h_2}{\nu_2} & \frac{h_1}{\nu_1} & h_0 & -\frac{h_4}{\nu_1} & -\frac{h_3}{\nu_2} & -\frac{h_3}{\nu_2} & -\frac{h_4}{\nu_1} & \sqrt{2\lambda_{15}} h_5 \end{bmatrix}.$$

Здесь $h_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ — нулевой вектор-столбец и участвуют величины

$$\nu_m = \sqrt[4]{\frac{|\lambda_{2m}|}{|\lambda_{1m}|}}, \quad m = 1, 2.$$

Замена переменных

$$(r, \theta)^T = A(\xi, \zeta)^T, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_5), \quad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_5), \quad (3.2)$$

приводит квадратичные слагаемые E_2 разложения (2.6) к нормальной форме

$$E_2(r(\xi, \zeta), \theta(\xi, \zeta)) = \omega_1(\xi_1^2 + \zeta_1^2) - \omega_2(\xi_2^2 + \zeta_2^2) + \omega_3(\xi_3^2 + \zeta_3^2) + \omega_4(\xi_4^2 + \zeta_4^2) + \frac{1}{2}\xi_5^2, \quad (3.3)$$

$$\omega_2 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} \text{Im} \sigma_2^+, \quad \omega_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \text{Im} \sigma_k^+, \quad k = 1, 3, 4. \quad (3.4)$$

Заметим, что ζ_5 — циклическая переменная для полной нелинейной системы с гамильтонианом $E(r(\xi, \zeta), \theta(\xi, \zeta))$. Действительно, величины $\theta_k, k = 1, \dots, 5$ входят в представление (2.5) лишь через разности $\theta_{kj} = \theta_k - \theta_j$, поэтому относительный гамильтониан (2.5) инвариантен относительно замены переменных

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} h_0 \\ h_5 \end{pmatrix},$$

где $\gamma \in R$. Переменной ζ_5 отвечает базисный вектор $\sqrt{\frac{2\lambda_{15}}{5}} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_5 \end{pmatrix}$, следовательно, гамильтониан $E(r(\xi, \zeta), \theta(\xi, \zeta))$ не зависит от ζ_5 .

Полагая $\xi_5 = 0$, получаем приведенный гамильтониан W :

$$W(\xi_1, \dots, \xi_4, \zeta_1, \dots, \zeta_4) = E(r(\xi^0, \zeta^0), \theta(\xi^0, \zeta^0)), \quad (3.5)$$

где $\xi^0 \stackrel{\text{def}}{=} (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, 0)$, $\zeta^0 \stackrel{\text{def}}{=} (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, 0)$.

Введем комплексные переменные z_1, \dots, z_4 , так что

$$\xi_k = \frac{1}{2}(z_k + \bar{z}_k), \quad \zeta_k = -\frac{1}{2}i(z_k - \bar{z}_k), \quad (3.6)$$

и разложим приведенный гамильтониан в ряд Тейлора в окрестности нулевого решения:

$$W = \frac{\varkappa^2}{4\pi}(W_0 + W_2 + W_3 + W_4 + \dots), \quad (3.7)$$

$$W_2 = \omega_1|z_1|^2 - \omega_2|z_2|^2 + \omega_3|z_3|^2 + \omega_4|z_4|^2. \quad (3.8)$$

Здесь многоточием обозначены слагаемые выше четвертой степени. Величины ω_j ($j = 1, \dots, 4$) вычисляются по формулам (3.4), (2.14) и изображены на рисунке 2.



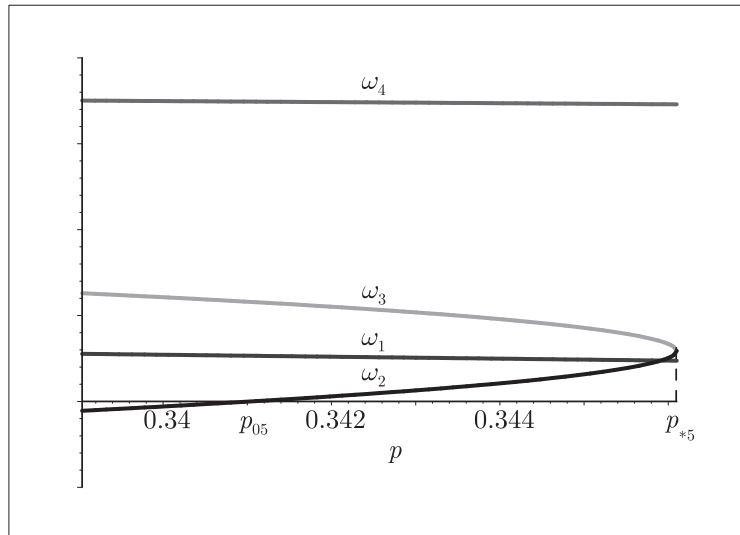


Рис. 2. Зависимость частот $\omega_1, \dots, \omega_4$ от p на отрезке $[p_{05} - 10^{-3}, p_{*5}]$.

Форма третьей степени имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned}
 W_3 &= \operatorname{Re} U_3, \\
 U_3 &= i(a_4 z_4^2 z_2 - a_6 z_3^2 z_4 - a_8 z_2^2 z_1 + a_9 z_1^2 z_3 + \\
 &\quad + a_1 z_4^2 \bar{z}_3 + a_5 z_2^2 \bar{z}_4 + a_7 z_1^2 \bar{z}_2 + a_{11} \bar{z}_1 z_3^2 + \\
 &\quad + a_2 z_1 z_3 \bar{z}_4 - a_3 z_2 z_4 \bar{z}_1 - a_{10} \bar{z}_2 z_4 z_3 - a_{12} z_1 z_2 \bar{z}_3).
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Графики вещественных коэффициентов a_j ($j = 1, \dots, 12$) изображены на рисунке 3. Аналитические выражения для них получены с помощью пакета аналитических вычислений Maple и не приведены здесь ввиду их громоздкости.

Форма четвертой степени W_4 имеет вид

$$\begin{aligned}
 W_4 &= \sum_{1 \leq k \leq j \leq 4} c_{kj} |z_k|^2 |z_j|^2 + \operatorname{Re} U_4, \\
 U_4 &= b_1 z_2^2 \bar{z}_2 z_3 + b_2 z_2 z_3^2 \bar{z}_3 + b_3 z_1^2 \bar{z}_1 z_4 + b_4 z_4^2 z_1 \bar{z}_4 + b_5 z_2^2 z_3^2 + \\
 &\quad + b_6 z_1^2 z_4^2 + b_7 z_2^3 \bar{z}_1 + b_8 z_3^3 \bar{z}_4 + b_9 z_2^3 z_4 + b_{10} z_4^3 \bar{z}_2 + b_{11} z_1^2 z_2 \bar{z}_4 + \\
 &\quad + b_{12} z_2^2 z_4 \bar{z}_3 + b_{13} z_4^2 z_3 \bar{z}_1 + b_{14} z_3^2 z_1 \bar{z}_2 + b_{15} z_4^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 + \\
 &\quad + b_{16} \bar{z}_1^2 z_4 z_3 + b_{17} z_3^2 \bar{z}_2 \bar{z}_4 + b_{18} z_2^2 \bar{z}_1 \bar{z}_3 + b_{19} z_1 \bar{z}_1 z_2 z_3 + b_{20} z_1 z_3 \bar{z}_3 z_4 + \\
 &\quad + b_{21} z_2 z_3 z_4 \bar{z}_4 + b_{22} z_2 \bar{z}_2 z_1 z_4 + b_{23} z_1 z_4 z_2 z_3 + b_{24} z_1 z_4 \bar{z}_2 \bar{z}_3 + \\
 &\quad + b_{25} z_1 z_3^3 + b_{26} z_1^3 \bar{z}_3 + b_{27} z_1^3 z_2 + b_{28} z_4^3 z_3.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Графики величин c_{kj} приведены на рисунке 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В формах W_3, W_4 встречаются те и только те слагаемые

$$z_1^{m_1} z_2^{m_2} z_3^{m_3} z_4^{m_4} \bar{z}_1^{k_1} \bar{z}_2^{k_2} \bar{z}_3^{k_3} \bar{z}_4^{k_4},$$

для которых величина $\sum_{\ell=1}^4 \ell(m_\ell - k_\ell)$ кратна пяти.



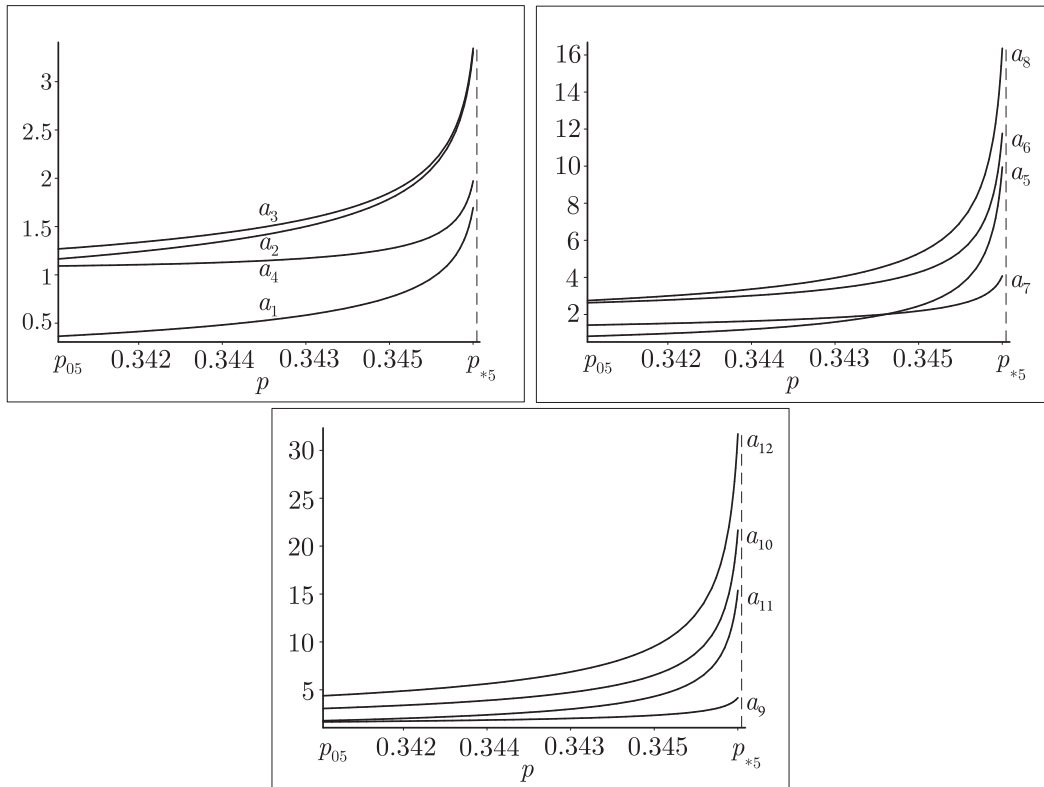


Рис. 3. Зависимость коэффициентов a_1, \dots, a_{12} от p на интервале (p_{05}, p_{*5}) .

Пусть выполнено условие $p \in (0, p_{05})$. Тогда $\omega_j > 0$ ($j = 1, 3, 4$), $\omega_2 < 0$, так что приведенный гамильтониан (3.7) положительно определен. Следовательно, стационарное вращение (1.4) устойчиво по Раусу. Отметим, что так в работах [14, 15] было доказано утверждение теоремы 1 для вихревого пятиугольника.

Далее последовательно рассматриваются случаи (i) $p \in (p_{05}, p_{*5})$, $p \neq p^*$, (ii) $p = p_{*5}$, (iii) $p = p_{05}$, (iv) $p = p^*$. Критические значения параметра p заданы равенствами (1.5).

3.2. Случай общего положения: $p \in (p_{05}, p_{*5})$, $p \neq p^*$

Пусть выполнено условие $p \in (p_{05}, p_{*5})$ (см. рис. 2). Величина p_{05} находится из условия $\omega_2 = 0$ и является корнем полинома Q_5 из таблицы 1. Величины ω_j ($j = 1, \dots, 4$) положительны, так что квадратичная часть (3.8) приведенного гамильтониана является знакопеременной, а собственные значения (2.14) матрицы линеаризации L лежат на мнимой оси. Общая теория устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем говорит, что в рассматриваемой задаче устойчивости имеет место критический случай, т. е. для анализа требуется привлечение нелинейных слагаемых.

Согласно результатам Мозера [34], если коэффициенты квадратичной формы (3.8) не связаны никакими резонансными соотношениями вида

$$n_1\omega_1 - n_2\omega_2 + n_3\omega_3 + n_4\omega_4 = 0, \tag{3.11}$$

где (n_1, n_2, n_3, n_4) — произвольный ненулевой вектор с целочисленными неотрицательными компонентами, то нулевое решение приведенной гамильтоновой системы (3.5) формально устойчиво. Величина $\sum_{k=1}^4 n_k$ называется порядком резонанса (3.11).

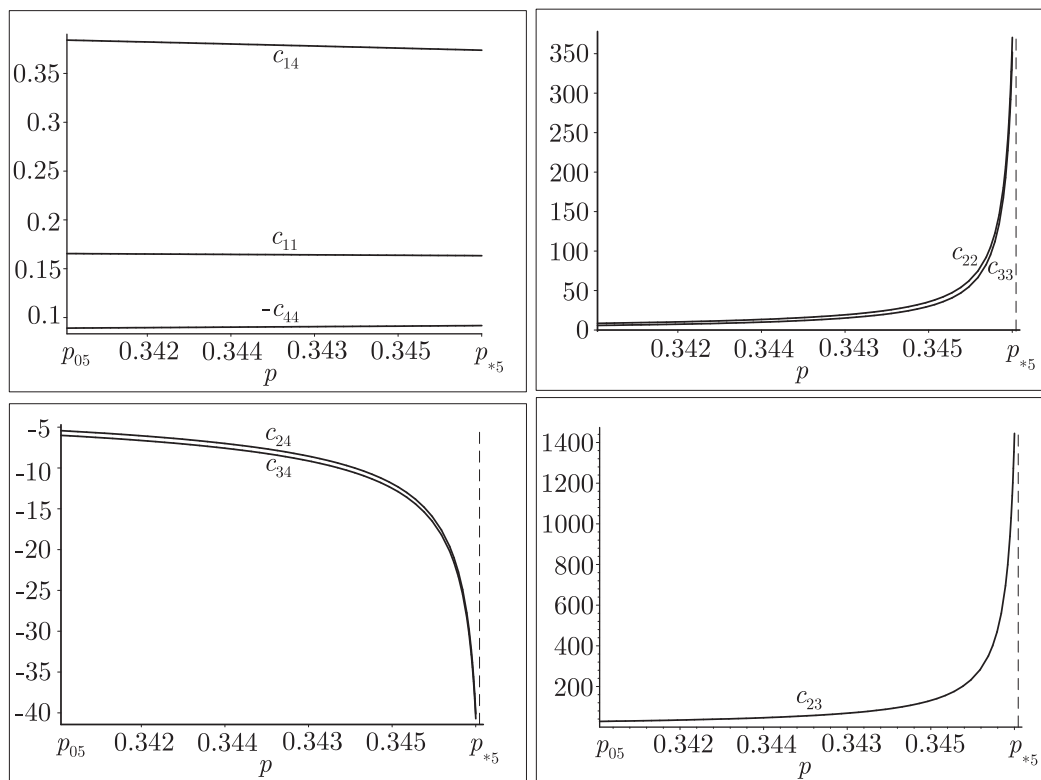


Рис. 4. Графики коэффициентов $c_{kj}(p)$ на интервале (p_{05}, p_{*5}) .

Для дальнейшего применения общей теории устойчивости положений равновесий гамильтоновых систем нормализуем приведенный гамильтониан (3.5) до четвертого порядка включительно. При этом резонансные случаи (3.11) не выше четвертого порядка подлежат отдельному рассмотрению (см., например, обзоры [28, 31]). Они указаны в таблице 2. Три из них разбираются в следующих пунктах. Это случай двукратного нуля ($\omega_2 = 0$), резонанс $1 : 2$ ($\omega_1 = 2\omega_2$), резонанс $1 : 1$ ($\omega_2 = \omega_3$). Ниже будет показано, что в остальных резонансных случаях при нормализации гамильтониана (3.5) до четвертого порядка включительно резонансные нелинейные слагаемые, специфические для этих резонансов, не появляются. Поэтому для них проходят наши дальнейшие рассуждения для нерезонансной ситуации.

Квадратичные слагаемые (3.8) уже имеют нормальную форму. Нормализуем слагаемые третьей степени гамильтониана (3.7).

Существуют разные алгоритмы построения нормальной формы. Согласно алгоритму Биркгофа (см., например, [23, с. 55]) удаляем все слагаемые третьей степени в этом разложении канонической заменой переменных

$$(z_i, \bar{z}_i) \rightarrow (Z_i, \bar{Z}_i), i = 1, \dots, 4,$$

задаваемой системой уравнений

$$\begin{aligned} Z_i &= z_i + \frac{\partial V_3(z_1, z_2, z_3, z_4, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3, \bar{Z}_4)}{\partial \bar{Z}_i}, \\ \bar{z}_i &= \bar{Z}_i + \frac{\partial V_3(z_1, z_2, z_3, z_4, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3, \bar{Z}_4)}{\partial z_i}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Таблица 2. Перечень всех резонансных соотношений (3.11) порядка ≤ 4

Двукратный нуль, диагоналируемый случай	$\omega_2 = 0$	$p = p_{05} = .3410383818$
Резонанс 1 : 2	$\omega_1 = 2\omega_2$	$p = p^* = .3443792197$
	$\omega_3 = 2\omega_2$	$p = .3455248914$
Резонанс 1 : 3	$\omega_1 = 3\omega_2$	$p = .3434991204$
	$\omega_3 = 3\omega_2$	$p = .3448097395$
Резонанс 1 : 1	$\omega_1 = \omega_2$	$p = .3459139152$
	$\omega_3 = \omega_2$	$p = p_{*5} = .3461008645$
Резонанс 1:1:2	$\omega_1 + \omega_3 = 2\omega_2$	$p = .3460792749$

Здесь V_3 — форма третьей степени:

$$\begin{aligned}
 V_3 = & \frac{i}{2} \frac{(\bar{Z}_4^2 z_3 + z_4^2 \bar{Z}_3) a_1}{-2\omega_4 + \omega_3} - \frac{i}{2} \frac{(z_1 z_3 \bar{Z}_4 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 z_4) a_2}{\omega_1 + \omega_3 - \omega_4} - \frac{i}{2} \frac{(z_2 z_4 \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_4 z_1) a_3}{\omega_2 + \omega_1 - \omega_4} + \\
 & + \frac{i}{2} \frac{(z_4^2 z_2 + \bar{Z}_4^2 \bar{Z}_2) a_4}{\omega_2 - 2\omega_4} + \frac{i}{2} \frac{(\bar{Z}_2^2 z_4 + z_2^2 \bar{Z}_4) a_5}{2\omega_2 + \omega_4} + \frac{i}{2} \frac{(z_3^2 z_4 + \bar{Z}_3^2 \bar{Z}_4) a_6}{\omega_4 + 2\omega_3} - \\
 & - \frac{i}{2} \frac{(z_1^2 \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1^2 z_2) a_7}{\omega_2 + 2\omega_1} + \frac{i}{2} \frac{(z_2^2 z_1 + \bar{Z}_2^2 \bar{Z}_1) a_8}{-2\omega_2 + \omega_1} - \frac{i}{2} \frac{(z_1^2 z_3 + \bar{Z}_1^2 \bar{Z}_3) a_9}{2\omega_1 + \omega_3} + \\
 & + \frac{i}{2} \frac{(\bar{Z}_2 z_4 z_3 + z_2 \bar{Z}_4 \bar{Z}_3) a_{10}}{\omega_2 + \omega_4 + \omega_3} + \frac{i}{2} \frac{(\bar{Z}_1 z_3^2 + z_1 \bar{Z}_3^2) a_{11}}{\omega_1 - 2\omega_3} + \frac{i}{2} \frac{(z_1 z_2 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 z_3) a_{12}}{-\omega_2 + \omega_1 - \omega_3}.
 \end{aligned}$$

Находим выражение старых переменных z_i через новые Z_i, \bar{Z}_i с точностью до слагаемых третьей степени. Для этого отбрасываем слагаемые выше третьей степени в выражениях

$$z_i = Z_i - G_i(\mathbf{Z} - \mathbf{G}(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}), \bar{\mathbf{Z}}), \quad G_i(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{Z}}) = \frac{\partial V_3(z_1, z_2, z_3, z_4, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3, \bar{Z}_4)}{\partial \bar{Z}_i}, \quad (3.13)$$

где введены обозначения

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4), \quad \mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4), \quad \mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3, G_4).$$

Получаем разложение:

$$H = \frac{z^2}{4\pi} \left(\omega_1 |Z_1|^2 - \omega_2 |Z_2|^2 + \omega_3 |Z_3|^2 + \omega_4 |Z_4|^2 + \sum_{1 \leq k < j \leq 4} C_{kj} |Z_k|^2 |Z_j|^2 + \dots \right), \quad (3.14)$$

в котором точками обозначены слагаемые четвертой степени и выше, кроме выписанных.



Коэффициенты C_{kj} задаются выражениями

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{1}{4} \frac{a_7^2}{\omega_2 + 2\omega_1} - \frac{1}{4} \frac{a_9^2}{2\omega_1 + \omega_3} + c_{11}, \\
 C_{22} &= -\frac{1}{4} \frac{a_5^2}{2\omega_2 + \omega_4} - \frac{1}{4} \frac{a_8^2}{-2\omega_2 + \omega_1} + c_{22} \\
 C_{33} &= -\frac{1}{4} \frac{a_6^2}{\omega_4 + 2\omega_3} - \frac{1}{4} \frac{a_{11}^2}{\omega_1 - 2\omega_3} + c_{33} \\
 C_{44} &= -\frac{1}{4} \frac{a_1^2}{-2\omega_4 + \omega_3} + \frac{1}{4} \frac{a_4^2}{\omega_2 - 2\omega_4} + c_{44} \\
 C_{12} &= \frac{1}{4} \frac{a_3^2}{\omega_2 + \omega_1 - \omega_4} - \frac{a_7^2}{\omega_2 + 2\omega_1} - \frac{a_8^2}{-2\omega_2 + \omega_1} + \frac{1}{4} \frac{a_{12}^2}{-\omega_2 + \omega_1 - \omega_3} + c_{12} \\
 C_{13} &= \frac{1}{4} \frac{a_2^2}{\omega_1 + \omega_3 - \omega_4} - \frac{a_9^2}{2\omega_1 + \omega_3} + \frac{a_{11}^2}{\omega_1 - 2\omega_3} - \frac{1}{4} \frac{a_{12}^2}{-\omega_2 + \omega_1 - \omega_3} + c_{13} \\
 C_{14} &= -\frac{1}{4} \frac{a_2^2}{\omega_1 + \omega_3 - \omega_4} + \frac{1}{4} \frac{a_3^2}{\omega_2 + \omega_1 - \omega_4} + c_{14} \\
 C_{23} &= -\frac{1}{4} \frac{a_{10}^2}{\omega_2 + \omega_4 + \omega_3} - \frac{1}{4} \frac{a_{12}^2}{-\omega_2 + \omega_1 - \omega_3} + c_{14} \\
 C_{24} &= -\frac{1}{4} \frac{a_3^2}{\omega_2 + \omega_1 - \omega_4} + \frac{a_4^2}{\omega_2 - 2\omega_4} + \frac{a_5^2}{2\omega_2 + \omega_4} - \frac{1}{4} \frac{a_{10}^2}{\omega_2 + \omega_4 + \omega_3} + c_{24} \\
 C_{34} &= \frac{a_1^2}{-2\omega_4 + \omega_3} - \frac{1}{4} \frac{a_2^2}{\omega_1 + \omega_3 - \omega_4} - \frac{a_6^2}{\omega_4 + 2\omega_3} + \frac{1}{4} \frac{a_{10}^2}{\omega_2 + \omega_4 + \omega_3} + c_{34}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Можно применить метод Депри – Хори построения нормальной формы гамильтониана. Слагаемые четвертой степени в (3.14) задаются выражением (см., например, [23])

$$H_4(Z, \bar{Z}) = W_4(Z, \bar{Z}) - \frac{1}{2} \{W_3(Z, \bar{Z}), V_3(Z, \bar{Z})\},$$

где $\{f(Z, \bar{Z}), g(Z, \bar{Z})\}$ – скобка Пуассона

$$\{f, g\} = -2i \sum_{j=1}^4 \left(\frac{\partial f}{\partial Z_j} \frac{\partial g}{\partial \bar{Z}_j} - \frac{\partial g}{\partial Z_j} \frac{\partial f}{\partial \bar{Z}_j} \right).$$

Согласно общей теории (см., например, [31, с. 180] и имеющиеся там ссылки), в рассматриваемой нами задаче справедливо следующее достаточное условие формальной устойчивости, являющееся частным случаем теоремы А. Д. Брюно [32].

Предложение 1. Нулевое положение равновесия гамильтоновой системы с гамильтонианом (3.14) формально устойчиво, если квадратичная форма

$$\mathbf{C}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1 \leq k \leq j \leq 4} C_{kj} \rho_k \rho_j \tag{3.16}$$

не обращается в 0 при $(\rho_1, \dots, \rho_4) \neq 0$ на части плоскости

$$\omega_1 \rho_1 - \omega_2 \rho_2 + \omega_3 \rho_3 + \omega_4 \rho_4 = 0, \tag{3.17}$$

расположенной в конусе $\{\rho_j \geq 0\}$, и отсутствуют резонансы (3.11) до четвертого порядка включительно.



В разложении (3.14) отсутствуют слагаемые $Z_1 Z_2^3, \bar{Z}_1 \bar{Z}_2^3$ и $Z_3 Z_2^3, \bar{Z}_3 \bar{Z}_2^3$ (см. замечание 3). Это означает, что резонансы $1 : 3$, указанные в таблице 2, не влияют на структуру нормализованных слагаемых четвертой степени гамильтониана. К такому же заключению приходим и в случае резонанса $1 : 1 : 2$, когда $\omega_1 + \omega_3 = 2\omega_2$. Теперь это следствие отсутствия слагаемых $Z_1 Z_2^2 Z_3$ и $\bar{Z}_1 \bar{Z}_2^2 \bar{Z}_3$. Отсутствуют и специфические слагаемые третьей и четвертой степени, являющиеся резонансными, когда $\omega_3 = 2\omega_2$ или $\omega_1 = \omega_2$. Поэтому во всех указанных случаях применимо достаточное условие формальной устойчивости предложения 1.

Величина ω_2 положительна на интервале $p \in (p_{05}, p_{*5})$. Из уравнения плоскости (3.17) находим ρ_2 и подставляем ее в квадратичную форму (3.16). Получаем, что достаточным условием формальной устойчивости является знакоопределенность в положительном полупространстве квадратичной формы

$$D(\rho_1, \rho_3, \rho_4) = D_{11}\rho_1^2 + D_{33}\rho_3^2 + D_{44}\rho_4^2 + 2D_{13}\rho_1\rho_3 + 2D_{14}\rho_1\rho_4 + 2D_{34}\rho_3\rho_4, \quad (3.18)$$

$$D_{11} = C_{11} + \frac{C_{12} \omega_1}{\omega_2} + \frac{C_{22} \omega_1^2}{\omega_2^2},$$

$$D_{33} = C_{33} + \frac{C_{23} \omega_3}{\omega_2} + \frac{C_{22} \omega_3^2}{\omega_2^2},$$

$$D_{44} = C_{44} + \frac{C_{24} \omega_4}{\omega_2} + \frac{C_{22} \omega_4^2}{\omega_2^2},$$

$$D_{13} = \frac{1}{2}C_{13} + \frac{C_{12} \omega_3 + C_{23} \omega_1}{2\omega_2} + \frac{C_{22} \omega_1 \omega_3}{\omega_2^2},$$

$$D_{14} = \frac{1}{2}C_{14} + \frac{C_{24} \omega_1 + C_{12} \omega_4}{2\omega_2} + \frac{C_{22} \omega_1 \omega_4}{\omega_2^2},$$

$$D_{34} = \frac{1}{2}C_{34} + \frac{C_{23} \omega_4 + C_{24} \omega_3}{2\omega_2} + \frac{C_{22} \omega_3 \omega_4}{\omega_2^2}.$$

Доказательство утверждения 1 теоремы 3. Пусть выполнено условие (2.15).

На интервале $p \in (p^*, p_{*5})$ все коэффициенты D_{ij} положительны (см. рис. 5). Значит, в этом случае есть формальная устойчивость.

На рисунке 6 приведены графики коэффициентов D_{ij} на интервале $p \in (p_{05}, p^*)$. Заметим, что на этом интервале все коэффициенты D_{ij} имеют одну переменную знака и обращаются в нуль, соответственно, в точках p_{ij}° (выписаны в порядке возрастания):

$$p_{11}^\circ = a = .3412172780, \quad p_{14}^\circ = .3413164631, \quad p_{13}^\circ = .3414073788, \\ p_{44}^\circ = .3416524521, \quad p_{34}^\circ = .3421410031, \quad p_{33}^\circ = b = .3429140267.$$

На интервале $p \in (p_{05}, a)$ все D_{ij} положительны, а на интервале $p \in (b, p_{*5})$ — отрицательны, так что имеет место формальная устойчивость на этих интервалах. На интервале (a, b) коэффициент $D_{11} < 0, D_{33} > 0$, следовательно, достаточное условие формальной устойчивости в этом случае нарушено.

Доказательство утверждения 2 теоремы 3. На рисунке 7 приведен график определителя

$$\Delta(p) = \det \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial \rho_i \rho_j} \right\| \quad (3.19)$$



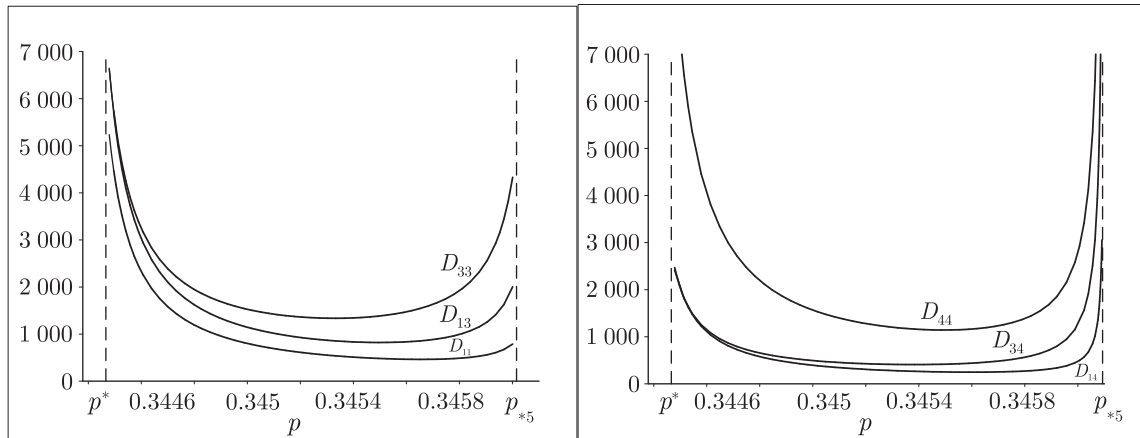


Рис. 5. Графики коэффициентов D_{ij} на интервале (p^*, p_{*5}) .

на отрезке $p \in [a, b]$. Квадратичная форма \mathbf{C} задана выражениями (3.16), (3.15).

Согласно результатам работ В. И. Арнольда [30, 33], нулевое решение приведенной гамильтоновой системы с гамильтонианом (3.14) устойчиво для большинства начальных условий на интервале $p \in [a, b]$, поскольку определитель (3.19) не принимает на нем нулевого значения.

Доказательство утверждения 3 теоремы 3 следует из цитируемых выше результатов Мозера [34].

3.3. Критический случай двукратной пары чисто мнимых собственных значений: резонанс 1 : 1, $p = p_{*5}$

Пусть выполнено условие $p = p_{*5}$. Из представлений (2.10) следует, что $\lambda_{12}(p_{*5}) = \lambda_{13}(p_{*5}) = 0$. Спектр (2.14) матрицы линеаризации L состоит из двукратного нулевого собственного значения $\sigma = 0$, двукратной пары чисто мнимых собственных значений $\sigma = \pm i\omega_*$, где $\omega_* = \lambda_{02}(p_{*5}) = .5886850476$, и двух простых пар чисто мнимых собственных значений. Каждому двукратному собственному значению соответствует жорданова клетка в жордановой форме матрицы L .

Понятие нормальной формы квадратичного гамильтониана в критических случаях двукратных жордановых клеток обсуждается в работах [24, 25] вместе с алгоритмом построения матрицы нормализации. В рассматриваемых условиях квадратичную часть гамильтониана E_2 приводит к нормальной форме следующая симплектическая матрица B :

$$B = \frac{1}{\sqrt{5}} \| B_1, B_2, \dots, B_{10} \|,$$

$$B_1 = -\begin{pmatrix} \nu_1 h_4 \\ \nu_1^{-1} h_1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = -\frac{k_0}{x} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_2 \end{pmatrix}, \quad B_3 = -\frac{k_0}{x} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_3 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} -\nu_1 h_4 \\ \nu_1^{-1} h_1 \end{pmatrix},$$

$$B_6 = \begin{pmatrix} \nu_1 h_1 \\ -\nu_1^{-1} h_4 \end{pmatrix}, \quad B_7 = k_0 x \begin{pmatrix} h_2 \\ h_0 \end{pmatrix}, \quad B_8 = k_0 x \begin{pmatrix} h_3 \\ h_0 \end{pmatrix}, \quad B_9 = -\begin{pmatrix} \nu_1 h_1 \\ \nu_1^{-1} h_4 \end{pmatrix},$$

$$B_5 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_{15}(p_{*5})}} \begin{pmatrix} h_5 \\ h_0 \end{pmatrix}, \quad B_{10} = \sqrt{2\lambda_{15}(p_{*5})} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_5 \end{pmatrix}.$$

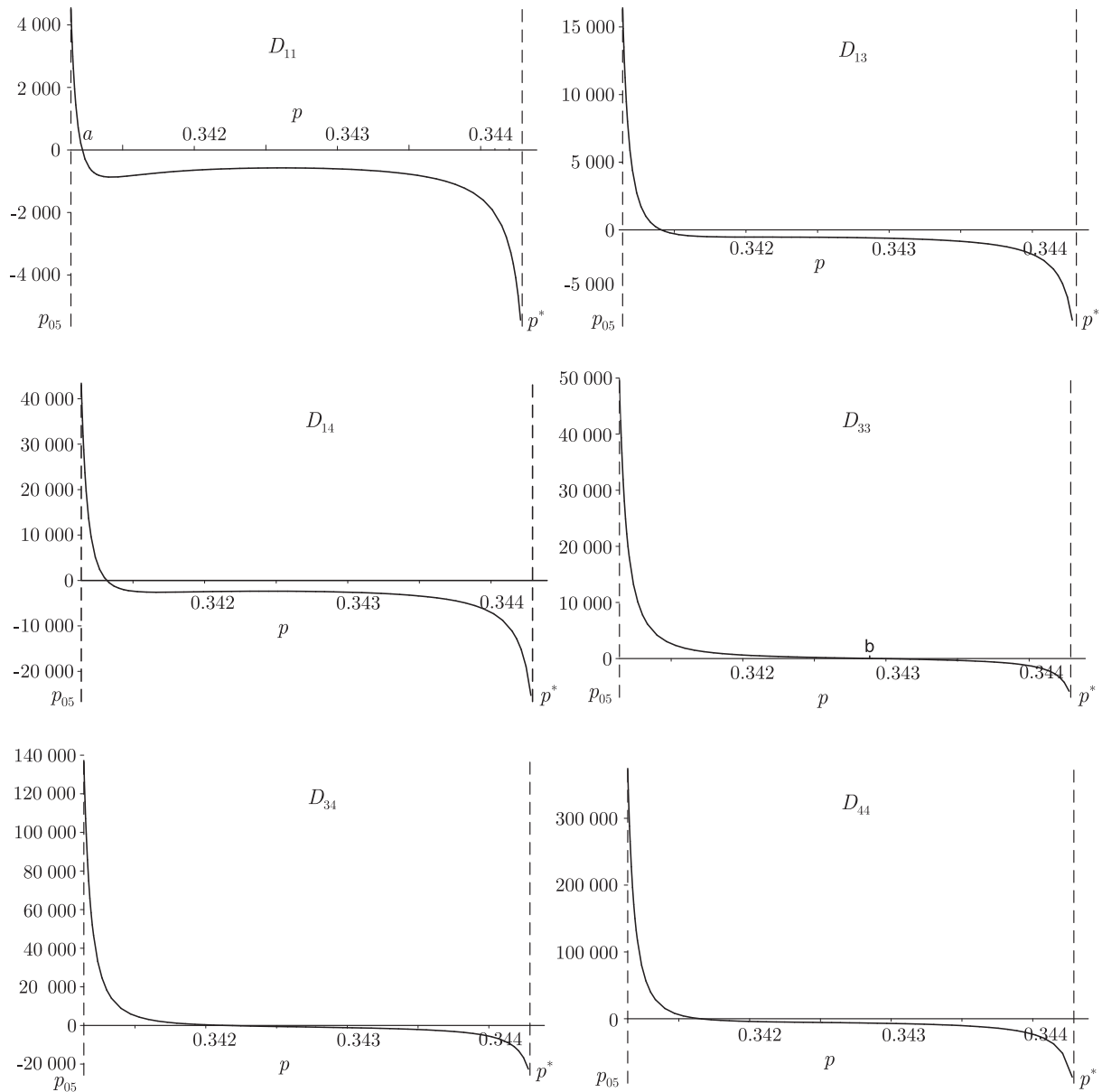


Рис. 6. Графики коэффициентов D_{ij} на интервале $p \in (p_{05}, p^*)$.

Здесь B_k — колонки матрицы B ($k = 1, \dots, 10$), введены обозначения $k_0 = \sqrt{2}$, $x = \sqrt{2\lambda_{22}(p_{*5})}$ и нулевой вектор-столбец $h_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$.

Вводим симплектическую замену переменных

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Переменная ζ_5 — циклическая переменная для полной нелинейной системы. Полагая $\xi_5 = 0$, получаем приведенный гамильтониан \mathcal{W} с рядом Тейлора в окрестности нуля:

$$\mathcal{W} = \frac{\varkappa^2}{4\pi} (\mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 + a_*(\zeta_3^2 + \zeta_2^2)^2 + \dots). \tag{3.21}$$



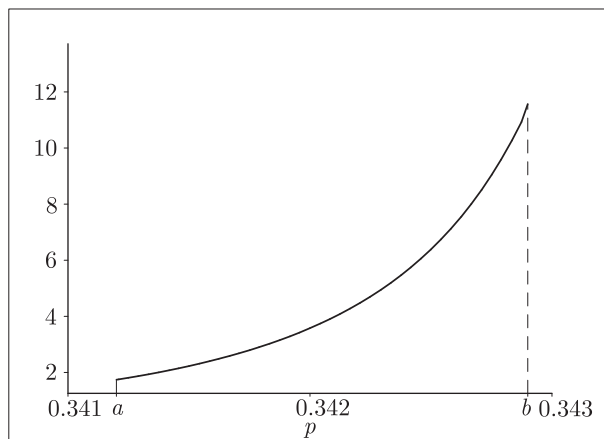


Рис. 7. График определителя $\Delta(p)$ на отрезке $p \in [a, b]$. По оси ординат принят масштаб $1 : 10^5$.

Многоточиями обозначены слагаемые четвертой степени и выше, кроме выписанных, причем $a_* = 9.631796917$, а квадратичные слагаемые \mathcal{W}_2 имеют вид

$$\mathcal{W}_2 = \omega_{*1} (\xi_1^2 + \zeta_1^2) + \frac{1}{2} (\xi_2^2 + \xi_3^2) + \omega_* (\xi_2 \zeta_3 - \xi_3 \zeta_2) + \omega_{*4} (\xi_4^2 + \zeta_4^2) \quad (3.22)$$

с коэффициентами

$$\omega_{*1} = \omega_1(p_{*5}) = .2372986275, \quad \omega_{*4} = \omega_4(p_{*5}) = 1.729634443. \quad (3.23)$$

\mathcal{W}_3 — кубическая форма:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_3 = & \alpha_1 (\xi_3(\zeta_1\zeta_4 + \xi_1\xi_4) - \xi_2(\xi_4\zeta_1 - \xi_1\zeta_4)) + \alpha_2 (\xi_2^2\zeta_1 - \xi_3^2\zeta_1 + 2\xi_1\xi_2\xi_3) + \\ & + \alpha_3 (-\xi_1^2\xi_3 + \xi_3\zeta_1^2 + 2\xi_1\xi_2\zeta_1) + \alpha_4 (\xi_2^2\zeta_4 - \xi_3^2\zeta_4 - 2\xi_2\xi_3\xi_4) + \\ & + \alpha_5 (-\xi_3\xi_4^2 + \xi_3\zeta_4^2 - 2\xi_2\xi_4\zeta_4) + \alpha_6 (\zeta_2\zeta_4^2 - \xi_4^2\zeta_2 + 2\xi_4\zeta_3\zeta_4) + \\ & + \alpha_7 (\xi_1(\xi_2\zeta_2 - \xi_3\zeta_3) - \zeta_1(\xi_2\zeta_3 + \xi_3\zeta_2)) + \alpha_8 (\zeta_2(\xi_1\xi_4 + \zeta_1\zeta_4) - \zeta_3(\xi_1\zeta_4 - \xi_4\zeta_1)) + \\ & + \alpha_9 (-\zeta_1^2\zeta_2 + \xi_1^2\zeta_2 + 2\xi_1\zeta_1\zeta_3) + \alpha_{10} (\zeta_3^2\zeta_4 - \zeta_2^2\zeta_4 + 2\xi_4\zeta_2\zeta_3) + \\ & + \alpha_{11} (\zeta_4(\xi_2\zeta_3 + \xi_3\zeta_2) + \xi_4(\xi_2\zeta_2 - \xi_3\zeta_3)) + \alpha_{12} (-\zeta_1\zeta_2^2 + \zeta_1\zeta_3^2 - 2\xi_1\zeta_2\zeta_3) \end{aligned} \quad (3.24)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} \alpha_1 = .08181630853, & \quad \alpha_2 = .1242631145, & \quad \alpha_3 = .2021116015, \\ \alpha_4 = .3628526731, & \quad \alpha_5 = .6858668850, & \quad \alpha_6 = .7402263630, \\ \alpha_7 = .9855464522, & \quad \alpha_8 = 1.346210296, & \quad \alpha_9 = 1.665849885, \\ \alpha_{10} = 1.768806106, & \quad \alpha_{11} = 1.816712652, & \quad \alpha_{12} = 2.590699788. \end{aligned}$$

Согласно общей теории, нормализованная до членов четвертого порядка включительно функция Гамильтона (3.21) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\psi, \phi) = & \frac{\varkappa^2}{4\pi} (E_0 + \omega_{*1} (\psi_1^2 + \phi_1^2) + \frac{1}{2} (\psi_2^2 + \psi_3^2) + \omega_* (\psi_2\phi_3 - \psi_3\phi_2) + \omega_{*4} (\psi_4^2 + \phi_4^2) + \\ & + A_*(\phi_2^2 + \phi_3^2)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_4), \phi = (\phi_1, \dots, \phi_4)$ — новые переменные, многоточием обозначены слагаемые четвертой степени и выше, кроме выписанных. Проведенные ниже в разделе 4 выкладки показали, что коэффициент A_* вычисляется по формулам

$$A_* = a_* - \frac{1}{4} \frac{\alpha_{10}^2}{\omega_* + \omega_{*4}} + \frac{1}{4} \frac{\alpha_{12}^2}{\omega_* - \omega_{*1}} = 14.06958498. \quad (3.26)$$

Нулевое равновесие приведенной гамильтоновой системы с гамильтонианом (3.21) формально устойчиво по Раусу, поскольку величина A_* положительна. Доказательство дословно повторяет рассуждения Сокольского в задаче устойчивости лагранжевых решений ограниченной проблемы трех тел, приведенное на с. 144 книги [23] (другое доказательство см. в [35]).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Вопрос об устойчивости по Ляпунову нулевого равновесия приведенной гамильтоновой системы четырех степеней свободы (3.25) остается открытым. Известно, что это так в аналогичной ситуации для гамильтоновой системы двух степеней свободы [24–27].

3.4. Критический случай двукратного нулевого собственного значения:

$$p = p_{05}$$

Пусть выполнено условие $p = p_{05}$. Гамильтониан приведенной системы задается выражениями (3.7)–(3.10) при $p = p_{05}$. Частота $\omega_2(p_{05}) = 0$, так что в рассматриваемой задаче устойчивости нулевого решения приведенной системы имеет место критический случай двукратного нулевого собственного значения, когда матрица линеаризации диагонализуема. Заметим, что квадратичные слагаемые (3.8) уже нормализованы. Общая теория говорит, что в случае нулевой частоты $\omega_2 = 0$ резонансными становятся следующие слагаемые третьей и четвертой степени $z_2|z_j|^2, z_2^2\bar{z}_2, z_2^3\bar{z}_2, z_2^2|z_j|^2$ ($j = 1, 3, 4$) и комплексно-сопряженные к ним. Однако их нет в разложении приведенной системы (см. замечание 3). Нормализация слагаемых третьей степени сохраняет структуру слагаемых четвертой степени. Поэтому с точки зрения задачи нормализации приведенного гамильтониана до четвертого порядка включительно случай $p = p_{05}$ не выделяется из общего случая.

Таким образом, нормализованный до четвертого порядка приведенный гамильтониан задается разложением (3.14), (3.15) при $p = p_{05}$, и для него в окрестности нуля справедлива следующая асимптотика:

$$H = \frac{\varkappa^2}{4\pi} (\omega_1^\circ |Z_1|^2 + \omega_3^\circ |Z_3|^2 + \omega_4^\circ |Z_4|^2 + C_{22}^\circ |Z_2|^4 + o(|Z_1|^2 + |Z_2|^4 + |Z_3|^2 + |Z_4|^2)). \quad (3.27)$$

Здесь знак $^\circ$ означает, что коэффициенты вычислены в точке $p = p_{05}$, так что

$$\begin{aligned} \omega_1^\circ &= 0.2660681113, & \omega_3^\circ &= 0.5796480995, & \omega_4^\circ &= 1.745486031, \\ C_{22}^\circ &= -\frac{1}{4} \frac{(a_5^\circ)^2}{\omega_4^\circ} - \frac{1}{4} \frac{(a_8^\circ)^2}{\omega_1^\circ} + c_{22}^\circ = 1.224776018. \end{aligned}$$

Здесь $a_5^\circ = .8242850565, a_8^\circ = 2.752223000, c_{22}^\circ = 8.439378858$.

Поскольку коэффициенты $C_{22}^\circ, \omega_1^\circ, \omega_3^\circ, \omega_4^\circ$ положительны, то гамильтониан (3.27) является положительно определенным и имеет место устойчивость по Ляпунову нулевого решения приведенной системы.

Заметим, что положительную определенность гамильтониана в рассматриваемой здесь задаче можно доказать и без применения процедуры нормализации. Действительно, в окрест-



ности нуля при $p = p_{05}$ имеет место следующая асимптотика приведенного гамильтониана (3.5):

$$W = \frac{\varkappa^2}{4\pi} \left(W_0 + \mathbb{P}(\xi_1, \dots, \xi_4, \zeta_1, \dots, \zeta_4) + o\left(\sum_{j=1,3,4} (\xi_j^2 + \zeta_j^2) + \xi_2^4 + \zeta_2^4 \right) \right). \quad (3.28)$$

Многочлен $\mathbb{P}(\xi_1, \dots, \xi_4, \zeta_1, \dots, \zeta_4)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{P} = & \omega_1^\circ (\xi_1^2 + \zeta_1^2) + \omega_3^\circ (\xi_3^2 + \zeta_3^2) + \omega_4^\circ (\xi_4^2 + \zeta_4^2) + a_5^\circ (\xi_2^2 \zeta_4 - 2 \xi_2 \xi_4 \zeta_2 - \zeta_2^2 \zeta_4) + \\ & + a_8^\circ (\xi_2^2 \zeta_1 - \zeta_1 \zeta_2^2 + 2 \xi_1 \xi_2 \zeta_2) + c_{22}^\circ (\xi_2^2 + \zeta_2^2)^2 \end{aligned}$$

и разбивается на три слагаемых:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_3, \\ \mathbb{P}_1 &= \omega_1^\circ \zeta_1^2 + \omega_4^\circ \zeta_4^2 + a_5^\circ \zeta_4 (\alpha - \gamma) - a_8^\circ \zeta_1 (\alpha - \gamma) + c_{22}^\circ (\alpha^2 + \gamma^2) + 2x\alpha\gamma, \\ \mathbb{P}_2 &= \omega_1^\circ \xi_1^2 + \omega_4^\circ \xi_4^2 - 2 a_5^\circ \beta \xi_4 - 2 a_8^\circ \xi_1 \beta + 2(c_{22} - x)\beta^2, \\ \mathbb{P}_3 &= \omega_3^\circ (\xi_3^2 + \zeta_3^2). \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения $\alpha = \xi_2^2, \beta = \xi_2 \zeta_2, \gamma = \zeta_2^2$. Величину x подбираем так, чтобы были положительно определены квадратичные формы $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$. Нетрудно проверить, что при $x \in [-8.439378878, -5.989822693]$ критерий Сильвестра положительной определенности квадратичных форм выполняется одновременно для форм \mathbb{P}_1 и \mathbb{P}_2 . Это означает положительную определенность многочлена \mathbb{P} . Теперь из асимптотики (3.28) следует, что точка нуль — строгий локальный минимум приведенного гамильтониана (3.5), следовательно, нулевое решение приведенной системы устойчиво по Ляпунову.

Поясним, как была выписана асимптотика (3.28). Все слагаемые разложения гамильтониана (3.5) были упорядочены по степени квазиоднородности, которая считалась следующим образом: степень всех переменных, кроме ξ_2, ζ_2 , считалась с весом 2, а вес ξ_2, ζ_2 оставлен равным 1. Многочлен \mathbb{P} — слагаемые четвертой степени квазиоднородности разложения гамильтониана, а степень квазиоднородности остальных слагаемых — пять и выше.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Используемый нами прием введения квазиоднородности встречается во многих работах. Например, в критическом случае двукратного нулевого корня (жорданова клетка) для систем общего вида он применялся А. М. Ляпуновым [36] и в работах [37, 38]. В теории устойчивости вихревых конфигураций с его помощью была доказана устойчивость вихревого семиугольника [7, 8], а в работе [20] исследовалась устойчивость томсоновского вихревого многоугольника в случае четного числа вихрей вне круговой области. В статье [39] аналогичные рассуждения проводились для построения алгоритмов нормализации гамильтоновых систем. В связи с понятием квазиоднородности отметим, что существует развитая теория степенной геометрии [40].

3.5. Критический случай резонанса 1 : 2

Пусть $p = p^*$. В этом случае $\omega_1 = 2\omega_2 = 0.2471229194$. Таким образом, в задаче устойчивости нулевого решения гамильтоновой системы с гамильтонианом (3.7) имеет место критический случай резонанса 1 : 2. Среди слагаемых третьей степени разложения (3.9) есть резонансное слагаемое $-a_8 i z_2^2 z_1$, $a_8 = 4.332862197$. Согласно результатам А. П. Маркеева [28, 29], имеет место неустойчивость.



4. Приложение: вычисление коэффициента (3.26) нормализованного гамильтониана (3.25)

Существуют разные способы построения нормальной формы гамильтониана. Для проверки результата нами были применены два метода: Биркгофа и Депри–Хори. Далее излагаются подробности нормализации гамильтониана (3.25) методом Биркгофа.

Квадратичные слагаемые (3.22) уже имеют нормальную форму. Для нормализации слагаемых третьей степени гамильтониана (3.21) сделаем каноническую замену переменных

$$(\xi_i, \zeta_i) \rightarrow (\Psi_i, \Phi_i), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

задаваемую системой

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \xi_i + \frac{\partial S_3(\xi_1, \dots, \xi_4, \Phi_1, \dots, \Phi_4)}{\partial \Phi_i}, \\ \zeta_i &= \Phi_i + \frac{\partial S_3(\xi_1, \dots, \xi_4, \Phi_1, \dots, \Phi_4)}{\partial \xi_i}. \end{aligned}$$

Здесь S_3 — форма третьей степени

$$\begin{aligned} S_3 &= \beta_1 (\xi_3^2 \xi_4 - \xi_2^2 \xi_4 - 2 \xi_2 \xi_3 \Phi_4) + \beta_2 (\xi_2 \xi_4^2 - \xi_2 \Phi_4^2 - 2 \xi_3 \xi_4 \Phi_4) + \\ &+ \beta_3 (-\Phi_3 \xi_4^2 + \Phi_4^2 \Phi_3 - 2 \Phi_2 \Phi_4 \xi_4) + \beta_4 (\xi_1 \xi_2 \xi_4 + \xi_2 \Phi_1 \Phi_4 - \xi_1 \xi_3 \Phi_4 + \xi_3 \xi_4 \Phi_1) + \\ &+ \beta_5 (-\xi_2 \xi_4 \Phi_3 + \xi_2 \Phi_2 \Phi_4 - \xi_3 \xi_4 \Phi_2 - \xi_3 \Phi_3 \Phi_4) + \beta_6 (-\xi_4 \Phi_3^2 + \xi_4 \Phi_2^2 + 2 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4) + \\ &+ \beta_7 (-\xi_4 \Phi_1 \Phi_2 + \xi_1 \Phi_2 \Phi_4 + \xi_1 \xi_4 \Phi_3 + \Phi_1 \Phi_3 \Phi_4) + \beta_8 (-\xi_2 \Phi_1^2 + \xi_1^2 \xi_2 + 2 \xi_1 \xi_3 \Phi_1) + \\ &+ \beta_9 (\Phi_1^2 \Phi_3 - \xi_1^2 \Phi_3 + 2 \xi_1 \Phi_1 \Phi_2) + \beta_{10} (-\xi_1 \Phi_2^2 + \xi_1 \Phi_3^2 + 2 \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3) + \\ &+ \beta_{11} (-\xi_1 \xi_3 \Phi_2 + \xi_3 \Phi_1 \Phi_3 - \xi_2 \Phi_1 \Phi_2 - \xi_1 \xi_2 \Phi_3) + \beta_{12} (-\xi_1 \xi_3^2 + \xi_1 \xi_2^2 - 2 \xi_2 \xi_3 \Phi_1) \end{aligned} \tag{4.1}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0.02924276463, & \beta_2 &= 0.08987961690, & \beta_3 &= 0.1169421178, \\ \beta_4 &= 0.2003534683, & \beta_5 &= 0.2272645272, & \beta_6 &= 0.3814845444, \\ \beta_7 &= 0.5618605308, & \beta_8 &= 0.5729321255, & \beta_9 &= 1.083212183, \\ \beta_{10} &= 3.686397148, & \beta_{11} &= 11.89337477, & \beta_{12} &= 17.10031641, \end{aligned}$$

вычисляемыми при $p = p_{*5}$ по формулам

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{4} \frac{2\alpha_4(\omega + \omega_4)^2 - (\omega + \omega_4)\alpha_{11} + \alpha_{10}}{(\omega + \omega_4)^3}, & \beta_2 &= -\frac{(\omega - 4\omega_4)\alpha_5 + \alpha_6}{(\omega - 4\omega_4)^2}, \\ \beta_3 &= -\frac{\alpha_6}{\omega - 4\omega_4}, & \beta_4 &= \frac{(\omega + 2\omega_1 - 2\omega_4)\alpha_1 + \alpha_8}{(\omega + 2\omega_1 - 2\omega_4)^2}, \\ \beta_5 &= \frac{1}{2} \frac{(\omega + \omega_4)\alpha_{11} - \alpha_{10}}{(\omega + \omega_4)^2}, & \beta_6 &= \frac{1}{2} \frac{\alpha_{10}}{\omega + \omega_4}, & \beta_7 &= -\frac{\alpha_8}{\omega + 2\omega_1 - 2\omega_4}, \\ \beta_8 &= -\frac{(\omega + 4\omega_1)\alpha_3 - \alpha_9}{(\omega + 4\omega_1)^2}, & \beta_9 &= \frac{\alpha_9}{\omega + 4\omega_1}, & \beta_{10} &= \frac{1}{2} \frac{\alpha_{12}}{\omega - \omega_1}, \\ \beta_{11} &= \frac{1}{2} \frac{(\omega - \omega_1)\alpha_7 + \alpha_{12}}{(\omega - \omega_1)^2}, & \beta_{12} &= \frac{1}{4} \frac{2\alpha_2(\omega - \omega_1)^2 + (\omega - \omega_1)\alpha_7 + \alpha_{12}}{(\omega - \omega_1)^3}. \end{aligned} \tag{4.2}$$



Находим величины ξ_i с точностью до слагаемых третьей степени по переменным Ψ_i, Φ_i . Для этого нужно отбросить слагаемые выше третьей степени в выражениях

$$\begin{aligned}\xi_i &= \Psi_i - G_i(\Psi - \mathbf{G}(\Psi, \Phi), \Phi), \\ G_i(\mathbf{x}, \Phi) &= \frac{\partial S_3(x_1, x_2, x_3, x_4, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4)}{\partial \Phi_i}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Получили гамильтониан, нормализованный до третьего порядка включительно.

$$\mathcal{H}(\Psi, \Phi) = \frac{\varkappa^2}{4\pi}(\mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_2(\Psi, \Phi) + \mathcal{H}_4(\Psi, \Phi) + \dots), \quad (4.4)$$

$$\mathcal{H}_4(\Psi, \Phi) = (a_* + K_{40})\Phi_2^4 + (2a_* + K_{22})\Phi_2^2\Phi_3^2 + (a_* + K_{04})\Phi_3^4 + \dots \quad (4.5)$$

Многоточием в (4.4) обозначены слагаемые выше четвертой степени, а в (4.5) слагаемые четвертой степени, кроме выписанных. Коэффициенты

$$K_{40} = K_{04} = 12.35206595, \quad K_{22} = -38.61009145$$

вычисляются при $p = p_{*5}$ по формулам

$$\begin{aligned}K_{40} &= K_{04} = \omega_4\beta_6^2 + \alpha_{12}\beta_{10} + \omega_1\beta_{10}^2 - \alpha_{10}\beta_6, \\ K_{22} &= 2\alpha_{12}\beta_{10} + 2\omega_1\beta_{10}^2 + 2\omega_4\beta_6^2 - 2\alpha_{10}\beta_6 - 2\omega(-4\beta_6^2 + 4\beta_{10}^2).\end{aligned}\quad (4.6)$$

Приводя к нормальной форме слагаемые четвертой степени (4.5) заменой $(\Psi, \Phi) \rightarrow (\psi, \phi)$, получаем представление:

$$\mathcal{W}_4(\Psi(\psi, \phi), \Phi(\psi, \phi)) = A_*(\phi_2^2 + \phi_3^2)^2 + \dots,$$

$$A_* = a_* + \frac{1}{8}(3K_{40} + 3K_{04} + K_{22}),$$

подставляя в которое формулы (4.6), (4.2), получаем представление (3.26).

Список литературы

- [1] Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур. Киев: Наукова думка, 1993. 282 с.
- [2] Newton P. K. The n -vortex problem: Analytical techniques. (Appl. Math. Sci., vol. 145.) New York: Springer, 2001. 415 pp.
- [3] Aref H., Newton P. K., Stremmer M. A., Tokieda T., Vainchtein D. L. Vortex crystals // Adv. Appl. Mech., 2003, vol. 39, pp. 1–79.
- [4] Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. М.–Ижевск: ИКИ, 2005. 368 с.
- [5] Козлов В. В. Общая теория вихрей. М.–Ижевск: УдГУ, 1998. 238 с.
- [6] Куракин Л. Г. Об устойчивости правильного вихревого n -угольника // Докл. РАН, 1994, т. 335, № 6, с. 729–731.
- [7] Куракин Л. Г., Юдович В. И. О нелинейной устойчивости стационарного вращения правильного вихревого многоугольника // Докл. РАН, 2002, т. 384, № 4, с. 476–482.
- [8] Kurakin L. G., Yudovich V. I. The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon // Chaos, 2002, vol. 12, pp. 574–595.



- [9] Куракин Л. Г. О нелинейной устойчивости правильных вихревых многоугольников и многогранников на сфере // Докл. РАН, 2003, т. 388, № 4, с. 482–487.
- [10] Kurakin L. G. On nonlinear stability of the regular vortex systems on a sphere // *Chaos*, 2004, vol. 14, pp. 592–602.
- [11] Куракин Л. Г. Устойчивость, резонансы и неустойчивость правильных вихревых многоугольников внутри круговой области // Докл. РАН, 2004, т. 399, № 1, с. 52–55.
- [12] Havelock T. H. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // *Philos. Mag., Ser. 7*, 1931, vol. 11, no. 70, pp. 617–633.
- [13] Kurakin L. G. On stability of a regular vortex polygon in the circular domain // *J. Math. Fluid Mech.*, 2005, vol. 7, Supplem. 3, S376–S386.
- [14] Куракин Л. Г. Об устойчивости томсоновских вихревых конфигураций внутри круговой области // *Нелинейная динамика*, 2009, т. 5, № 3, с. 295–317.
- [15] Kurakin L. G. On the stability of Thomson's vortex configurations inside a circular domain // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2010, vol. 15, no. 1, pp. 40–58.
- [16] Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 660 с.
- [17] Routh E. J. A treatise on the stability of a given state motion. London: Macmillan, 1877. 108 pp.
- [18] Куракин Л. Г., Юдович В. И. Устойчивость стационарного вращения правильного вихревого многоугольника // *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев, М. А. Соколовский. М.–Ижевск: ИКИ, 2003. С. 238–303.*
- [19] Проскураков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1984. 336 с.
- [20] Куракин Л. Г., Островская И. В. Об устойчивости томсоновского вихревого многоугольника с четным числом вихрей вне круговой области // *Сиб. матем. журн.*, 2010, т. 51, № 3, с. 584–598.
- [21] Куракин Л. Г. Об устойчивости стационарного вращения системы трех равноудаленных вихрей вне круга // *ПММ*, 2011, т. 75, № 2, с. 327–337.
- [22] Campbell L. J. Transverse normal modes of finite vortex arrays // *Phys. Rev. A*, 1981, vol. 24, pp. 514–534.
- [23] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
- [24] Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка // *ПММ*, 1977, т. 41, № 1, с. 24–33.
- [25] Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот // *ПММ*, 1974, т. 38, № 5, с. 791–799.
- [26] Ковалев А. В., Чудненко А. Н. К устойчивости положений равновесия двумерной гамильтоновой системы в случае равных частот // *Докл. АН УССР*, 1977, Сер. А, № 11, с. 1011–1014.
- [27] Lerman L. M., Markova A. P. On stability at the Hamiltonian Hopf bifurcation // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2009, vol. 14, no. 1, pp. 148–162.
- [28] Куницын А. Н., Маркеев А. П. Устойчивость в резонансных случаях // *Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1979. С. 58–139.*
- [29] Маркеев А. П. Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса // *ПММ*, 1968, т. 32, № 4, с. 738–744.
- [30] Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // *УМН*, 1963, т. 18, № 5, с. 13–40.
- [31] Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. Устойчивость критических положений равновесия. Пущино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985. 216 с.
- [32] Брюно А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона // *Матем. заметки*, 1967, т. 1, № 3, с. 325–330.
- [33] Авец А., Арнольд В. И. Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999. 284 с. [Arnold V. I., Avez A. Ergodic problems of classical mechanics. New York: Benjamin, 1968. 286 pp.]



- [34] Moser J. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems // Commun. Pure Appl. Math., 1958, vol. 11, no. 1, pp. 81–114.
- [35] Сокольский А. Г. Об устойчивости лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел при критическом отношении масс // ПММ, 1975, т. 39, № 2, с. 366–369.
- [36] Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Матем. сб., 1893, т. 17, вып. 2, с. 253–333. (См. также: Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. С. 369–450.)
- [37] Куракин Л. Г. О ляпуновской цепочке критериев устойчивости в критическом случае жордановой 2-клетки // Докл. АН, 1994, т. 337, № 1, с. 14–16.
- [38] Куракин Л. Г. О критериях устойчивости работы А. М. Ляпунова «Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения» // Владикавказ. матем. журн., 2009, т. 11, № 3, с. 23–32.
- [39] Брюно А. Д., Петров А. Г. О вычислении гамильтоновой нормальной формы // Докл. РАН, 2006, т. 410, № 4, с. 474–478.
- [40] Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.

On the Stability of Thomson's Vortex Pentagon Inside a Circular Domain

Leonid G. Kurakin

Southern Federal University, Faculty of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences
Mil'chakova 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia
South Mathematical Institute of VSC RAS
Markusa 22, Vladikavkaz, 362027, Russia
kurakin@math.rsu.ru

We investigate the stability problem for a system of five stationary rotation identical point vortices located at the vertices of a regular pentagon inside a circular domain. The main result is the proof of theorems which have been announced the author in paper (Doklady Physics, 2004, vol. 49, no 11, pp. 658–661).

MSC 2010: 76B47, 34D20, 70K30

Keywords: point vortex, stationary motion, stability, resonance

Received July 17, 2011, accepted August 29, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 465–488 (Russian)

