

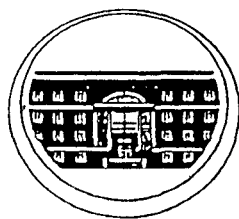
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

ТОМ 17

№ 3

2011



ЕКАТЕРИНБУРГ

УДК 517.518

**НЕЗАВИСИМОСТЬ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ
КУБИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ОТ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА****Н. В. Латыпова**

В работе рассматриваются два способа биркгофовой интерполяции функции двух переменных многочленами третьей степени на треугольнике для метода конечных элементов. Оценки погрешности для предложенных кубических элементов зависят только от диаметра разбиения и не зависят от углов триангуляции. Показана неулучшаемость полученных оценок.

Ключевые слова: погрешность интерполяции, кусочно-кубическая функция, триангуляция, метод конечных элементов.

N. V. Latypova. Independence of error estimates of interpolation by cubic polynomials from the angles of a triangle.

We consider two methods of Birkhoff interpolation of a function of two variables by cubic polynomials on a triangle for the finite element method. Error estimates for the proposed cubic elements depend only on the diameter of the partition and do not depend on the angles of triangulation. We show that the obtained estimates cannot be improved.

Keywords: error of interpolation, piecewise cubic polynomial, triangulation, finite element method.

Введение

Первоначально оценки погрешности аппроксимации функции и ее i -й производной имели вид CH^{n+1-i} , где H — диаметр триангуляции, n — степень интерполяционного многочлена (этот параметр также тесно связан с классом аппроксимируемых функций — классы $W^{n+1}M$, которые будут введены ниже). При этом вопрос о том, как константа C зависит от свойств триангуляции не рассматривался. Позже появилось условие наименьшего угла триангуляции (работы Дж. Синжа, М. Зламала, А. Женишека, Дж. Брэмбла и др.). Наиболее общие результаты такого рода принадлежат Ф. Сьярле и П. Равьяру [1], у которых в двумерном случае в максимально общей ситуации оценки погрешности аппроксимации имели вид $CH^{n+1-i}(\sin \alpha)^{-i}$, где α — наименьший угол триангуляции, а константа C уже не зависит от триангуляции.

В некоторых случаях наименьший угол, фигурирующий в оценках Сьярле — Равьяра, можно заменить на средний (или наибольший, что с точностью до констант равносильно). При этом выясняется, что различные типы интерполяционных процессов (Лагранжа, Эрмита, Биркгофа) по-разному реагируют на характер вырождения триангуляции. Подобные оценки автоматически переносятся на оценки погрешности метода конечных элементов, с которыми тесно связаны.

Так в случае лагранжевой интерполяции оценка погрешности зависит от диаметра разбиения и синуса наибольшего угла триангуляции. При этом оценки ухудшаются, когда два угла стремятся к нулю. Здесь к настоящему моменту все выяснено благодаря работам М. Зламала, Ю. Н. Субботина, П. Жаме. Кроме того, Ю. Н. Субботин [2] показал неулучшаемость этих оценок на заданном классе. Неулучшаемость понимается в том смысле, что существуют функция из заданного класса и абсолютные положительные константы, не зависящие от триангуляции, такие, что для любого невырожденного треугольника справедливы оценки снизу.

Наиболее трудным является случай эрмитовой и биркгофовой интерполяции. Здесь некоторые результаты получены Д. О. Филимоновым, Ю. Н. Субботиным [3; 4], Н. В. Байдаковой [5; 6] и автором [7–10]. В работах [5; 7; 8] рассматриваются интерполяционные условия

биркгофа типа для построения многочленов нечетных степеней $4k + 1$ и $4k + 3$, позволяющие заменить наименьший угол на наибольший для старших производных, но избавиться полностью от присутствия наименьшего угла в оценках погрешности производных не удастся. В [4; 6] предложены два способа интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике, в оценках погрешности которых наименьший угол полностью заменяется на средний (наибольший).

В работе [10] предлагаются два способа интерполяции типа Биркгофа многочленами второй степени на треугольнике, оценки погрешности в одном из них зависят только от наибольшей стороны треугольника и не зависят от угла. Показана неулучшаемость полученных оценок.

В настоящей работе предлагаются два способа интерполяции типа Биркгофа многочленами третьей степени на треугольнике, оценки погрешности в которых зависят только от наибольшей стороны треугольника и не зависят от углов. Показана неулучшаемость полученных оценок. Отметим, что построенные кусочно-полиномиальные функции глобально не являются непрерывными. Подобные конечные элементы успешно использовались при решении задач о движении несжимаемой жидкости (уравнения Навье — Стокса). Например, использовались линейные по совокупности переменных полиномы, но с определяющими параметрами не в вершинах треугольника, а в серединах его сторон, и это приводило к существенно лучшим результатам, так как при этом автоматически учитывалось трудное условие равенства нулю дивергенции.

1. Постановка задачи

В силу локальности рассматриваемых интерполяционных условий, на которых интерполяционный многочлен третьей степени будет определяться однозначно, ограничимся рассмотрением лишь одного треугольника. Пусть Δ — невырожденный треугольник в $\mathbb{R}^2$. При $i = 1, 2, 3$ через a_i будем обозначать вершины треугольника Δ , через n_i — единичную нормаль к стороне $[a_i, a_{i+1}]$, через b_i — середину стороны $[a_i, a_{i+1}]$, при этом полагаем $a_4 = a_1$.

Далее без ограничения общности будем считать, что вершины Δ имеют следующие координаты: $a_1 = (b, 0)$, $a_2 = (-a, 0)$, $a_3 = (0, h)$, причем $0 < a \leq b$ и длина наибольшей стороны треугольника Δ равна $a + b = H$. Тогда середины сторон будут иметь координаты: $b_1 = ((b - a)/2, 0)$, $b_2 = (-a/2, h/2)$ и $b_3 = (b/2, h/2)$. Обозначим через c_1 и c_2 точки, делящие наибольшую сторону на три части.

Обозначим через

$$D_\eta f(x, y) = \eta^{(1)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \eta^{(2)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

производную по направлению $\eta = (\eta^{(1)}, \eta^{(2)})$, $(\eta^{(1)})^2 + (\eta^{(2)})^2 = 1$, и пусть

$$W^{s+1}M = \left\{ f(x, y) : D_{\eta_1, \dots, \eta_l}^l f(x, y) \in C(\Delta) \quad (0 \leq l \leq s+1) \quad \text{и} \right.$$

$$\left. \forall (x, y) \in \Delta, \quad \forall \eta_1, \dots, \eta_{s+1} \quad |D_{\eta_1, \dots, \eta_{s+1}}^{s+1} f(x, y)| \leq M \right\},$$

где $C(\Delta)$ обозначает класс непрерывных функций на треугольнике Δ .

Через $P_3(x, y) = P_3(f; x, y)$ будем обозначать многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит трех, удовлетворяющий следующим интерполяционным условиям:

$$f(a_i) = P_3(a_i) \quad (i = 1, 2); \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial f(a_i)}{\partial x} = \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial x} \quad (i = 1, 2); \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial f(a_i)}{\partial y} = \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial y} \quad (i = 1, 2, 3); \quad (1.3)$$

$$D_{n_1}^2 f(c_i) = D_{n_1}^2 P_3(c_i) \quad (i = 1, 2); \quad (1.4)$$

$$D_{n_3}^3 f(b_1) = D_{n_3}^3 P_3(b_1). \quad (1.5)$$

Второй способ интерполяции получится, если вместо условий (1.3) взять следующие:

$$\frac{\partial f(a_3)}{\partial y} = \frac{\partial P_3(a_3)}{\partial y}, \quad D_{n_i} f(b_i) = D_{n_i} P_3(b_i) \quad (i = 2, 3). \quad (1.6)$$

Положим $e(x, y) = f(x, y) - P_3(x, y)$, $e_{i,j}(x, y) = \frac{\partial^{i+j} e(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}$, $e_{i,j} = e_{i,j}(0, 0)$.

2. Оценки погрешности интерполяции

Получим оценки погрешности для предложенных способов интерполяции.

Теорема. Существуют такие абсолютные положительные константы $C_{i,j}$, что для любой функции $f \in W^4 M$, любого невырожденного треугольника Δ и для интерполяционного многочлена $P_3(x, y)$, заданного условиями (1.1)–(1.5) (или (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6)), имеют место следующие оценки:

$$\left\| \frac{\partial^s e(x, y)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\|_{C(\Delta)} \leq C_{s-j,j} M H^{4-s} \quad (0 \leq j \leq 3, \quad j \leq s \leq 3). \quad (2.1)$$

С точностью до констант, не зависящих от триангуляции, оценки неумлучшаемы на рассматриваемом классе функций.

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши имеем

$$e(x, y) = e_{0,0} + x e_{1,0} + \frac{x^2}{2!} e_{2,0} + \frac{x^3}{3!} e_{3,0} + y \left(e_{0,1} + x e_{1,1} + \frac{x^2}{2!} e_{2,1} \right) + \frac{y^2}{2!} (e_{0,2} + x e_{1,2}) + \frac{y^3}{3!} e_{0,3} + R(x, y), \quad (2.2)$$

где

$$R(x, y) = \int_0^y \frac{(y-t)^3}{3!} \frac{\partial^4 f(0, t)}{\partial t^4} dt + \sum_{i=0}^3 \frac{y^i}{i!} \int_0^x \frac{(x-u)^{3-i}}{(3-i)!} \frac{\partial^4 f(u, 0)}{\partial u^{4-i} \partial y^i} du.$$

Далее через K и k_{ij} будем обозначать положительные константы, необязательно равные, не зависящие от функции f и геометрических характеристик треугольника.

Условия (1.1), (1.2) при $i = 1, 2$ определяют одномерный многочлен Эрмита, используя остаточный член которого, получаем следующие оценки [11, гл. 2, § 11]:

$$|e_{0,0}| \leq k_{00} M a^2 b^2, \quad |e_{1,0}| \leq k_{10} M a b^2, \quad |e_{2,0}| \leq k_{20} M b^2, \quad |e_{3,0}| \leq k_{30} M b.$$

Из условия (1.5) имеем $e_{0,3}((b-a)/2, 0) = 0$. Откуда

$$e_{0,3} = -\frac{\partial^3}{\partial y^3} R\left(\frac{b-a}{2}, 0\right), \quad \text{а значит, } |e_{0,3}| \leq k_{03} M b.$$

Из условия (1.4) при $i = 1, 2$ получим

$$\begin{cases} e_{0,2} + \frac{2b-a}{3} e_{1,2} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} R\left(\frac{2b-a}{3}, 0\right), \\ e_{0,2} + \frac{b-2a}{3} e_{1,2} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} R\left(\frac{b-2a}{3}, 0\right). \end{cases}$$

Откуда следует

$$e_{1,2} = \frac{3}{b+a} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} R\left(\frac{b-2a}{3}, 0\right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} R\left(\frac{2b-a}{3}, 0\right) \right],$$

$$e_{0,2} = \frac{2b-a}{3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} R\left(\frac{b-2a}{3}, 0\right) - \frac{b-2a}{3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} R\left(\frac{2b-a}{3}, 0\right);$$

здесь

$$|e_{0,2}| \leq k_{02} M b^2, \quad |e_{1,2}| \leq k_{12} M b.$$

Из условия (1.3) при $i = 3$ получим

$$e_{0,1} = -h e_{0,2} - \frac{h^2}{2} e_{0,3} - \frac{\partial}{\partial y} R(0, h);$$

тогда

$$|e_{0,1}| \leq k_{01} M b^2 h.$$

Из условия (1.3) при $i = 1, 2$ имеем

$$\begin{cases} -a e_{1,1} + \frac{a^2}{2} e_{2,1} = D_1, & \text{где } D_1 = -e_{0,1} - \frac{\partial}{\partial y} R(-a, 0), \\ b e_{1,1} + \frac{b^2}{2} e_{2,1} = D_2, & \text{где } D_2 = -e_{0,1} - \frac{\partial}{\partial y} R(b, 0), \end{cases} \quad (2.3)$$

причем $|D_1| \leq K M a^3 + K M b^2 h$, $|D_2| \leq K M b^3$. Откуда, решая систему, получим

$$e_{1,1} = -\frac{2}{ab(b+a)} \left(\frac{b^2}{2} D_1 - \frac{a^2}{2} D_2 \right), \quad e_{2,1} = \frac{2}{ab(b+a)} (b D_1 + a D_2);$$

$$|e_{1,1}| \leq k_{11} M \left(ab + \frac{b^2 h}{a} \right), \quad |e_{2,1}| \leq k_{21} M b.$$

Подставляя оценки для $e_{i,j}$ в разложение Тейлора (2.2) и вычисляя соответствующие частные производные первого, второго и третьего порядков по переменным x и y , получаем оценки (2.1) в случае интерполяционных условий (1.1)–(1.5).

Если вместо условий интерполяции (1.3) взять (1.6), то оценки (2.1) будут выполняться и в этом случае. Действительно, заметим, что все выкладки до системы (2.3) остаются справедливыми, так как условие (1.3) при $i = 3$ и первое условие (1.6) совпадают, остальные два условия (1.6) эквивалентны системе

$$\begin{cases} h e_{1,0} \left(-\frac{a}{2}, \frac{h}{2} \right) - a e_{0,1} \left(-\frac{a}{2}, \frac{h}{2} \right) = 0, \\ h e_{1,0} \left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) + b e_{0,1} \left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) = 0. \end{cases}$$

Пользуясь разложением по формуле Тейлора (2.2), подставляя уже найденные значения $e_{i,j}$ и приводя подобные, получим систему относительно неизвестных $e_{1,1}$ и $e_{2,1}$

$$\begin{cases} \frac{a^2 + h^2}{2} e_{1,1} - \frac{a(a^2 + 2h^2)}{8} e_{2,1} = E_1, \\ \frac{b^2 + h^2}{2} e_{1,1} + \frac{b(b^2 + 2h^2)}{8} e_{2,1} = E_2, \end{cases}$$

где

$$E_1 = -h \left[e_{1,0} - \frac{a}{2} e_{2,0} + \frac{a^2}{8} e_{3,0} + \frac{h^2}{8} e_{1,2} + \frac{\partial}{\partial x} R\left(-\frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right) \right]$$

$$+ a \left[e_{0,1} + \frac{h}{2} e_{0,2} - \frac{ha}{4} e_{1,2} + \frac{h^2}{8} e_{0,3} + \frac{\partial}{\partial y} R\left(-\frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right) \right],$$

$$E_2 = -h \left[e_{1,0} + \frac{b}{2} e_{2,0} + \frac{b^2}{8} e_{3,0} + \frac{h^2}{8} e_{1,2} + \frac{\partial}{\partial x} R\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) \right] - b \left[e_{0,1} + \frac{h}{2} e_{0,2} + \frac{hb}{4} e_{1,2} + \frac{h^2}{8} e_{0,3} + \frac{\partial}{\partial y} R\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) \right];$$

$$|E_1| \leq KMa^4 + KMb^2ha, \quad |E_2| \leq KMb^4.$$

Решим систему по формулам Крамера. Определитель системы равен

$$\Delta = \frac{b+a}{16} [b^2a^2 + h^2(b^2 + ab + a^2) + 2h^4] \neq 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{b(b^2 + 2h^2)}{8} E_1 + \frac{a(a^2 + 2h^2)}{8} E_2, & |\Delta_1| &\leq KMb^4a^3 + b^5ah, \\ \Delta_2 &= \frac{a^2 + h^2}{2} E_2 - \frac{b^2 + h^2}{2} E_1, & |\Delta_2| &\leq KMb^4a^2. \end{aligned}$$

Откуда следует

$$e_{1,1} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad e_{2,1} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad |e_{1,1}| \leq k_{11}M \left(ab + \frac{b^2h}{a} \right), \quad |e_{2,1}| \leq k_{21}Mb.$$

Подставляя оценки для $e_{i,j}$ в разложение Тейлора (2.2), получим оценки (2.1). Первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение доказывается в следующем разделе.

3. Неулучшаемость оценок

В этом разделе покажем, что для рассматриваемых условий интерполяции существуют константы $C_{i,j}^* > 0$, не зависящие от триангуляции, и функция $f^* \in W^4M$ такие, что для

$$e(x, y) = f^*(x, y) - P_3(f^*; x, y)$$

справедливы следующие неравенства:

$$\left\| \frac{\partial^s e(x, y)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\|_{C(\Delta)} \geq C_{s-j,j}^* M H^{4-s} \quad (0 \leq j \leq 3, \quad j \leq s \leq 3). \quad (3.1)$$

Рассмотрим равнобедренный треугольник, положив $a = b = H/2$. В качестве функции для интерполяционных условий (1.1)–(1.5) возьмем

$$f^*(x, y) = M(b^2 - x^2)^2 + M(b - x)x^2y + M(b + x)xy^2 + M(b - x)y^3 \quad (3.2)$$

и построим соответствующий интерполяционный многочлен третьей степени по совокупности переменных

$$P_3(f^*; x, y) = p_{0,0} + p_{1,0}x + p_{2,0}x^2 + p_{3,0}x^3 + p_{0,1}y + p_{1,1}xy + p_{2,1}x^2y + p_{0,2}y^2 + p_{1,2}xy^2 + p_{0,3}y^3.$$

Коэффициенты $p_{i,j}$ найдем из условий интерполяции. Из условий (1.1), (1.2) при $i = 1, 2$ имеем

$$\begin{cases} p_{0,0} - bp_{1,0} + b^2p_{2,0} - b^3p_{3,0} = 0, \\ p_{0,0} + bp_{1,0} + b^2p_{2,0} + b^3p_{3,0} = 0, \\ p_{1,0} - 2bp_{2,0} + 3b^2p_{3,0} = 0, \\ p_{1,0} + 2bp_{2,0} + 3b^2p_{3,0} = 0. \end{cases}$$

Определитель данной системы $\Delta = -16b^4$ отличен от нуля, следовательно, система имеет только нулевое решение

$$p_{0,0} = p_{1,0} = p_{2,0} = p_{3,0} = 0. \quad (3.3)$$

Таким образом, интерполяционный многочлен принимает вид

$$P_3(f^*; x, y) = p_{0,1}y + p_{1,1}xy + p_{2,1}x^2y + p_{0,2}y^2 + p_{1,2}xy^2 + p_{0,3}y^3.$$

Из условия (1.5), учитывая, что $b_1 = 0$, имеем

$$p_{0,3} = Mb. \quad (3.4)$$

Из условия (1.4) при $i = 1, 2$ получим

$$\begin{cases} p_{0,2} + \frac{b}{3}p_{1,2} = \frac{4}{9}Mb^2, \\ p_{0,2} - \frac{b}{3}p_{1,2} = -\frac{2}{9}Mb^2. \end{cases}$$

Откуда следует

$$p_{0,2} = \frac{1}{9}Mb^2, \quad p_{1,2} = Mb. \quad (3.5)$$

Из условия (1.3) при $i = 3$, учитывая (3.4), (3.5), получим

$$p_{0,1} = 3Mbh^2 - 2hp_{0,2} - 3h^2p_{0,3} = -\frac{2}{9}Mb^2h. \quad (3.6)$$

Тогда, используя условие (1.3) при $i = 1, 2$, учитывая (3.6), имеем систему

$$\begin{cases} -bp_{1,1} + b^2p_{2,1} = 2Mb^3 + \frac{2}{9}Mb^2h, \\ bp_{1,1} + b^2p_{2,1} = \frac{2}{9}Mb^2h. \end{cases}$$

Откуда следует

$$p_{1,1} = -Mb^2, \quad p_{2,1} = Mb + \frac{2}{9}Mh. \quad (3.7)$$

Подставляя найденные коэффициенты (3.3)–(3.7) в $P_3(f^*; x, y)$, получаем

$$e(x, y) = M \left[(b^2 - x^2)^2 + y(b^2 - x^2) \left(x + \frac{2}{9}h \right) - y^2 \left(\frac{b^2}{9} - x^2 \right) - y^3x \right].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|e(x, y)\| &\geq e(0, 0) = Mb^4 = \frac{1}{16}MH^4, \\ \left\| \frac{\partial e(x, y)}{\partial x} \right\| &\geq \left| \frac{\partial e}{\partial x} \left(\frac{b}{2}, 0 \right) \right| = \frac{3}{2}Mb^3 = \frac{3}{16}MH^3, \\ \left\| \frac{\partial^2 e(x, y)}{\partial x^2} \right\| &\geq \left| \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \left(\frac{b}{2}, 0 \right) \right| = Mb^2 = \frac{1}{4}MH^2, \\ \left\| \frac{\partial^3 e(x, y)}{\partial x^3} \right\| &\geq \left| \frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \left(\frac{b}{2}, 0 \right) \right| = 12Mb = 6MH, \\ \left\| \frac{\partial e(x, y)}{\partial y} \right\| &\geq \left| \frac{\partial e}{\partial y} \left(\frac{b}{2}, 0 \right) \right| = M \left| \frac{3}{8}b^3 + \frac{1}{6}bh^2 \right| \geq \frac{3}{8}Mb^3 = \frac{3}{64}MH^3, \\ \left\| \frac{\partial^2 e(x, y)}{\partial x \partial y} \right\| &\geq \left| \frac{\partial^2 e}{\partial x \partial y} (0, 0) \right| = Mb^2 = \frac{1}{4}MH^2, \\ \left\| \frac{\partial^3 e(x, y)}{\partial x^2 \partial y} \right\| &\geq \left| \frac{\partial^3 e}{\partial x^2 \partial y} \left(\frac{b}{6}, \frac{h}{9} \right) \right| = Mb = \frac{1}{2}MH, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial^2 e(x, y)}{\partial y^2}\right\| &\geq \left|\frac{\partial^2 e}{\partial y^2}(0, 0)\right| = \frac{2}{9}Mb^2 = \frac{1}{18}MH^2, \\ \left\|\frac{\partial^3 e(x, y)}{\partial x \partial y^2}\right\| &\geq \left|\frac{\partial^3 e}{\partial x \partial y^2}\left(-\frac{b}{2}, 0\right)\right| = 2Mb = MH, \\ \left\|\frac{\partial^3 e(x, y)}{\partial y^3}\right\| &\geq \left|\frac{\partial^3 e}{\partial y^3}\left(\frac{b}{3}, y\right)\right| = 2Mb = MH,\end{aligned}$$

что доказывает требуемые оценки (3.1).

В качестве функции для интерполяционных условий (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6) по аналогии с (3.2) рассмотрим

$$f_1^*(x, y) = M(b^2 - x^2)^2 + M(b - x)xy^2 + M(b - x)y^3 \quad (3.8)$$

и построим интерполяционный многочлен $P_3(f_1^*; x, y)$, используя соответствующие условия интерполяции.

Условия (1.1), (1.2) при $i = 1, 2$ и первое слагаемое функции $f_1^*(x, y)$ гарантируют нам выполнение (3.3). А значит, интерполяционный многочлен снова примет вид

$$P_3(f_1^*; x, y) = p_{0,1}y + p_{1,1}xy + p_{2,1}x^2y + p_{0,2}y^2 + p_{1,2}xy^2 + p_{0,3}y^3.$$

Условие (1.5) дает равенство (3.4). Из условия (1.4) при $i = 1, 2$ получим систему

$$\begin{cases} p_{0,2} + \frac{b}{3}p_{1,2} = \frac{2}{9}Mb^2, \\ p_{0,2} - \frac{b}{3}p_{1,2} = -\frac{4}{9}Mb^2. \end{cases}$$

Откуда следует

$$p_{0,2} = -\frac{1}{9}Mb^2, \quad p_{1,2} = Mb. \quad (3.9)$$

Из первого условия (1.6), учитывая (3.4), (3.9), получим

$$p_{0,1} = 3Mb^2h^2 - 2hp_{0,2} - 3h^2p_{0,3} = \frac{2}{9}Mb^2h. \quad (3.10)$$

Тогда, используя два оставшихся условия (1.6) и учитывая (3.9), (3.10), (3.4), имеем систему

$$\begin{cases} \frac{b^2 + h^2}{2}p_{1,1} + \frac{b(b^2 + 2h^2)}{4}p_{2,1} = -\frac{31}{36}Mb^3h - \frac{1}{4}Mbh^3 - \frac{1}{8}Mh^4, \\ \frac{b^2 + h^2}{2}p_{1,1} - \frac{b(b^2 + 2h^2)}{4}p_{2,1} = \frac{67}{36}Mb^3h - \frac{3}{8}Mb^2h^2 + \frac{1}{4}Mbh^3 - \frac{1}{8}Mh^4. \end{cases}$$

Откуда следует

$$p_{1,1} = M\left(bh - \frac{3b^2h^2 + 8bh^3 + 2h^4}{8(b^2 + h^2)}\right), \quad p_{2,1} = M\left(-\frac{49}{9}h + \frac{27bh^2 + 356h^3}{36(b^2 + 2h^2)}\right). \quad (3.11)$$

Подставляя найденные коэффициенты (3.4), (3.9)–(3.11) в $P_3(f_1^*; x, y)$, получаем

$$\begin{aligned}e(x, y) &= M(b^2 - x^2)^2 + My^2\left(\frac{b^2}{9} - x^2\right) - My^3x \\ &\quad - My\left[\frac{2}{9}bh + x\left(bh - \frac{3b^2h^2 + 8bh^3 + 2h^4}{8(b^2 + h^2)}\right) + x^2\left(-\frac{49}{9}h + \frac{27bh^2 + 356h^3}{36(b^2 + 2h^2)}\right)\right].\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|e(x, y)\| \geq |e(0, 0)| = Mb^4 = \frac{1}{16}MH^4,$$

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial e(x, y)}{\partial x} \right\| &\geq \left| \frac{\partial e}{\partial x} \left(\frac{b}{2}, 0 \right) \right| = \frac{3}{2} M b^3 = \frac{3}{16} M H^3, \\
\left\| \frac{\partial^2 e(x, y)}{\partial x^2} \right\| &\geq \left| \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \left(\frac{b}{2}, 0 \right) \right| = M b^2 = \frac{1}{4} M H^2, \\
\left\| \frac{\partial^3 e(x, y)}{\partial x^3} \right\| &\geq \left| \frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \left(\frac{b}{2}, 0 \right) \right| = 12 M b = 6 M H, \\
\left\| \frac{\partial^2 e(x, y)}{\partial y^2} \right\| &\geq \left| \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} (0, 0) \right| = \frac{2}{9} M b^2 = \frac{1}{18} M H^2, \\
\left\| \frac{\partial^3 e(x, y)}{\partial x \partial y^2} \right\| &\geq \left| \frac{\partial^3 e}{\partial x \partial y^2} \left(\frac{b}{2}, 0 \right) \right| = 2 M b = M H, \\
\left\| \frac{\partial^3 e(x, y)}{\partial y^3} \right\| &\geq \left| \frac{\partial^3 e}{\partial y^3} \left(\frac{b}{2}, y \right) \right| = 3 M b = \frac{3}{2} M H,
\end{aligned}$$

что дает выполнение оценок (3.1).

Заметим, что здесь отсутствуют оценки для $\left\| \frac{\partial^{k+1} e(x, y)}{\partial x^k \partial y} \right\|$ при $k = 0, 1, 2$. Чтобы их получить, рассмотрим аналогичную (3.2) и (3.8) функцию

$$f_2^*(x, y) = M(b^2 - x^2)^2 + M(b + x)(b - x)^2 y$$

и построим интерполяционный многочлен $P_3(f_2^*; x, y)$.

Условия (1.1), (1.2) при $i = 1, 2$ и первое слагаемое функции $f_2^*(x, y)$ гарантируют нам выполнение (3.3). Условие (1.5) дает равенство

$$p_{0,3} = 0. \quad (3.12)$$

Из условия (1.4) при $i = 1, 2$ получим систему

$$\begin{cases} p_{0,2} + \frac{b}{3} p_{1,2} = 0, \\ p_{0,2} - \frac{b}{3} p_{1,2} = 0. \end{cases}$$

Откуда следует

$$p_{0,2} = p_{1,2} = 0. \quad (3.13)$$

Из первого условия (1.6), учитывая (3.12), (3.13), получим

$$p_{0,1} = M b^3. \quad (3.14)$$

Тогда, используя два оставшихся условия (1.6) и учитывая (3.12)–(3.14), имеем систему

$$\begin{cases} \frac{b^2 + h^2}{2} p_{1,1} + \frac{b(b^2 + 2h^2)}{4} p_{2,1} = -\frac{5}{8} M b^4 - \frac{3}{2} M b^3 h - \frac{5}{8} M b^2 h^2, \\ \frac{b^2 + h^2}{2} p_{1,1} - \frac{b(b^2 + 2h^2)}{4} p_{2,1} = -\frac{1}{8} M b^4 + \frac{3}{2} M b^3 h + \frac{3}{8} M b^2 h^2. \end{cases}$$

Откуда следует

$$p_{1,1} = M \left(-\frac{3}{4} b^2 + \frac{b^2 h^2}{2(b^2 + h^2)} \right), \quad p_{2,1} = -M \left(b + \frac{6b^2 h}{b^2 + 2h^2} \right). \quad (3.15)$$

Подставляя найденные коэффициенты (3.12)–(3.15) в $P_3(f_2^*; x, y)$, получаем

$$e(x, y) = M \left[(b^2 - x^2)^2 + (b + x)(b - x)^2 y - b^3 y + x y \left(\frac{3}{4} b^2 - \frac{b^2 h^2}{2(b^2 + h^2)} \right) + x^2 y \left(b + \frac{6b^2 h}{b^2 + 2h^2} \right) \right].$$

Тогда

$$\left\| \frac{\partial e(x, y)}{\partial y} \right\| \geq \left| \frac{\partial e}{\partial y}(b, 0) \right| = M \left| \frac{3}{4} b^3 + b^3 h \left(\frac{6b}{b^2 + 2h^2} - \frac{h}{2(b^2 + h^2)} \right) \right| \geq \frac{3}{4} M b^3 = \frac{3}{32} M H^3,$$

$$\left\| \frac{\partial^2 e(x, y)}{\partial x \partial y} \right\| \geq \left| \frac{\partial^2 e}{\partial x \partial y}(0, y) \right| = M \left| \frac{1}{4} b^2 + \frac{b^2 h^2}{2(b^2 + h^2)} \right| \geq \frac{1}{4} M b^2 = \frac{1}{16} M H^2,$$

$$\left\| \frac{\partial^3 e(x, y)}{\partial x^2 \partial y} \right\| \geq \left| \frac{\partial^3 e}{\partial x^2 \partial y} \left(\frac{b}{2}, y \right) \right| = M \left| 3b + \frac{6b^2 h}{b^2 + 2h^2} \right| \geq 3Mb = \frac{3}{2} M H,$$

что полностью доказывает неравенства (3.1) для второго способа интерполяции.

Таким образом, во всех рассмотренных случаях оценки погрешности сверху и снизу с точностью до констант, не зависящих от триангуляции, совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ciarlet P.G., Raviart P.A. General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1972. Vol. 46, no. 3. P. 177–199.
2. Субботин Ю.Н. Многомерная кусочно-полиномиальная интерполяция // Методы аппроксимации и интерполяции / Под ред. А.Ю. Кузнецова. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981. С. 148–153.
3. Субботин Ю.Н. Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 110–119.
4. Субботин Ю.Н. Новый кубический элемент в МКЭ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 120–130.
5. Baidakova N.V. On some interpolation process by polynomials of degree $4m + 1$ on the triangle // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1999. Vol. 14, no. 2. P. 87–107.
6. Байдакова Н.В. Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 47–52.
7. Латыпова Н.В. Погрешность аппроксимации многочленами степени $4k + 3$ на треугольнике // Тр. Междунар. шк. С.Б. Стечкина по теории функций. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1999. С. 128–137.
8. Латыпова Н.В. Оценки погрешности аппроксимации многочленами степени $4k + 3$ на треугольнике // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2002. Т. 8, № 1. С. 203–226.
9. Латыпова Н.В. Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике // Вестн. Удм. ун-та. 2003. Вып. 1. С. 3–18. (Математика.)
10. Латыпова Н.В. Погрешность кусочно-параболической интерполяции на треугольнике // Вестн. Удм. ун-та. 2009. Вып. 3. С. 91–97. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
11. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962. 464 с.

Латыпова Наталья Владимировна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Удмуртский государственный университет
e-mail: nlatypova@udm.ru

Поступила 04.03.2011