



УДК: 532.527,517.925+517.938.5

MSC 2010: 76M23, 34A05

Бифуркационный анализ и индекс Конли в механике*

А. В. Болсинов, А. В. Борисов, И. С. Мамаев

Работа посвящена использованию бифуркационного анализа и индекса Конли в гамильтоновых динамических системах. Приведено доказательство теоремы о рождении (исчезновении) неподвижных точек при смене индекса Морса. Найдены новые относительные равновесия в задаче о движении точечных вихрей равной интенсивности в круге.

Ключевые слова: индекс Морса, индекс Конли, бифуркационный анализ, бифуркационная диаграмма, гамильтонова динамика, неподвижная точка, относительное равновесие

* *От редакции:* на с. 683–690 мы приводим биографический очерк о выдающемся математике Чарльзе Конли и список его публикаций

Получено 28 июля 2011 года

После доработки 21 сентября 2011 года

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (11.G34.31.0039), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-1.5-503-004-019). Работа А. В. Болсинова выполнена при поддержке гранта «Бигамильтоновы системы и особенности интегрируемых систем» ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (02.740.11.5213).

Болсинов Алексей Викторович

A.Bolsinov@lboro.ac.uk

School of Mathematics, Loughborough University

United Kingdom, LE11 3TU, Loughborough, Leicestershire

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

119899, Россия, г. Москва, Воробьевы горы

Борисов Алексей Владимирович

borisov@rcd.ru

Мамаев Иван Сергеевич

mamaev@rcd.ru

Институт компьютерных исследований

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Содержание

1. Введение	650
2. Индекс Конли: мотивировка, определение и примеры	651
2.1. Индекс векторного поля и индекс Морса	651
2.2. Предварительные соображения	654
2.3. Необходимые сведения из элементарной топологии	656
2.4. Формальное определение	658
2.5. Примеры индекса Конли	660
3. Приложение к задаче об относительных равновесиях	663
3.1. Смена индекса и рождение положений равновесия	663
3.2. Бифуркационная диаграмма и ее анализ	665
4. Относительные равновесия в задаче трех вихрей в круге	668
4.1. Уравнения движения и редукция	668
4.2. Известные стационарные конфигурации и бифуркационная диаграмма	670
4.3. Новые стационарные конфигурации и их устойчивость	673
5. Дискуссия	679

1. Введение

В настоящей работе мы следуем той же идее, что и в наших недавних работах [2, 3], — продемонстрировать, как конструкции, хорошо известные в чистой математике, в частности, в топологии, могут быть использованы в задачах механики. Довольно часто такие конструкции из-за использования абстрактного языка оказываются невостребованными специалистами, занимающимися приложениями. Мы хотели бы попытаться объяснить их на более привычном и менее формальном языке, имея в виду не только методические и образовательные цели, но главным образом расширение и развитие взаимодействия между разными областями математики и механики.

Как и в наших предшествующих работах, мы изложим сначала теоретический материал, а затем проиллюстрируем его примером из механики. В качестве нового приложения мы дадим описание относительных положений равновесия в одной из задач вихревой динамики.

Сначала сделаем несколько замечаний общего характера. В задачах механики часто возникает необходимость проанализировать свойства особых точек гамильтониана в зависимости от некоторых параметров. Хорошо известно, что невырожденная (в смысле теории Морса) особая точка устойчива относительно малых изменений параметра: она остается невырожденной и ее индекс не меняется. Однако при некоторых (бифуркационных) значениях параметра может наступать вырождение, а при переходе через них индекс особой точки может меняться. В таких случаях важно понимать сценарии возможных бифуркаций. Один из вопросов, которые оказываются важными в этом контексте (например, для поиска относительных положений), можно сформулировать так. Может ли у изолированного положения равновесия измениться индекс без рождения новых положений равновесия?

Наиболее подходящим математическим аппаратом для ответа на такого типа вопросы оказывается *индекс Конли* — топологический инвариант изолированного инвариантного множества динамической системы, введенный и изученный Чарльзом Конли в 60–70 годах



прошлого века [21]. Эффективность этого инварианта в самых различных задачах теории динамических систем очень хорошо известна экспертам [20], работающим в данной области, однако нельзя сказать, что это понятие является общеизвестным для специалистов-прикладников.

Следующий параграф посвящен определению индекса Конли и самым простейшим связанным с ним конструкциям (см. также [1, 29, 30]).

2. Индекс Конли: мотивировка, определение и примеры

Прежде чем дать формальное определение индекса Конли, мы напомним некоторые элементарные понятия из топологической динамики (см., например, [5, 18, 28]).

2.1. Индекс векторного поля и индекс Морса

1. Индекс векторного поля. Пусть дана динамическая система $\dot{x} = v(x)$ на плоскости \mathbb{R}^2 в некоторой области U , граница которой представляет собой гладкую замкнутую кривую $\gamma(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. Пусть на границе области нет положений равновесия, то есть $v(x) \neq 0$ для всех $x \in \gamma$. Можно ли по поведению векторного поля на границе области выяснить, существует ли внутри области положение равновесия? Хорошим инструментом для ответа на этот вопрос служит *индекс векторного поля*, который определяется следующим образом.

Рассмотрим векторное поле v на границе как периодическую вектор-функцию $v(t) = v(\gamma(t))$ от параметра t на кривой γ . *Индексом векторного поля v* ($\text{ind } v$) на границе γ области U называется число оборотов, которое делает вектор $v(t)$ при обходе вдоль границы, то есть при изменении t от 0 до 2π (рис. 1, 2).

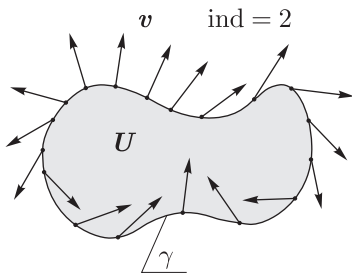


Рис. 1.

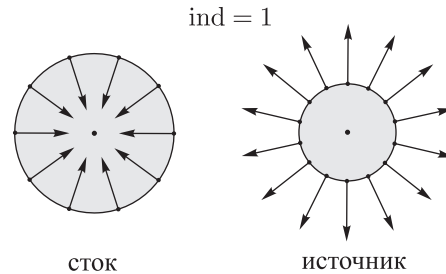


Рис. 2.

Теорема 3. Если индекс отличен от нуля, то внутри области U обязательно существует положение равновесия (неподвижная точка) динамической системы. Наоборот, если индекс равен нулю, то можно продолжить векторное поле v с границы внутрь области U так, что внутри положений равновесия не будет.

Замечание. Если кривая $\gamma(t)$ и векторное поле на ней $v(t)$ имеют определенную степень гладкости, то и внутри области поле v можно продолжить с той же степенью гладкости. В аналитическом случае возможно также вещественно-аналитическое продолжение.

Несложно обобщить это определение на многомерный случай. Если у нас имеется область $U \subset \mathbb{R}^n$, гомеоморфная шару B^n , с границей ∂U , диффеоморфной единичной сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, причем векторное поле v на границе не обращается в нуль, то можно определить



естественное отображение $\phi: \partial U \rightarrow S^{n-1}$, полагая $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x})/|\mathbf{v}(\mathbf{x})|$. Индексом векторного поля называется степень этого отображения. В частности, если ϕ является взаимнооднозначным, то индекс равен ± 1 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним формальное определение степени отображения. Пусть имеется гладкое отображение $F: M_1 \rightarrow M_2$ между двумя компактными ориентированными многообразиями одинаковой размерности. Тогда почти для любой точки $\mathbf{y} \in M_2$ ее прообраз F^{-1} содержит лишь конечное число точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$, причем все они регулярны, то есть определитель матрицы Якоби отображения F в каждой из этих точек отличен от нуля. По определению, степенью отображения F называется число

$$\deg F = \sum_{\mathbf{x}_i \in F^{-1}(\mathbf{y})} \text{sign det } dF(\mathbf{x}_i).$$

Другими словами, степень отображения — это число прообразов регулярной точки, подсчитанное с учетом знака каждой точки, который определяется тем — сохраняет или меняет ориентацию отображения F . Степень отображения обладает двумя фундаментальными свойствами: она не зависит от выбора регулярной точки \mathbf{y} , которая используется в определении и, кроме того, степень отображения не меняется при непрерывной деформации отображения F .

В качестве одного из наиболее характерных примеров можно рассмотреть комплексный полином $f(z)$ степени n , рассматриваемый как отображение пополненной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ в себя. С топологической точки зрения $\overline{\mathbb{C}}$ представляет собой двумерную сферу S^2 (так называемую сферу Римана), и степень отображения $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ равна степени многочлена, поскольку для точки w_0 общего положения уравнение $f(z) = w_0$ имеет n различных решений z_1, \dots, z_n , причем знаки во всех точках положительны, поскольку для любого комплексного отображения $f(z) = u(x, y) +$

$$+ iv(x, y) \text{ в неособой точке имеем } \det df = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2 = |f'(z)|^2 > 0.$$

Индекс векторного поля обладает двумя замечательными свойствами.

- Во-первых, он не меняется при деформации области U , если в процессе деформации граница области не проходит через положения равновесия.
- Во-вторых, индекс не меняется в процессе деформации самой динамической системы. Другими словами, если векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ включено в семейство $\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x})$, непрерывно зависящее от параметра α , то индекс \mathbf{v}_α на границе ∂U не зависит от α (разумеется, при условии, что в процессе деформации на границе области не возникает положений равновесия).

Теорема 3 для многомерного случая справедлива в той же формулировке.

Индексом изолированной особой точки \mathbf{x}_0 векторного поля $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ называется индекс для границы его малой шаровой окрестности (эта окрестность, разумеется, не должна содержать никаких других особых точек). Справедливо простое свойство суммирования:

если внутри области находится несколько изолированных особых точек, то индекс вдоль границы всей области будет равен сумме индексов отдельных точек.

ЗАМЕЧАНИЕ. Индекс векторного поля часто также называют индексом Пуанкаре – Хопфа, так как он наиболее известен благодаря теореме Пуанкаре – Хопфа о том, что сумма индексов особых точек векторного поля на компактном многообразии равна его эйлеровой характеристике. Пуанкаре доказал эту теорему для двумерных многообразий, а Хопф обобщил ее на многомерный случай.

Недостатком этого индекса является его малая информативность. Например, если мы рассмотрим градиентное векторное поле простейшей квадратичной функции $f = \pm \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

$$\mathbf{v} = \text{grad } f = \pm(x, y), \tag{2.1}$$



то его индекс равен единице вне зависимости от выбора знака, и поэтому, в частности, не позволяет различить сток и источник (рис. 2). И вообще в случае невырожденной особой точки векторного поля в \mathbb{R}^n его индекс всегда равен ± 1 , хотя такие точки могут иметь существенно разные топологические типы. Так, в частности, на рисунке 1 $\text{ind} = 2$, это означает, что внутри области находится что-то более сложное, чем невырожденная особая точка. Однако что именно там находится, определить невозможно. Там, например, может находиться изолированная особая точка, но тогда она обязана быть вырожденной. Либо там может оказаться несколько невырожденных особых точек (например, два стока или два источника). Примеры приведены на рисунке 3.

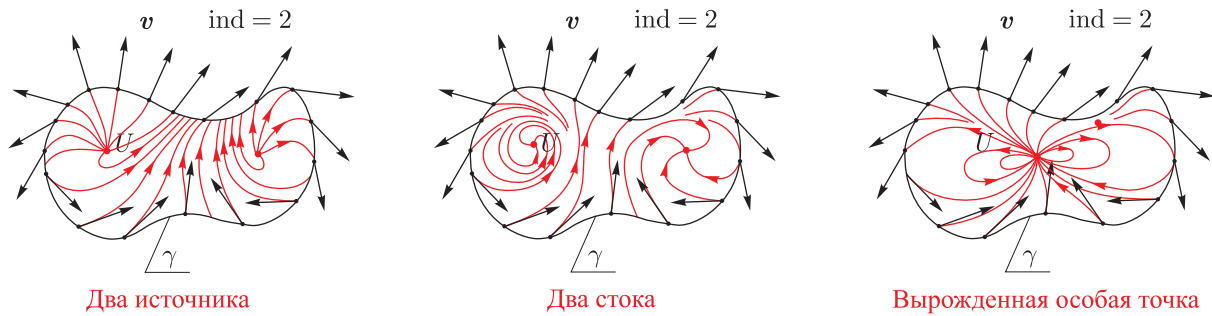


Рис. 3.

2. Индекс Морса. Для рассмотренного выше примера градиентного потока (2.1) более информативным является *индекс Морса* особой точки соответствующей гладкой функции. Напомним эту конструкцию. Пусть $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, — гладкая функция, а $\mathbf{x}^{(0)}$ — ее невырожденная особая точка (это означает, напомним, что $\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \Big|_{\mathbf{x}^{(0)}} \neq 0$).

Индексом особой точки $\mathbf{x}^{(0)}$ называется отрицательный индекс инерции второго дифференциала $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$. Другими словами, если линейной заменой второй дифференциал привести к нормальной форме так, что

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(0)}) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2 + \dots,$$

то индекс Морса — это число k .

Связь обычного индекса ind особой точки поля $\mathbf{v} = \text{grad } f$ с индексом Морса ind_M очень проста:

$$\text{ind grad } f(\mathbf{x}^{(0)}) = (-1)^{\text{ind}_M f(\mathbf{x}^{(0)})}. \tag{2.2}$$

В случае гамильтонова векторного поля на $\mathbb{R}^{2n} = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p})\}$, определенного уравнениями

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \tag{2.3}$$

для невырожденной неподвижной точки $\mathbf{x}^{(0)} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ имеется аналогичный инвариант — индекс Морса гамильтониана $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ в точке $\mathbf{x}^{(0)}$. Интересно отметить, что индексы гамильтонова векторного поля (2.3) и градиентного поля $\text{grad } H$ совпадают (и определяются соотношением (2.2)), поскольку векторные поля связаны между собой невырожденным оператором с положительным определителем.



Для векторных полей произвольной природы в случае гиперболических особых точек также можно определить индекс Морса [1]. С точки зрения динамики *индекс Морса гиперболической особой точки* (или замкнутой траектории) динамической системы определяется как размерность неустойчивого инвариантного многообразия. В частности, индекс Морса векторного поля $\text{grad } f$ в невырожденной особой точке равен индексу Морса функции $-f$ в этой точке.

Индекс Морса дает лучшее представление о поведении системы вблизи положения равновесия. Его недостаток, однако, заключается в том, что он хорошо определен только для невырожденных особых точек. Говорить о его устойчивости при деформации функции $f_0(\mathbf{x}) \rightsquigarrow f_\alpha(\mathbf{x})$ сложно просто потому, что при некоторых значениях параметра α условие невырожденности нарушается и в этот момент индекс вообще нельзя определить. Кроме того, у векторного поля могут встретиться более сложные инвариантные подмножества (подмногообразия), чем неподвижная точка, которые также хотелось бы характеризовать некоторым инвариантом.

Хотелось бы поэтому иметь некоторое обобщение индекса Морса, которое можно было бы использовать и в случае вырождений. Таким инвариантом и является индекс Конли. В отличие от двух предыдущих индексов, индекс Конли — это не число, а некоторое топологическое пространство. И даже не пространство, а его гомотопический тип. Чтобы его определить, нам понадобятся некоторые топологические определения.

2.2. Предварительные соображения

Хотя на интуитивном уровне идея индекса Конли проста и естественна, формальное определение может показаться на первый взгляд странным и даже искусственным. Поэтому в данном разделе мы обсудим предварительные соображения, мотивирующие выбор этого инварианта.

Рассмотрим окрестность N изолированной особой точки динамической системы ϕ^t , и на ее границе выделим *подмножество выхода* L , состоящее из тех точек, где траектории покидают окрестность. Эта пара (N, L) в определенном смысле характеризует динамику вблизи особой точки (грубо говоря, показывает, какая часть потока «вытекает» из окрестности). При малом шевелении и системы ϕ^t , и окрестности N топология меняться не должна, поэтому пару (N, L) и хотелось бы рассматривать в качестве топологического инварианта особенности.

Такое наивное определение, однако, не удовлетворяет естественным требованиям к инвариантам. Так, например, оно существенно зависит от формы окрестности (пример показан на рис. 4). Отметим, что априори никаких дополнительных ограничений накладывать на окрестность нельзя, поскольку в процессе деформации за ее формой (по отношению к потоку) следить сложно.

Для того чтобы исправить этот недостаток, в конструкции индекса Конли используется еще одна идея, которая заключается в стягивании окрестности N вдоль потока и приклеивании к множеству выхода L . С формальной точки зрения речь идет об отображении — полупотоке, который определяется следующим образом: каждая точка $\mathbf{x} \in N$ движется вдоль своей траектории в положительном направлении до тех пор, пока не попадет в множество выхода L , после чего немедленно останавливается. В частности, точки, принадлежащие L , стоят на месте и никуда не движутся, а те точки, которые до выхода никогда не доходят, продолжают движение по своим обычным траекториям до бесконечности, то есть если внутри окрестности имеется инвариантное множество, то оно останется на месте, а вся остальная часть N приклеится к множеству выхода L .



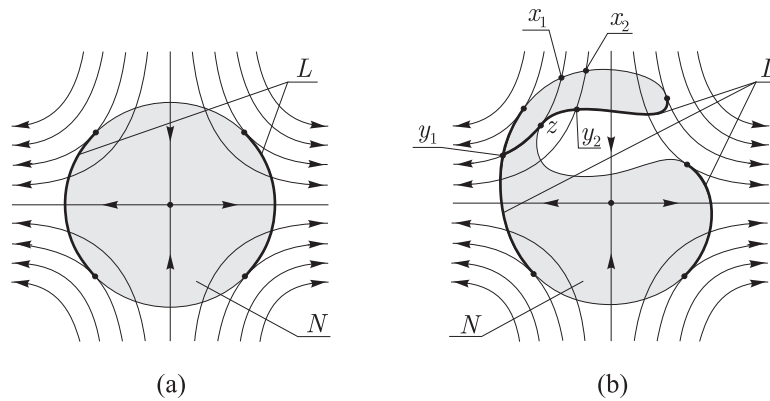


Рис. 4. Примеры различных окрестностей неподвижной точки потока.

Этот полупоток обладает другим недостатком — он не является непрерывным. В примере на рисунке 4b это хорошо видно: точки x_1 и x_2 близки, но покидают окрестность в точках y_1 и y_2 , которые друг от друга далеки. Чтобы избежать этой неприятности, нам придется включить точку z в множество L . Но и этого будет недостаточно. Проблема будет с теми точками, которые расположены на траектории между z и y_1 . Сама точка z уже является точкой выхода и поэтому никуда двигаться не должна, в то время как остальные точки на рассматриваемом участке траектории должны деформироваться в точку y_1 . Решение проблемы заключается в том, чтобы включить в множество L все точки, расположенные на траектории между z и y_1 . Другими словами, важным является следующее требование: если какая-то точка попала в множество выхода L , то покинуть его и снова уходить в $N \setminus L$ ¹ она не должна. Более того, поскольку динамика на множестве выхода игнорируется, для непрерывности оказывается необходимым стянуть все множество выхода L в одну точку; такое пространство, получающееся из пары (N, L) , будем обозначать N/L (см. подробнее следующий раздел).

Еще одно важное соображение. Как хорошо известно из примеров, в процессе деформации могут рождаться новые положения равновесия, могут появляться замкнутые траектории или более сложные инвариантные множества. Поэтому имеет смысл не ограничиваться положениями равновесия, а сразу рассматривать *инвариантные* (то есть состоящие из целых траекторий) *компактные подмножества* S произвольной природы. Требование к инвариантному множеству S состоит в том, что оно должно быть *изолированным*, то есть должна существовать такая окрестность N (удобнее считать эту окрестность компактной), в которой S является максимальным инвариантным подмножеством. Такая окрестность называется *изолирующей*.

Интересно обратить внимание на тот факт, что определение изолирующей окрестности N можно дать, опираясь лишь на свойства потока ϕt в окрестности границы ∂N без упоминания самого множества S (которое на самом деле может оказаться пустым, а этот случай отнюдь не следует исключать из рассмотрения):

компактное множество N называется *изолирующей окрестностью*, если ни одна граничная точка $x \in \partial N$ не лежит на траектории, целиком содержащейся в N .

ЗАМЕЧАНИЕ. На плоскости точка центр (в окрестности которой все траектории замкнуты) не имеет изолирующей окрестности. При малой деформации центр может превратиться как в сток, так и в источник.

¹Напомним, что $N \setminus L$ обозначает дополнение к L в N , то есть $N \setminus L = \{x \in N, x \notin L\}$.

Приведенные соображения подтверждают естественность сформулированных ниже условий на L . Прежде чем дать формальное определение для индекса Конли, приведем необходимые сведения из элементарной топологии.

2.3. Необходимые сведения из элементарной топологии

Пусть X — некоторое топологическое пространство, $Y \subset X$ — его компактное подмножество. Через X/Y мы будем обозначать новое топологическое пространство, получающееся из X стягиванием Y в точку. Примеры изображены на рисунке 5.

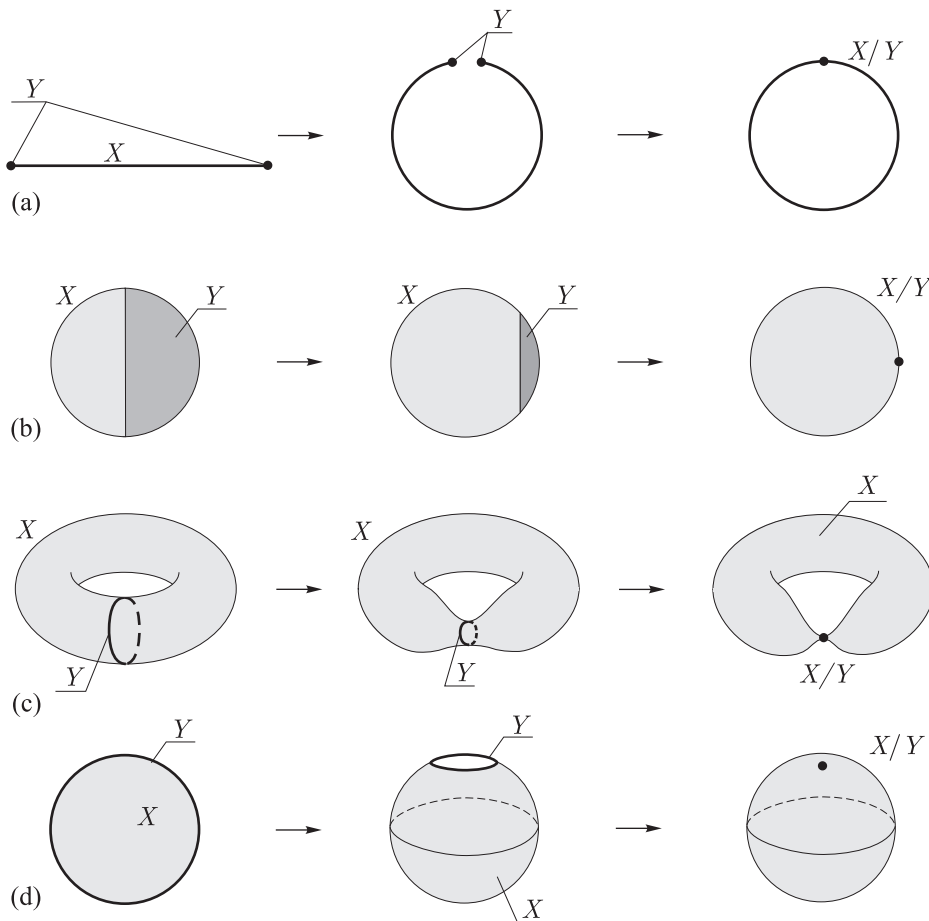


Рис. 5. Примеры пространств X/Y .

Рис. 5а: если «стянуть» в точку (то есть отождествить) концы $\{0\} \cup \{1\} = Y$ отрезка $X = [0, 1]$, то в качестве X/Y получится окружность;

Рис. 5b: если стянуть в точку половину Y диска X , то снова получится диск;

Рис. 5с: если стянуть в точку параллель Y на торе X , то пространством X/Y будет тор с перетяжкой;

Рис. 5d: если стянуть в точку граничную окружность Y двумерного диска X , то получится двумерная сфера.

Последний пример имеет естественное многомерное обобщение: если X — n -мерный шар, а Y — его граничная сфера, то, стягивая ее в точку, мы получим пространство X/Y , гомеоморфное n -мерной сфере.

Кроме того, после сжатия подмножества Y в точку мы получим в пространстве X/Y некоторую выделенную точку, которую будем обозначать $[Y]$.

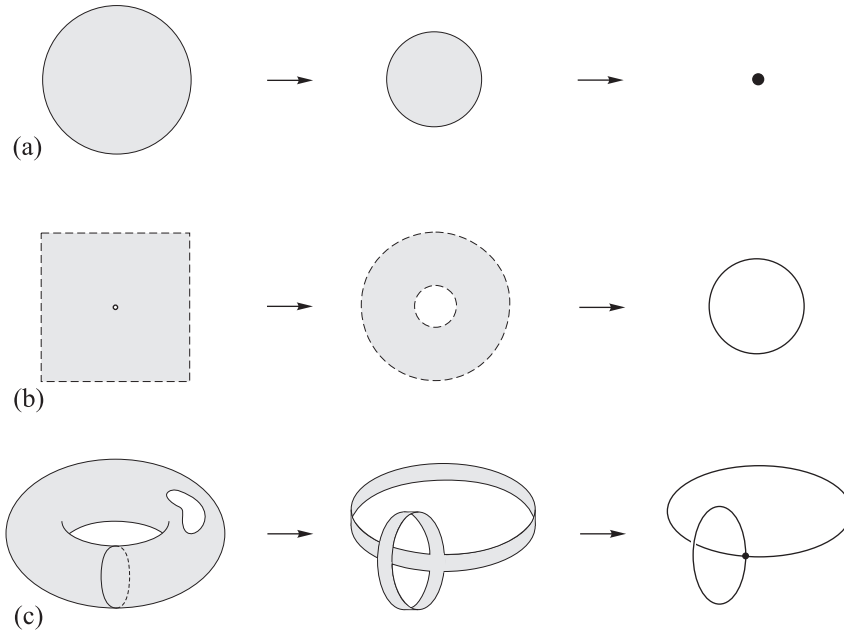


Рис. 6. Примеры гомотопически эквивалентных пространств.

Два топологических пространства X_1 и X_2 называются *гомотопически эквивалентными*, если они могут быть «продеформированы» друг в друга. Примеры показаны на рисунке 6:

Рис. 6а: n -мерный шар гомотопически эквивалентен точке;

Рис. 6б: плоскость с выброшенной точкой гомотопически эквивалентна окружности;

Рис. 6с: тор с дыркой гомотопически эквивалентен букету двух окружностей (то есть двум окружностям, склеенным в одной точке).

Для более строгого определения понятия гомотопической эквивалентности сначала нужно ввести понятие *гомотопных отображений*. Пусть $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ — два непрерывных отображения. Они называются гомотопными, если существует непрерывное семейство отображений $f_\alpha: X \rightarrow Y$, $\alpha \in [0, 1]$, деформирующих одно отображение в другое. Говоря более формально, существует непрерывное отображение $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, такое, что $f_0(x) = F(x, 0)$, $f_1(x) = F(x, 1)$ для $x \in X$.

Топологические пространства X_1 и X_2 называются *гомотопически эквивалентными* (или имеющими одинаковый *гомотопический тип*), если существуют два отображения $f: X_1 \rightarrow X_2$ и $g: X_2 \rightarrow X_1$, такие, что $f \circ g: X_2 \rightarrow X_2$ гомотопно тождественному отображению id_{X_2} , а $g \circ f: X_1 \rightarrow X_1$ гомотопно тождественному отображению id_{X_1} .

Менее тривиальный пример. Пусть X — 3-мерный шар, а Y — окружность на граничной сфере. Каков гомотопический тип пространства X/Y ? Деформация на рисунке 7 показывает, что X/Y имеет гомотопический тип двумерной сферы S^2 .

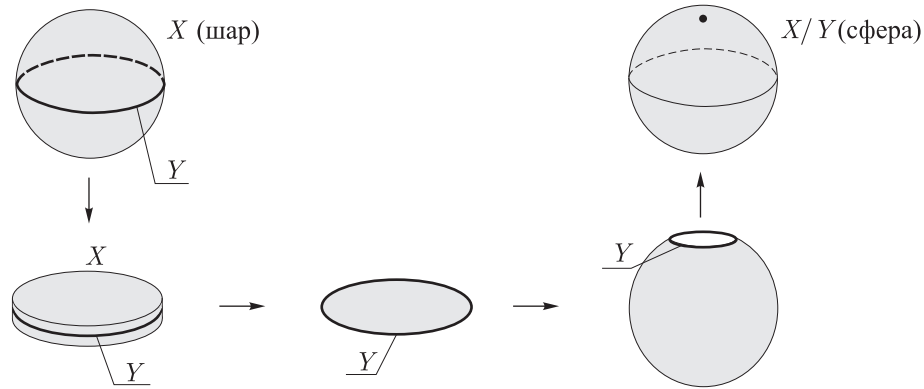


Рис. 7. Процесс деформации шара с отмеченной окружностью в сферу.

2.4. Формальное определение

Пусть задана динамическая система $\phi^t: X \rightarrow X$ на некотором многообразии X (в качестве X можно рассматривать произвольное локально компактное топологическое пространство). Компактное инвариантное подмножество $S \subset X$ называется *изолированным*, если для него существует компактная окрестность N , в которой S является максимальным инвариантным подмножеством (иными словами, S — это инвариантная часть N):

$$S = \text{inv}(N) := \{\mathbf{x} \in N: \phi^t(\mathbf{x}) \in N \text{ для всех } t \in \mathbb{R}\}.$$

В этом случае N называется *изолирующей окрестностью* для S . Индекс Конли сопоставляет инвариантному множеству S гомотопический тип некоторого топологического пространства с отмеченной точкой. Конструкция состоит в следующем.

Индексная пара (N, L) для изолированного инвариантного множества S состоит из двух компактных подмножеств $L \subset N$ многообразия X , таких, что

- замыкание множества $N \setminus L$ является изолирующей окрестностью для S ;
- L является множеством выхода для N : для любой $\mathbf{x} \in N$ и $t > 0$ с условием $\phi^t(\mathbf{x}) \notin N$ существует $t_0 \in [0, t]$, такое, что $\phi^{t_0}(\mathbf{x}) \in L$;
- L положительно инвариантно в N , то есть точки, попавшие в L , не могут выйти «назад» в $N \setminus L$: если $\mathbf{x} \in L$ и $\phi^\tau(\mathbf{x}) \in N$ для всех $\tau \in [0, t]$, $t > 0$, то $\phi^t(\mathbf{x}) \in L$.

Можно показать, что для любого инвариантного изолированного множества S индексная пара существует. Более того, если (N, L) и (N', L') — две индексные пары для S , то фактор-пространства N/L и N'/L' гомотопически эквивалентны как пространства с отмеченными точками $[L]$ и $[L']$.

Определение 1. Индексом Конли $\text{ind}_C(S, \phi)$ инвариантного множества S фазового потока ϕ^t называется гомотопический тип пространства N/L с отмеченной точкой $[L]$, где (N, L) — индексная пара для S .

Кроме того, как было сказано в предыдущем разделе, изолирующая окрестность и, следовательно, индексная пара (N, L) могут быть корректно определены для потока ϕ^t без использования инвариантного множества, поэтому топологический тип N/L в этом случае



мы будем также называть *индексом Конли изолирующей окрестности* $\text{ind}_C(N, \phi)$. Про само инвариантное множество можно даже и не упоминать. Концептуально это очень важно, поскольку во многих случаях мы вообще ничего об этом инвариантном множестве, находящемся внутри окрестности, не знаем.

Определенный таким образом индекс обладает тремя фундаментальными свойствами.

Теорема Конли. Пусть N — изолирующая окрестность некоторой гладкой динамической системы, тогда

1. индекс является инвариантом изолирующей окрестности;
2. если индекс нетривиален, то есть отличен от «точки», то внутри изолирующей окрестности имеется непустое инвариантное множество;
3. если ϕ_α — непрерывное семейство динамических систем, для каждой из которых N является изолирующей окрестностью, то для всех значений параметра α индекс $\text{ind}_C(N, \phi_\alpha)$ одинаков.

ЗАМЕЧАНИЕ. В такой (или наиболее близкой) формулировке эта теорема приведена в работе [30].

Таким образом, согласно этим свойствам, если имеется две разные изолирующие окрестности одного и того же инвариантного множества, то индекс не зависит от того, какую из этих окрестностей мы будем рассматривать. Кроме того, само это инвариантное множество S совершенно не важно: с ним внутри этой окрестности могут происходить любые события при деформации (например, оно может исчезнуть вообще), но индекс меняться не будет.

Для наших целей наиболее важным является третье свойство индекса Конли, а именно, его устойчивость при деформации динамической системы. Оно часто применяется в следующей ситуации. Предположим, что нам даны две динамические системы ϕ_0 и ϕ_1 , включенные в непрерывное семейство ϕ_α . Пусть N — изолирующая окрестность для ϕ_0 и ϕ_1 , тогда возможны два случая:

- либо индекс Конли при изменении параметра α остается постоянным, и, в частности, $\text{ind}_C(N, \phi_0) = \text{ind}_C(N, \phi_1)$;
- либо индекс изменился, и тогда при некотором промежуточном значении параметра $\alpha \in (0, 1)$ окрестность N перестала быть изолирующей.

Напомним: нарушение условия изолированности эквивалентно тому, что через некоторую граничную точку $x \in \partial N$ проходит траектория, целиком содержащаяся в N .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если при каком-то значении α нарушилось условие изолированности, то теория Конли перестает работать и никакого определенного ответа дать не может: изменится ли индекс или останется прежним.

3. Бифуркация Андронова – Хопфа [24]. Один из наиболее показательных примеров применения этих свойств — *бифуркация рождения цикла* на плоскости, когда при каждом значении параметра $\alpha \in [0, 1]$ имеется ровно одна стационарная точка с комплексными мультипликаторами $\lambda(\alpha) \pm i\mu(\alpha)$. Бифуркация заключается в том, что вещественная часть мультипликатора, то есть $\lambda(\alpha)$, меняет знак с минуса на плюс, в результате чего точка из притягивающей превращается в отталкивающую. Индекс Конли меняется с пары точек

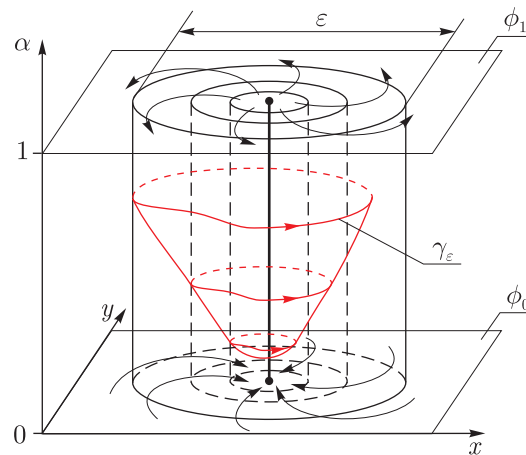


Рис. 8. Бифуркация Андронова – Хопфа.

при $\lambda < 0$ на сферу с выделенной точкой при $\lambda > 0$ (см. пример ниже на рис. 9а, с). Следовательно, если зафиксировать стандартную ε -окрестность точки так, чтобы она была изолирующей и при $\alpha = 0$, и при $\alpha = 1$, то при некотором промежуточном значении параметра α она перестанет быть изолирующей, а это будет означать, что через некоторую ее граничную точку проходит замкнутая траектория, целиком лежащая в данной окрестности. Ясно, что это предельный цикл, поскольку ничего другого по соображениям размерности быть не может. Такая траектория (при разных значениях параметра α) существует для любого ε , обозначим ее через γ_ε . Очевидно, что все эти траектории различны и образуют семейство замкнутых циклов (см. рис. 8). Таким образом, мы получаем доказательство существования целого семейства замкнутых траекторий.

2.5. Примеры индекса Конли

В большинстве примеров в качестве N можно взять самую естественную (компактную) окрестность инвариантного множества, а в качестве L — обычное множество выхода, расположенное на границе ∂N .

1. Источник, седло и сток на плоскости. На рисунке 9 показаны соответствующие индексные пары. В качестве N во всех случаях берется диск с центром в положении равновесия, а множество выхода L представляет собой:

- (а) в случае источника — всю граничную окружность,
- (б) в случае седла — две дуги,
- (с) в случае стока является пустым.

Если стянуть в точку граничную окружность диска, то мы получим двумерную сферу (рис. 9а). Если отождествить в точку две дуги, то получится пространство, которое гомотопически эквивалентно окружности (рис. 9б). В случае источника множество выхода пусто, формально «сжимая его в точку», мы получаем точку, расположенную отдельно от диска N (это правило принимается как соглашение). Таким образом, фактор-пространство представляет собой несвязное объединение диска и точки. Поскольку диск гомотопически эквивалентен точке, то индекс Конли в случае стока — это гомотопический тип пространства, состоящего из пары точек (или, что то же самое, нульмерной сферы $S^0 = \{x^2 = 1, x \in \mathbb{R}\}$).

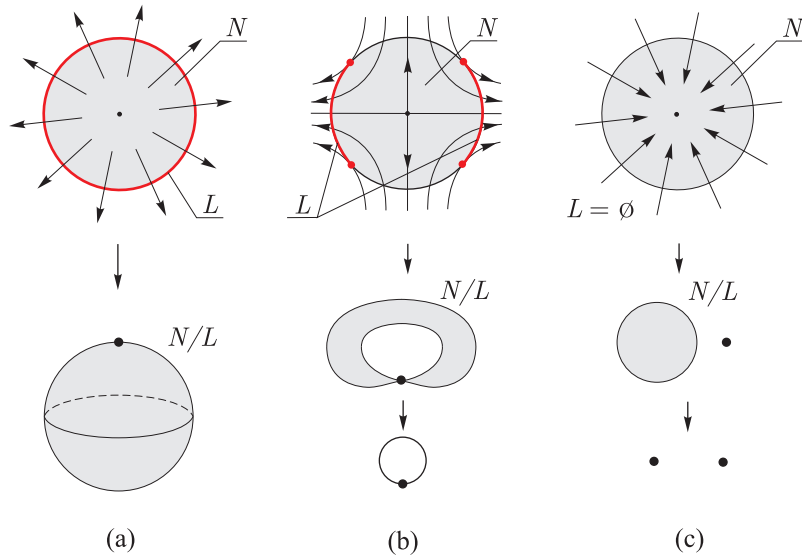


Рис. 9. Индекс Конли для источника, седла и стока.

Полезно посмотреть, что произойдет, если изменить форму изолирующей окрестности. Например так, как показано на рисунке 10. Множество выхода на границе этой окрестности состоит из трех компонент. Одна из них, однако, не замкнута. Если рассмотреть его замыкание, то есть добавить одну точку, то нарушится свойство положительной инвариантности. Этот недостаток легко устранить, добавив кусок траектории, выделенный на рисунке 10. После этих модификаций N и L удовлетворяют определению индексной пары. Если сжать L в точку, то получится пространство, показанное на рисунке 10. Легко видеть, что, несмотря на довольно сильные отличия этой индексной пары от стандартной, индекс Конли не меняется: полученное фактор-пространство N/L по-прежнему гомотопически эквивалентно окружности.

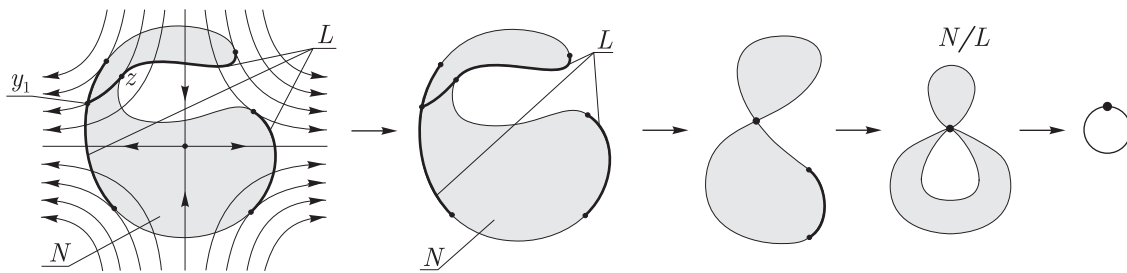


Рис. 10

2. Два седла и соединяющая их сепаратриса. Индексная пара (N, L) этого инвариантного множества изображена на рисунке 11, индекс Конли — это гомотопический тип букета двух окружностей.

Интересно обратить внимание на следующее обстоятельство. Можно продеформировать эту систему так, что сепаратрисы пройдут мимо друг друга, при этом инвариантное множество изменится — теперь оно состоит из двух точек (рис. 12а). Индекс Конли при этом останется тем же самым. Это совершенно естественно, поскольку индексная пара никак

не изменилась. Гораздо более интересным является то, что в качестве принципиально иной индексной пары мы можем теперь взять две отдельные окрестности этих точек (рис. 12b). Множеством выхода L будут при этом четыре дуги; тем не менее, индекс Конли никак не изменится.

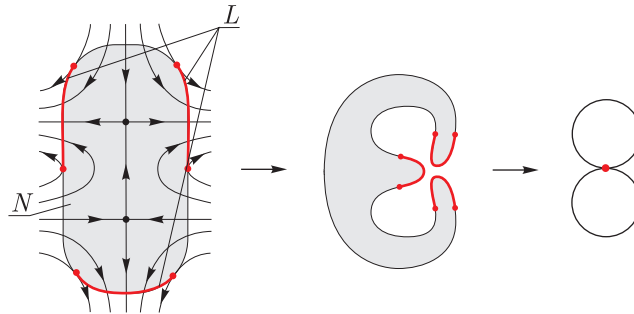


Рис. 11. Индекс Конли пары седел, соединенных сепаратрисой.

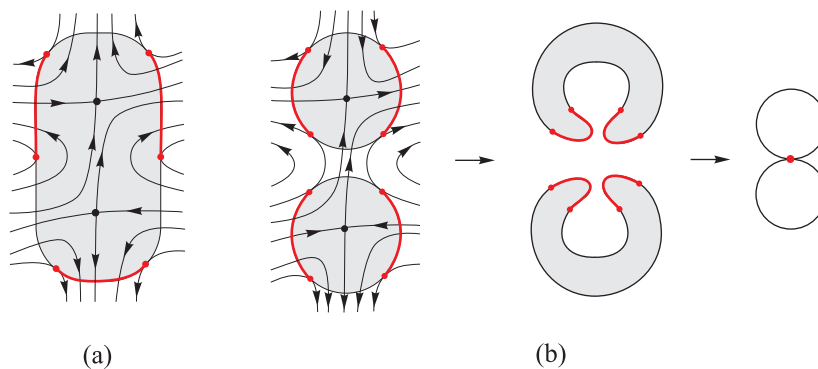


Рис. 12. Индекс Конли пары несвязанных седел.

3. Градиентный поток функции Морса. Рассмотрим важный пример, который позволяет связать между собой индексы Морса и Конли, — градиентный поток функции Морса с невырожденной особой точкой индекса k :

$$f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2,$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}\mathbf{x}, \quad \mathbf{V} = \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-k}).$$

Если $k \neq 0$, то эта особая точка является гиперболической, ее устойчивое и неустойчивое многообразия имеют размерности $n - k$ и k . В индексной паре множество N является шаровой окрестностью особой точки, а множество выхода L , расположенное на границе n -мерного шара N , представляет собой прямое произведение сферы размерности $k - 1$ и диска размерности $n - k$. Пример для $n = 3$, $k = 2$ показан на рисунке 13а. Индексную пару, показанную на рисунке, можно изменить, взяв в качестве N трехмерный цилиндр, а в качестве L — его боковую поверхность (рис. 13b). В общем случае в качестве N можно взять прямое произведение двух дисков $N = B^k \times B^{n-k}$, а в качестве L — боковую поверхность $S^{k-1} \times B^{n-k} = \partial B^k \times B^{n-k}$. С гомотопической точки зрения второй сомножитель B^{n-k}



в этих прямых произведениях является тривиальным и никакой роли не играет, поэтому, стягивая L (то есть фактически граничную сферу S^{k-1} шара B^k) в точку, мы получаем k -мерную сферу.

Таким образом, индексом Конли особой точки градиентного потока функции Морса индекса k является гомотопический тип k -мерной сферы.

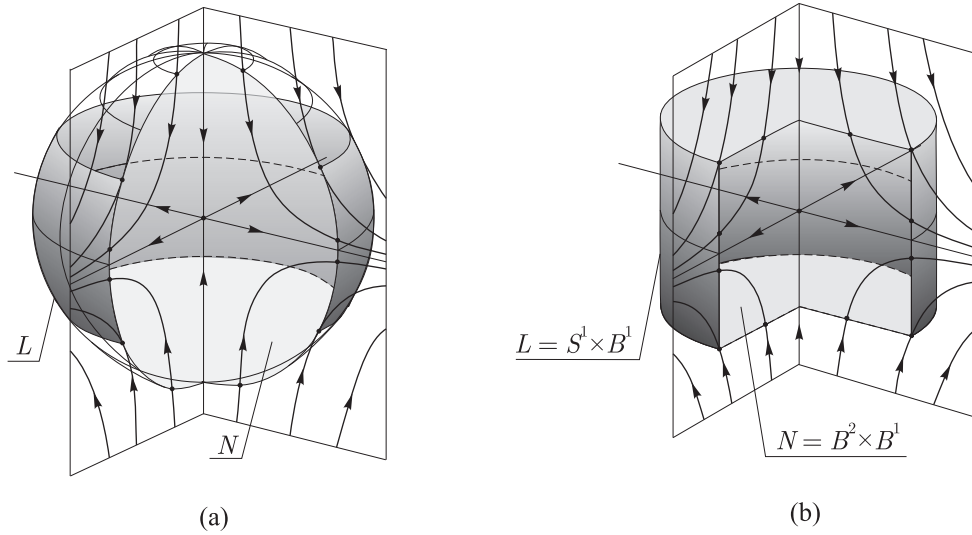


Рис. 13. Сечения осесимметричного потока в окрестности седловой особой точки и возможные изолирующие окрестности. (Более темным цветом на границе изолирующих окрестностей отмечено множество выхода.)

3. Приложение к задаче об относительных равновесиях

3.1. Смена индекса и рождение положений равновесия

Рассмотрим систему, где гамильтониан $H(\mathbf{x}, \alpha)$ — гладкая функция на \mathbb{R}^n , зависящая от параметра $\alpha \in [-1, 1]$, и $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ — ее невырожденная особая точка при $\alpha = -1$. Что происходит с этой точкой при изменении параметра? Хорошо известно, что при малой вариации параметра она остается невырожденной и ее индекс Морса не меняется (сама точка, разумеется, может слегка изменить свое местоположение). Более того, пока она остается невырожденной, ее индекс остается прежним. Это легко следует из соображений непрерывности и теоремы о неявной функции. Возникает следующий естественный вопрос:

может ли индекс Морса точки измениться при переходе через вырождение, и если да, то чем сопровождается это изменение?

Рассмотрим два примера.

Первый пример совсем простой:

$$H(q, p; \alpha) = \alpha(p^2 + q^2).$$

Особая точка $(0, 0)$, при переходе α через нуль ее индекс меняется: $\text{ind}_M=2 \mapsto \text{ind}_M=0$. Однако при $\alpha = 0$ функция H обращается в тождественный нуль и особая точка $(0, 0)$

не является изолированной. Ясно, что такая ситуация не является ситуацией общего положения и потому, как правило, не встречается в приложениях.

Второй пример:

$$H(q, p; \alpha) = p^2 - \alpha q^2 + q^4. \quad (3.1)$$

Здесь при переходе α через нуль индекс особой точки $(0, 0)$ меняется с единицы на нуль. При этом точка $(0, 0)$ является изолированной при каждом значении параметра. Другими словами, мы имеем гладкое однопараметрическое (параметром является α) семейство точек $\mathbf{x}^{(0)}(\alpha) = (0, 0)$, в котором индекс меняется при переходе через вырождение при $\alpha = 0$. Заметим, что изменение индекса здесь сопровождается возникновением новых особых точек: при $\alpha > 0$ имеется еще два семейства особых точек $\mathbf{x}^{(1)}(\alpha) = \left(0, \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)$, $\mathbf{x}^{(2)}(\alpha) = \left(0, -\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)$.

Такая ситуация является неизбежной: если индекс изменился, то в сколь угодно малой окрестности рассматриваемого семейства особых точек должны существовать другие особые точки. А именно, имеет место следующая

Теорема 4. Пусть $H(\mathbf{x}, \alpha)$ — гладкая функция на \mathbb{R}^n , гладко зависящая от параметра $\alpha \in [-1, 1]$, и $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ — изолированная особая точка для $H(\mathbf{x}; \alpha)$ при каждом α . Пусть \mathbf{x}_0 невырожденна при $\alpha \neq 0$, а при переходе α через нуль ее индекс Морса изменяется. Тогда в сколь угодно малой окрестности точки \mathbf{x}_0 при некоторых значениях α обязательно существуют другие особые точки.

ЗАМЕЧАНИЕ. В этой теореме можно, разумеется, считать, что особая точка \mathbf{x}_0 не фиксирована, а гладко зависит от α .

Доказательство очевидным образом следует из свойств индекса Конли. Поскольку при $\alpha = \pm 1$ точка \mathbf{x}_0 невырожденна, то она изолирована, и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ ее ε -окрестность U_ε является изолирующей для обоих градиентных потоков $\text{grad } H(\mathbf{x}, \pm 1)$.

По условию индексы Морса, а следовательно, и индексы Конли, различны при $\alpha = 1$ и $\alpha = -1$. Поскольку индекс Конли инвариантен при непрерывных деформациях потока (см. свойство 3), то такая ситуация возможна лишь в том случае, когда при некотором значении α рассматриваемая окрестность U_ε перестает быть изолирующей. Это означает следующее. Либо на границе этой окрестности есть особая точка градиентного потока (и теорема доказана), либо через некоторую точку окрестности проходит траектория $\gamma(t)$, которая целиком содержится в данной окрестности. Пусть \mathbf{x}_\pm — предельные точки траектории $\gamma(t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Поскольку речь идет о градиентном потоке, то точки \mathbf{x}_+ и \mathbf{x}_- различны и являются особыми для функции H . Таким образом, внутри окрестности находятся как минимум две особые точки, что фактически и утверждает теорема. ■

С точки зрения динамики критические точки гамильтониана, являясь особыми точками гамильтонова векторного поля, могут быть разделены на типы не только в зависимости от индекса, но и в зависимости от характера собственных чисел линеаризованной системы. В случае двух степеней свободы таких типов четыре:

1. центр–центр (две пары чисто мнимых собственных значений $\pm iA, \pm iB$),
2. центр–седло (пара чисто мнимых и пара вещественных собственных значений $\pm iA, \pm B$),



3. седло–седло (две пары вещественных собственных значений $\pm A, \pm B$),
4. фокус–фокус (четверка комплексных собственных значений $\pm A \pm iB$).

Связь между этими типами и индексом Морса такова:

- точка центр–центр может быть любого четного индекса, то есть 0, 2 или 4;
- точка центр–седло может иметь индекс 1 или 3;
- точки седло–седло и фокус–фокус всегда имеют индекс 2.

Как мы видели выше, при деформации системы изменение индекса Морса обязательно сопровождается рождением новых или исчезновением старых положений равновесия. Происходит ли аналогичное событие при изменении типа особой точки? Учитывая связь между индексом и типом, этот вопрос можно конкретизировать следующим образом:

может ли точка индекса 2 при деформации изменять свой тип, например, переходя из центр–центра в фокус–фокус или в седло–седло, и если да, то сопровождается ли это рождением или уничтожением особых точек?

Для ответа на первую половину вопроса удобнее изобразить области, отвечающие различным типам особых точек на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(a, b)\}$ коэффициентов характеристического полинома линеаризации гамильтоновой системы:

$$\mathcal{X}(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^2 + b.$$

Эти области разделяются кривой $a^2 - 4b = 0$ и прямой $b = 0$ (см. рис. 14). При изменении параметра α для соответствующего семейства критических точек $\mathbf{x}^{(0)}(\alpha)$ на этой плоскости возникает кривая $\tilde{\sigma}(\alpha) = (a(\alpha), b(\alpha))$. Из рисунка 14 видно, что в типичной ситуации точка с $\text{ind}_M = 2$ может превращаться либо из фокуса–фокуса в седло–седло, либо из фокуса–фокуса в центр–центр (и наоборот). При этом в случае общего положения никаких дополнительных особых точек не возникает и не исчезает; тем не менее, при деформации фокуса–фокуса в центр–центр возникают периодические траектории, иногда эту бифуркацию называют гамильтоновой бифуркацией Хопфа [27]. На бифуркационной диаграмме в плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(\alpha, H)\}$ (см. следующий раздел) мы бифуркации этого типа никак заметить не сможем.

Превращение центра–центра в седло–седло тоже возможно, но эта бифуркация не является бифуркацией общего положения.

3.2. Бифуркационная диаграмма и ее анализ

В задачах механики довольно часто приходится иметь дело с поиском и анализом положений равновесия гамильтоновых систем, зависящих от какого-либо выделенного параметра. Это, в сущности, сводится к анализу критических точек гамильтониана $H(\mathbf{x}, \alpha)$, который представляет собой гладкую (аналитическую) функцию фазовых переменных $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и параметра α .

Один из наиболее часто встречающихся примеров связан с поиском относительных положений равновесия гамильтоновой системы, обладающей циклическим интегралом (см. подробнее следующий раздел). В данном случае задача сводится к поиску критических точек гамильтониана $H(\mathbf{x}, \alpha)$, редуцированного по действию интеграла, где α — значение циклического интеграла. Как правило, почти при всех значениях параметра критические

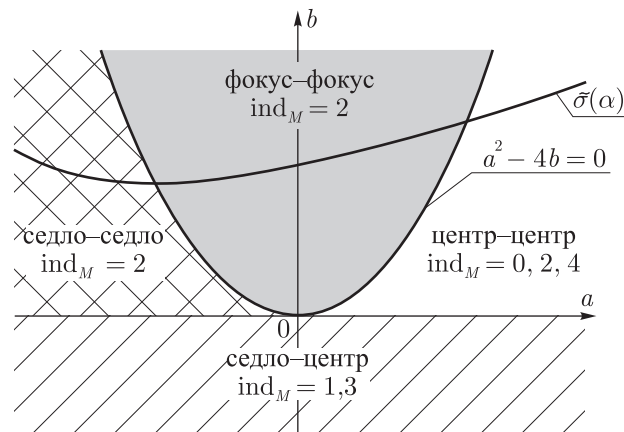


Рис. 14. Области на плоскости коэффициентов характеристического полинома, соответствующие различным типам неподвижных точек, и типичная кривая $\tilde{\sigma}(\alpha)$, отвечающая семейству неподвижных точек $\text{ind}_M = 2$.

точки оказываются невырожденными и образуют однопараметрические семейства $\mathbf{x}^{(i)}(\alpha)$, $i = 1, \dots, m$. При этом на плоскости значений первых интегралов $\mathbb{R}^2 = \{(\alpha, H)\}$ естественным образом могут быть построены бифуркационные кривые σ_i , отвечающие особым точкам, которые задаются графиками вида

$$\sigma_i: h_i(\alpha) = H(\mathbf{x}^{(i)}(\alpha), \alpha).$$

Вычислив индексы Морса гамильтониана для соответствующих семейств особых точек $\mathbf{x}^{(i)}(\alpha)$, мы можем расставить их на соответствующих кривых σ_i и проследить за их сменой при изменении параметра α . Данная схема называется *бифуркационной диаграммой системы*.

Часто проблема заключается в том, что нам известна лишь частичная информация о критических точках H , то есть мы не знаем их полного описания. Чтобы избежать ошибок и «предсказать» верный результат, важно понимать возможные сценарии смены индекса при движении точки вдоль ветви бифуркационной диаграммы. Так, сформулированная выше теорема может помочь, например, в следующей ситуации. Предположим, что нам известно однопараметрическое семейство положений равновесия $\mathbf{x}^{(0)}(\alpha)$ (гладкое по α) и мы знаем, что при переходе через некоторое значение параметра α_0 индекс Морса точки $\mathbf{x}^{(0)}(\alpha)$ изменился. Это означает, что в этот момент обязательно произойдет «рождение» некоторого нового семейства особых точек. Другими словами, частичная информация о некоторых положениях равновесия может в качестве следствия иметь существование других положений равновесия.

Для иллюстрации вновь рассмотрим второй пример с функцией (3.1) и будем предполагать, что нам известно лишь одно семейство особых точек $\mathbf{x}^{(0)}(\alpha) = (0, 0)$. Построим соответствующую бифуркационную кривую $\sigma_0: h_0(\alpha) = 0$, $\alpha \in [-1, 1]$ (рис. 15а); мы видим, что, согласно теореме 4, эта диаграмма неполна. Полная диаграмма должна содержать кривые, соответствующие «родившимся» при $\alpha = 0$ положениям равновесия $\mathbf{x}^{(1)}(\alpha)$, $\mathbf{x}^{(2)}(\alpha)$, которым в данном случае соответствует одна и та же кривая $\sigma_1: h_0(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}$ (см. рис. 15б).

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле более подробное изучение индекса Конли дает информацию и о «взаимодействии» индексов разных семейств особых точек, сходящихся в точке бифуркации,

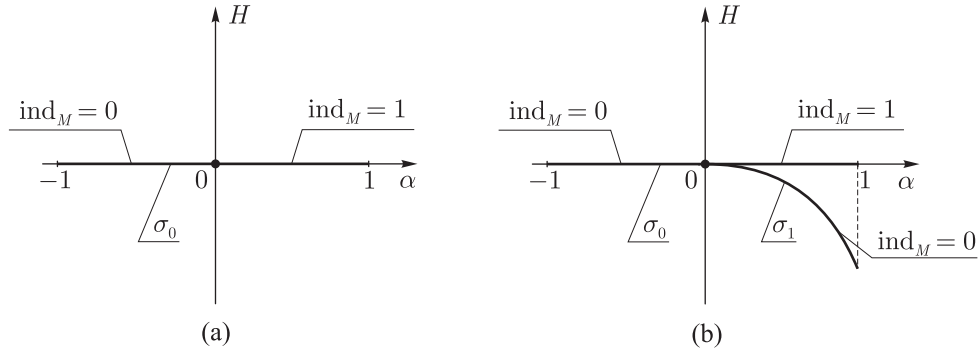


Рис. 15. Бифуркационная диаграмма системы (3.1).

что дает возможность при изучении конкретной системы формулировать правильные гипотезы и тестировать полученные результаты.

Укажем еще одно простое соображение, часто используемое при анализе бифуркационных диаграмм. Пусть имеется два семейства критических точек гамильтониана $H(\mathbf{x}, \alpha)$, которые обозначим как $\mathbf{x}^{(1)}(\alpha)$, $\mathbf{x}^{(2)}(\alpha)$, так что соответствующие им бифуркационные кривые на плоскости (α, H) определяются графиками функций $h_1(\alpha) = H(\mathbf{x}^{(1)}(\alpha), \alpha)$, $h_2(\alpha) = H(\mathbf{x}^{(2)}(\alpha), \alpha)$.

Если при некотором значении параметра $\alpha = \alpha_0$ эти семейства пересекаются в фазовом пространстве, то есть $\mathbf{x}^{(1)}(\alpha_0) = \mathbf{x}^{(2)}(\alpha_0)$, то соответствующие им бифуркационные кривые пересекаются при $\alpha = \alpha_0$ и в точке пересечения касаются друг друга:

$$h_1(\alpha_0) = h_2(\alpha_0), \quad \frac{dh_1}{d\alpha}(\alpha_0) = \frac{dh_2}{d\alpha}(\alpha_0).$$

Для доказательства достаточно вычислить производную вдоль бифуркационных кривых с учетом условия критичности точек семейства:

$$\frac{dh_i}{d\alpha} = \frac{\partial H(\mathbf{x}, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(i)}(\alpha)} + \left(\sum_k \frac{\partial H(\mathbf{x}, \alpha)}{\partial x_k} \frac{dx_k^{(i)}(\alpha)}{d\alpha} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(i)}(\alpha)} = \frac{\partial H(\mathbf{x}^{(i)}(\alpha), \alpha)}{\partial \alpha},$$

следовательно, если $\mathbf{x}^{(1)}(\alpha_0) = \mathbf{x}^{(2)}(\alpha_0)$, то и $\frac{dh_1}{d\alpha}(\alpha_0) = \frac{dh_2}{d\alpha}(\alpha_0)$.

Иллюстрацией служит рисунок 15b, где слиянию двух ветвей σ_0, σ_1 при $\alpha = 0$ соответствует пересечение трех семейств особых точек $\mathbf{x}^{(0)}(\alpha)$, $\mathbf{x}^{(1)}(\alpha)$ и $\mathbf{x}^{(2)}(\alpha)$.

Из данного утверждения, в частности, следует, что если на бифуркационной диаграмме ветви пересекаются трансверсально, то соответствующие семейства критических точек изолированы друг от друга в фазовом пространстве.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$H(q, p, \alpha) = p^2 + q^4 + \frac{4}{3}\alpha q^3 - q^2, \quad \alpha \in [-1, 1], \quad (3.2)$$

которая при всех α имеет три семейства особых точек

$$\mathbf{x}^{(0)}(\alpha) = (0, 0), \quad \mathbf{x}^{(1)}(\alpha) = \left(0, -\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\alpha^2 + 2}}{2} \right), \quad \mathbf{x}^{(2)}(\alpha) = \left(0, -\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 + 2}}{2} \right).$$

Соответствующая бифуркационная диаграмма содержит три различных кривых $\sigma_0: h_0(\alpha) = 0$, $\sigma_1: h_1(\alpha) = -\frac{\alpha^4}{6} - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\alpha(\alpha^2 + 2)^{3/2}}{6}$, $\sigma_2: h_2(\alpha) = -\frac{\alpha^4}{6} - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\alpha(\alpha^2 + 2)^{3/2}}{6}$ (см. рис. 16). Как видно из рисунка, кривые σ_1, σ_2 пересекаются при $\alpha = 0$, хотя соответствующие им семейства критических точек $\mathbf{x}^{(1)}(\alpha)$, $\mathbf{x}^{(2)}(\alpha)$ не имеют общих точек в фазовом пространстве $\mathbb{R}^2 = \{(q, p)\}$.

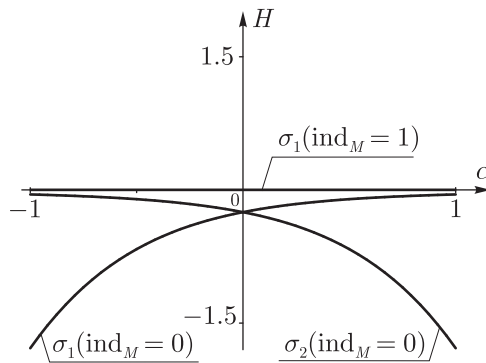


Рис. 16. Бифуркационная диаграмма системы (3.2).

Следующий раздел служит иллюстрацией этих идей.

4. Относительные равновесия в задаче трех вихрей в круге

4.1. Уравнения движения и редукция

В качестве примера мы будем рассматривать систему, описывающую динамику трех одинаковых точечных вихрей в круговой области на плоскости. Выберем начало неподвижной системы координат O в центре круга, положим интенсивности вихрей равными единице, а их положение будем задавать полярными координатами r_k, φ_k (см. рис. 17), тогда уравнения движения представляются в гамильтоновой форме [4]

$$\dot{r}_k = \{r_k, H\} = \frac{1}{r_k} \frac{\partial H}{\partial \varphi_k}, \quad \dot{\varphi}_k = \{\varphi_k, H\} = -\frac{1}{r_k} \frac{\partial H}{\partial r_k}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k < j}^3 \ln \frac{r_k^2 + r_j^2 - 2r_k r_j \cos(\varphi_k - \varphi_j)}{R^4 + r_k^2 r_j^2 - 2R^2 r_k r_j \cos(\varphi_k - \varphi_j)} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \ln(R^2 - r_k^2),$$

где скобка Пуассона определяется соотношениями $\{r_k, \varphi_j\} = \frac{\delta_{kj}}{r_k}$.

Уравнения движения вихрей (4.1) допускают один дополнительный первый интеграл движения — *момент завихренности*, который в данном случае записывается в форме

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 r_k^2. \quad (4.2)$$

Существование этого интеграла является следствием инвариантности уравнений движения относительно поворотов вокруг центра круга.



Для нахождения относительных равновесий выполним редукцию по симметрии; для этого перейдем к новым переменным $\rho_k, \psi_k, k = 1, 2, 3, I = \rho_3$ по формулам

$$\psi_1 = \varphi_1 - \varphi_3, \quad \psi_2 = \varphi_2 - \varphi_3, \quad \psi_3 = \varphi_3, \tag{4.3}$$

$$\rho_1 = r_1^2/2, \quad \rho_2 = r_2^2/2, \quad \rho_3 = I = (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)/2,$$

где $\psi_k \in (-\pi, \pi), k = 1, 2, 3,$ — угловые переменные (см. рис. 17).

Можно показать, что новые координаты являются каноническими:

$$\{\rho_1, \psi_1\} = \{\rho_2, \psi_2\} = \{I, \psi_3\} = 1,$$

остальные скобки равны нулю.

Всюду в дальнейшем без ограничения общности будем полагать

$$R = 1.$$

При этом области изменения переменных (4.3) и интеграла момента (4.2) задаются явно следующим образом:

$$0 < \rho_k < 1/2, \quad -\pi < \psi_k < \pi, \\ k = 1, 2, \quad 0 < I < 3/2.$$

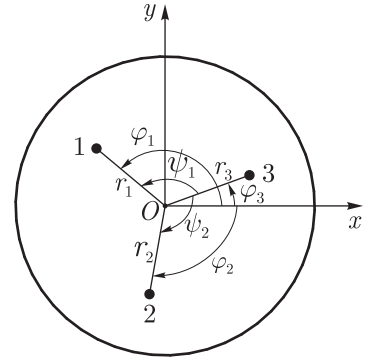


Рис. 17. Определение переменных.

Выразив из (4.3) координаты вихрей

$$\varphi_1 = \psi_1 + \psi_3, \quad \varphi_2 = \psi_2 + \psi_3, \quad \varphi_3 = \psi_3, \tag{4.4}$$

$$r_1 = \sqrt{2\rho_1}, \quad r_2 = \sqrt{2\rho_2}, \quad r_3 = \sqrt{2(I - \rho_1 - \rho_2)}$$

и подставив их в гамильтониан (4.1), получим

$$H = -\frac{3}{4\pi} \ln 2 + \frac{1}{4\pi} [\ln(1 - 2\rho_1) + \ln(1 - 2\rho_2) + \ln(1 - 2(I - \rho_1 - \rho_2))] - \\ - \frac{1}{4\pi} \left[\ln \frac{\rho_1 + \rho_2 - 2\sqrt{\rho_1\rho_2} \cos(\psi_1 - \psi_2)}{1 + 4\rho_1\rho_2 - 4\sqrt{\rho_1\rho_2} \cos(\psi_1 - \psi_2)} + \right. \\ \left. + \ln \frac{I - \rho_1 - 2\sqrt{\rho_2(I - \rho_1 - \rho_2)} \cos \psi_2}{1 + 4\rho_2(I - \rho_1 - \rho_2) - 4\sqrt{\rho_2(I - \rho_1 - \rho_2)} \cos \psi_2} + \right. \\ \left. + \ln \frac{I - \rho_2 - 2\sqrt{\rho_1(I - \rho_1 - \rho_2)} \cos \psi_1}{1 + 4\rho_1(I - \rho_1 - \rho_2) - 4\sqrt{\rho_1(I - \rho_1 - \rho_2)} \cos \psi_1} \right]. \tag{4.5}$$

Таким образом, функция Гамильтона не зависит от ψ_3 , то есть переменная ψ_3 — циклическая. Следовательно, уравнения движения, описывающие эволюцию переменных $\rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2$, отделяются и представляются в канонической гамильтоновой форме

$$\dot{\rho}_k = \frac{\partial H(I, \rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2)}{\partial \psi_k}, \quad \dot{\psi}_k = -\frac{\partial H(I, \rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2)}{\partial \rho_k}, \quad k = 1, 2. \tag{4.6}$$

Итак, мы выполнили редукцию исходной системы к гамильтоновой системе с двумя степенями свободы (4.6), параметрически зависящей от значения первого интеграла I .

Как известно, рассматриваемые относительные равновесия, то есть периодические решения системы (4.1), являются неподвижными точками приведенной системы (4.6) и, следовательно, определяются критическими точками гамильтониана (4.5).



4.2. Известные стационарные конфигурации и бифуркационная диаграмма

1. Известные конфигурации. Хорошо известны две стационарные конфигурации трех вихрей в круговой области:

- *равносторонний треугольник (томсоновская конфигурация)* (рис. 18a);
- *симметричная коллинеарная конфигурация* (рис. 18b).

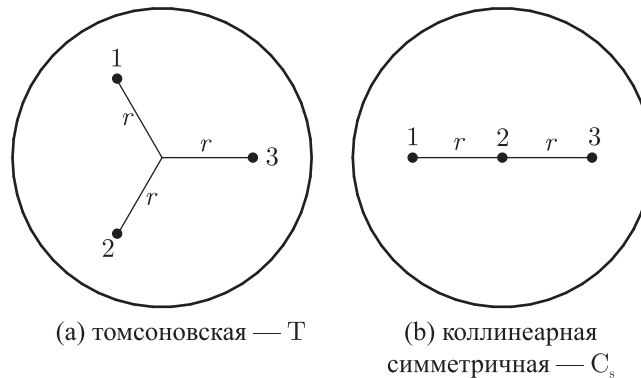


Рис. 18. Известные стационарные конфигурации трех вихрей в круге.

ЗАМЕЧАНИЕ. Подобные конфигурации существуют и в общей задаче N одинаковых вихрей (равносторонний полигон и симметричная относительно центра коллинеарная конфигурация). Результаты по их устойчивости содержатся в работах [8, 9, 26]. В работе [9] отмечено, что в случае трех вихрей имеется изолированное значение параметра, при котором томсоновская конфигурация теряет устойчивость.

Возникает естественный вопрос:

исчерпывают ли данные конфигурации все возможные относительные равновесия в данной системе?

В соответствии с подходом, изложенным в разделе 3, прежде всего на плоскости значений первых интегралов I, H необходимо построить бифуркационную диаграмму системы, на которой рассматриваемые семейства критических точек соответствуют бифуркационным кривым.

Кроме того, расставим на бифуркационных кривых индекс Морса редуцированного гамильтониана H (см. рис. 19). После такой модификации бифуркационная диаграмма позволит ответить на вопросы, касающиеся существования, типа и числа относительных равновесий рассматриваемой системы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Бифуркационную диаграмму в некоторых работах называют также диаграммой Смейла [13] или диаграммой энергии–момента [17] в зависимости от области исследований. Некоторые авторы (см., например, [17]) метод анализа устойчивости на основе бифуркационной диаграммы называют также методом энергии–момента.

Бифуркационные кривые известных стационарных конфигураций строятся следующим образом.



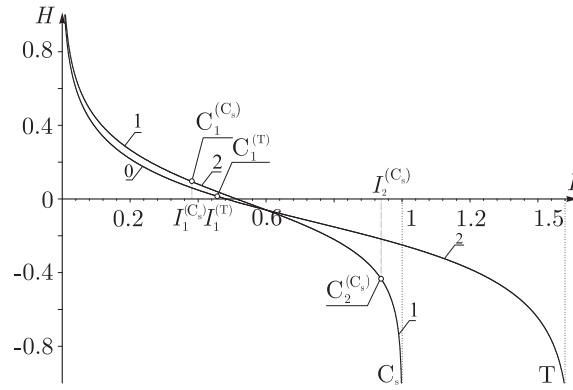


Рис. 19. Бифуркационные кривые для известных стационарных конфигураций трех вихрей в круге (Т — томсоновская конфигурация, C_s — коллинеарная конфигурация).

Томсоновская (равносторонняя) конфигурация, которую будем обозначать буквой Т, соответствует двум семействам критических точек гамильтониана (4.5), определяемых соотношениями

$$\begin{aligned}
 1 \text{ семейство: } \rho_1 = \rho_2 = \frac{I}{3}, \quad \psi_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad \psi_2 = -\frac{2\pi}{3}, \\
 2 \text{ семейство: } \rho_1 = \rho_2 = \frac{I}{3}, \quad \psi_1 = -\frac{2\pi}{3}, \quad \psi_2 = \frac{2\pi}{3},
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

где величина интеграла момента I является параметром семейства, она связана с расстоянием от вихрей до центра круга соотношением $r = \sqrt{\frac{2}{3}}I$. Эти два семейства соответствуют зеркально-симметричным конфигурациям.

Коллинеарная симметричная конфигурация, которую обозначим C_s , определяет три семейства критических точек, различающихся номером вихря в центре круга

$$\begin{aligned}
 1 \text{ семейство: } \rho_1 = \frac{I}{2}, \quad \rho_2 = 0, \quad \psi_1 = \pi, \\
 2 \text{ семейство: } \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = \frac{I}{2}, \quad \psi_2 = \pi, \\
 3 \text{ семейство: } \rho_1 = \rho_2 = \frac{I}{2},
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

где I — параметр семейства, связан с расстоянием от нецентральных вихрей до центра круга соотношением $r = \sqrt{I}$.

Переменные (4.3) непригодны для анализа коллинеарной симметричной конфигурации, так как один из вихрей находится в центре круга, вследствие чего либо один из углов ψ_k , либо оба сразу не могут быть определены (это аналогично особенности в начале координат при определении полярных координат). Тем не менее, каноническая замена переменных позволяет решить эту проблему; так, для первого семейства в (4.8) она имеет вид

$$\sqrt{2\rho_2} \cos \psi_2 = X, \quad \sqrt{2\rho_2} \sin \psi_2 = Y, \quad \{X, Y\} = 1.
 \tag{4.9}$$

Из-за симметрии исходной системы (при $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$) относительно перестановок номеров вихрей результаты для остальных двух семейств получаются идентичными.



Вследствие симметрии относительно перестановки номеров вихрей (что выполняется лишь в случае равных интенсивностей $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$) все пять семейств критических точек для томсоновской и коллинеарной симметричной конфигураций определяют лишь две бифуркационные кривые на плоскости интегралов I, H , которые можно представить в форме

$$\begin{aligned} \text{томсоновская: } H(I) &= \frac{3}{4\pi} \ln \frac{1 - \left(\frac{2I}{3}\right)^3}{2I}, \\ \text{коллинеарная: } H(I) &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(1 - I^2)^2}{4I^3}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

На рисунке 19а представлена бифуркационная диаграмма для томсоновской (Т) и коллинеарной (C_s) конфигураций. Области изменения интеграла момента (4.2) определяются неравенствами

$$\begin{aligned} 0 \leq I \leq \frac{3}{2} & \text{ для томсоновской конфигурации,} \\ 0 \leq I \leq 1 & \text{ для коллинеарной конфигурации.} \end{aligned}$$

Левая граница ($I = 0$) соответствует случаям, когда все вихри находятся в центре круга, правая граница ($I = \frac{3}{2}$ и $I = 1$) соответствует случаям, когда вихри касаются границ круга (кроме центрального вихря для коллинеарной конфигурации). Во всех случаях энергия конфигураций стремится к $+\infty$ на левой границе и к $-\infty$ на правых границах, поэтому при приближении к этим значениям интеграла I на бифуркационной диаграмме (рис. 19) наблюдается асимптотическое поведение бифуркационных кривых $H(I)$, соответствующих неподвижным точкам.

ЗАМЕЧАНИЕ. При малых значениях параметра I бифуркационная диаграмма для томсоновской и коллинеарной конфигураций изоморфна плоскому случаю.

Как было показано выше, каждой точке на бифуркационных кривых соответствует несколько неподвижных точек системы (4.6). Это справедливо также и для других возможных значений (I_0, H_0) , не лежащих на кривых, — им, как правило, соответствует несколько различных компонент несвязного интегрального многообразия $\mathcal{M}_{I_0, H_0} = \{z \mid H(z) = H_0, I(z) = I_0\}$, где z обозначает набор фазовых переменных системы.

2. Индексы томсоновской и коллинеарной симметричной конфигураций.

Расставим индекс Морса на ветви бифуркационной диаграммы, соответствующей томсоновской конфигурации. Для этого обозначим переменные приведенной системы $x = (\rho_1, \rho_2, t_1, t_2)$ и вычислим матрицу квадратичной части гамильтониана $\mathbf{B} = \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right\|$ для любого из семейств (4.8). В точках смены индекса собственные значения матрицы \mathbf{B} меняют знак (обращаются в нуль), они находятся из уравнения $\det \mathbf{B} = 0$, которое в данном случае имеет вид [9]

$$5p^6 + 9p^5 + 5p^3 + 9p^2 - 1 = 0, \quad p = r^2 = \frac{2}{3}I. \quad (4.11)$$

В области изменения интеграла момента $0 \leq I \leq \frac{3}{2}$ лежит лишь один корень этого уравнения $I_1^T \approx 0.456$, соответствующую точку на бифуркационной кривой обозначим $C_1^{(T)}$. Вычисление индекса слева от точки бифуркации дает $\text{ind} = 0$, справа — $\text{ind} = 2$ (рис. 19).



Аналогично находим, что точки бифуркации для коллинеарной симметричной конфигурации определяются уравнением

$$(81p^7 + 27p^6 + 369p^5 + 54p^4 - 312p^3 + 144p - 32)(9p^4 + 27p^3 + 9p^2 - 12p - 4) = 0, \quad p = r^2 = \frac{2}{3}I. \quad (4.12)$$

В области изменения интеграла момента $0 \leq I \leq 1$ имеется две точки бифуркации $I_1^{C_s} \approx 0.379$ и $I_2^{C_s} \approx 0.938$ (соответствующие точки на бифуркационной кривой обозначим $C_1^{(C_s)}$, $C_2^{(C_s)}$). Вычисление индекса квадратичной части H дает следующие результаты:

$$\begin{aligned} \text{ind}_M &= 1, \quad I < I_1^{C_s}, \\ \text{ind}_M &= 2, \quad I_1^{C_s} < I < I_2^{C_s}, \\ \text{ind}_M &= 1, \quad I > I_2^{C_s}. \end{aligned}$$

4.3. Новые стационарные конфигурации и их устойчивость

Из рисунка 19, изображающего бифуркационные кривые T и C_s для томсоновской и коллинеарной конфигураций, видно, что

- 1) кривые T и C_s пересекаются трансверсально,
- 2) на бифуркационных кривых T и C_s имеются изолированные точки, в которых происходит смена индекса критических точек гамильтониана, отвечающих данным кривым.

Опираясь на результаты предыдущего раздела, можно сделать следующие выводы:

во-первых, в фазовом пространстве критические точки, соответствующие различным семействам T и C_s , изолированы друг от друга при всех значениях параметра I (так как для неизолированных семейств бифуркационные кривые в точке слияния или пересечения касаются друг друга);

во-вторых, согласно теореме 4 об изолированном семействе, в точках смены индекса должны рождаться новые критические точки, соответствующие ранее неизвестным конфигурациям.

Покажем, что в данном случае имеет место второй вариант, то есть при смене индекса рождаются новые стационарные конфигурации.

Ясно, что искомые новые конфигурации при изменении параметров должны стремиться к томсоновской или коллинеарной симметричной конфигурациям так, чтобы соответствующие им бифуркационные кривые на плоскости I, H сливались с кривыми T, C_s в точках смены индекса. Кроме того, естественно ожидать, что для новых конфигураций симметрия уменьшится, но не пропадет полностью (см., например, [15, 16]).

Возможные конфигурации, которые удовлетворяют этим требованиям, — это *равнобедренная* и *коллинеарная несимметричная* конфигурации (рис. 20а, б).

3. Равнобедренная конфигурация В окрестности каждой из двух томсоновских конфигураций (которые отличаются четностью перестановки номеров вихрей) могут появиться три равнобедренные конфигурации, различающиеся номером вихря при вершине (см. рис. 21).

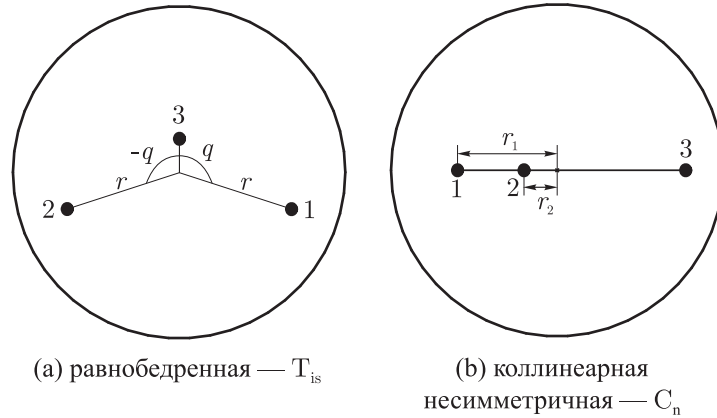


Рис. 20. Новые стационарные конфигурации трех вихрей в круге.

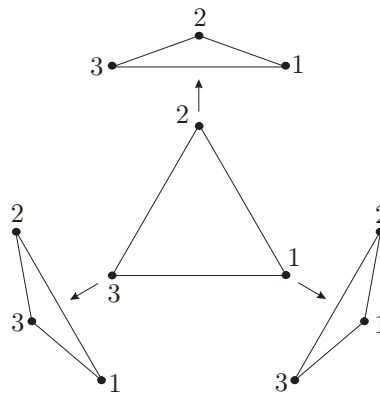


Рис. 21. Появление равнобедренных конфигураций из томсоновских.

Вследствие симметрии исходной системы относительно перестановок номеров вихрей, достаточно рассмотреть одну из этих шести конфигураций. Таким образом, искомое семейство критических точек приведенного гамильтониана (4.5) будем искать в виде

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{r^2}{2}, \quad \psi_1 = -\psi_2 = q. \tag{4.13}$$

Обозначим подмногообразие, определенное этими соотношениями, как

$$\mathcal{M}_{is} = \{(\rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2) \mid \rho_2 = \frac{r^2}{2}, \psi_1 = -\psi_2 = q\}. \tag{4.14}$$

Подставляя соотношения (4.14) в условия экстремальности гамильтониана (4.5), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H}{\partial \rho_1} \right|_{\mathcal{M}_{is}} &= \left. \frac{\partial H}{\partial \rho_2} \right|_{\mathcal{M}_{is}} = R_{is}(r, q, I) = 0, \\ \left. \frac{\partial H}{\partial \psi_1} \right|_{\mathcal{M}_{is}} &= \left. \frac{\partial H}{\partial \psi_2} \right|_{\mathcal{M}_{is}} = \Psi_{is}(r, q, I) = 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Функции $R_{is}(r, q, I)$, $\Psi_{is}(r, q, I)$ довольно громоздкие, поэтому мы их здесь не приводим (они могут быть легко получены из гамильтониана (4.5) при помощи какого-либо пакета



аналитических вычислений, например, Maple или Mathematica и т. п.). Решая эту систему относительно переменных r, q , получим однопараметрическое семейство (или несколько семейств) критических точек, параметризуемое величиной интеграла I , которое соответствует равнобедренным конфигурациям.

Точное аналитическое решение системы (4.15) получить невозможно, поэтому будем решать ее численно, используя метод продолжения по параметру. На примере равнобедренной конфигурации опишем этот процесс более подробно.

Сначала ограничим гамильтониан (4.5) на подмногообразии M_{is} :

$$H_{is} = -\frac{3}{4\pi} \ln 2 + \frac{1}{4\pi} [2 \ln(1 - r^2) + \ln(1 - 2(I - r^2))] - \frac{1}{4\pi} \left[\ln \frac{r^2(1 - \cos 2q)}{1 + r^4 - 2r^2 \cos 2q} + 2 \ln \frac{2I - r^2 - 2r\sqrt{2(I - r^2)} \cos q}{2(1 + 2r^2(I - r^2) - 2r\sqrt{2(I - r^2)} \cos q)} \right]. \quad (4.16)$$

Согласно (4.15), критические точки исходного гамильтониана на многообразии M_{is} совпадают с критическими точками H_{is} .

Затем выберем значение интеграла момента I_0 , близкое к бифуркационному значению I_1^T , и в окрестности томсоновской конфигурации $z_T(I_0) = (r^2 = \frac{2}{3}I_0, q = \frac{2\pi}{3})$ численно найдем критическую точку $z_*(I_0)$ гамильтониана H_{is} , отличную от $z_T(I_0)$. Изменим значение интеграла момента на малую величину $I_1 = I_0 + \delta$, и в окрестности найденной точки $z_*(I_0)$ найдем новую критическую точку $z_*(I_1)$. Продолжая эту процедуру, построим семейство критических точек, отвечающих равнобедренной конфигурации $z_{is}(I)$. Для найденных семейств построим бифуркационные кривые на плоскости первых интегралов и укажем индекс полного гамильтониана (4.5) для каждой из ветвей.

Используя описанный метод, мы нашли два семейства (без учета перестановки вихрей) равнобедренных конфигураций, которые обозначим $T_{is}^{(1)}, T_{is}^{(2)}$ (рис. 22, 23).

ЗАМЕЧАНИЕ. С учетом перестановок номеров вихрей число семейств равнобедренных конфигураций необходимо умножить на 6.

Найденные равнобедренные конфигурации обладают следующими свойствами (см. рис. 22, 23):

- семейство $T_{is}^{(1)}$ продолжается по обе стороны от точки бифуркации $C_1^{(T)}$, причем при $I > I_1^{(T)}$ оно продолжается вплоть до точки $C_2^{(Cs)}$, где сливается с семейством коллинеарных симметричных конфигураций, а при $I < I_1^{(T)}$ оно продолжается до точки возврата $I = I^{(T_{is})} \approx 0.442$, в которой рождается второе семейство равнобедренных конфигураций $T_{is}^{(2)}$,
- семейство $T_{is}^{(2)}$ при $I > I^{(T_{is})}$ продолжается до второй точки возврата при $I \rightarrow \frac{1}{2}$, в которой сливается с семейством коллинеарных несимметричных конфигураций (которое будет описано ниже),
- индекс квадратичной части гамильтониана для семейства $T_{is}^{(1)}$ всюду при $I \neq I_2^{(T)}$ равен 1,
- индекс квадратичной части гамильтониана для $T_{is}^{(2)}$ всюду равен 0.

Таким образом, используя численный анализ критических точек системы (4.6), то есть относительных равновесий исходной системы (4.1), мы доказали следующую теорему.



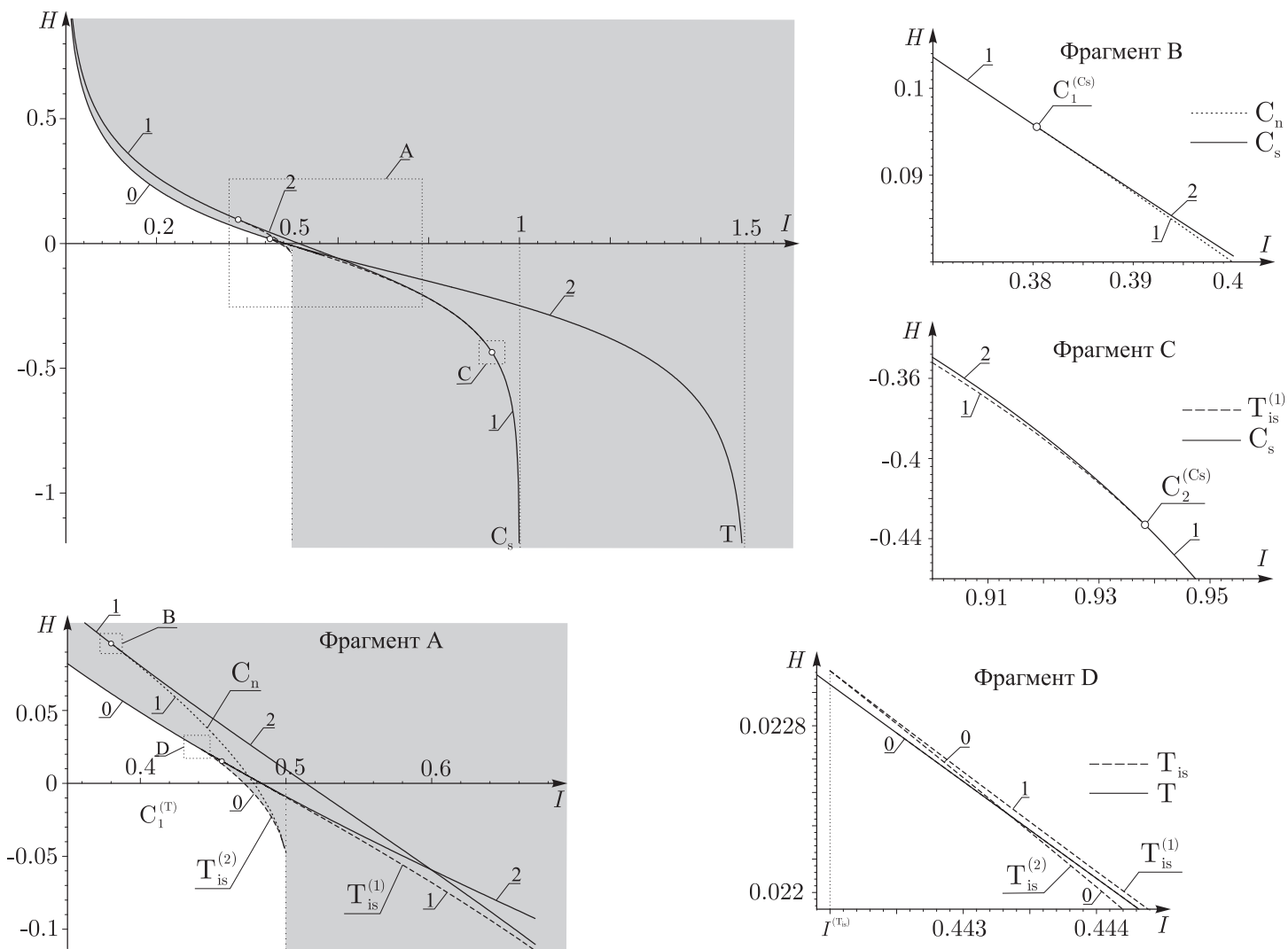


Рис. 22. Бифуркационная диаграмма для стационарных конфигураций трех вихрей в круге (T — томсоновская, C_s — коллинеарная симметричная, T_{is} — равнобедренная, C_n — коллинеарная несимметричная). Серым цветом отмечена область возможных значений интегралов I, H .

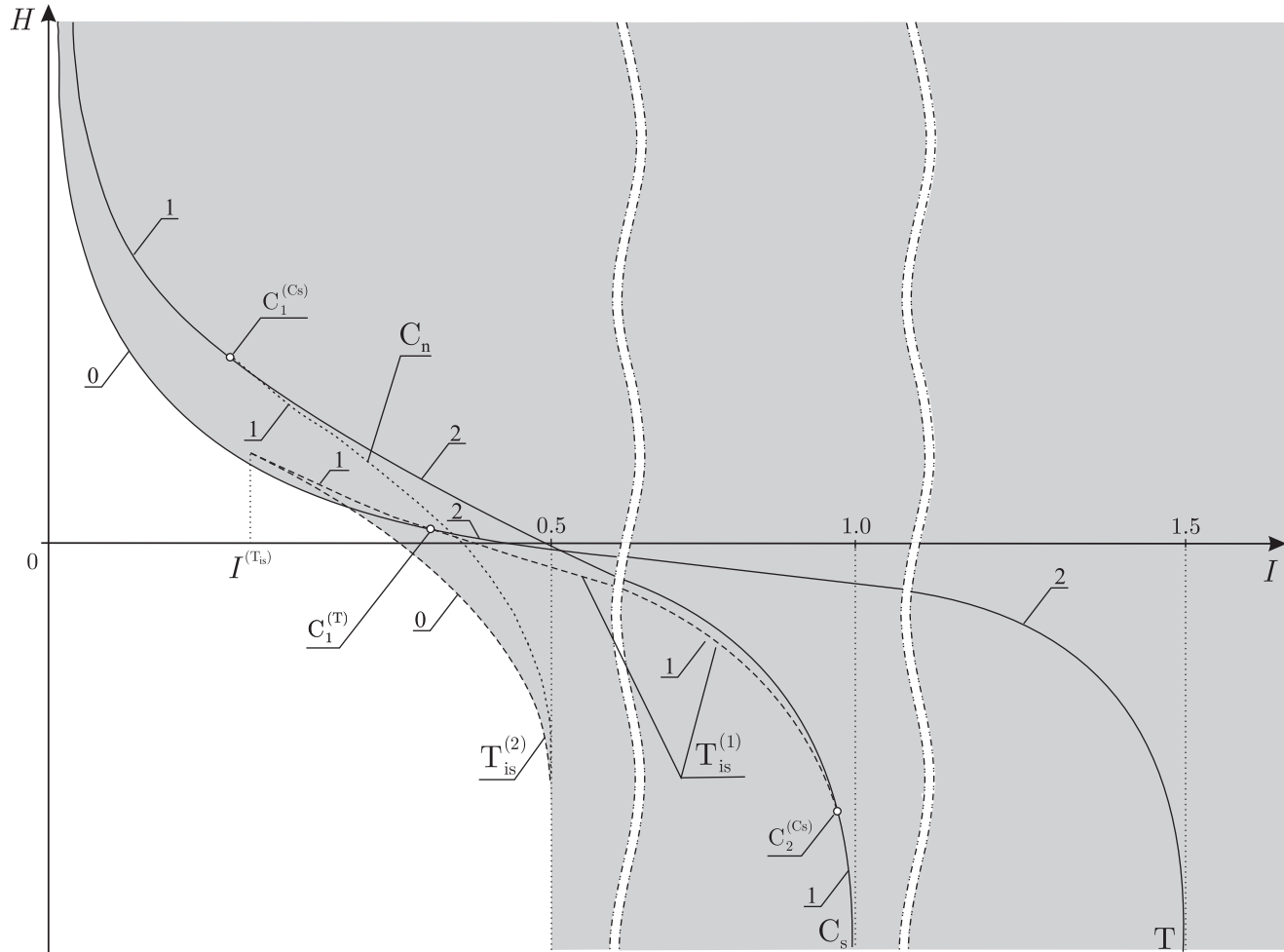


Рис. 23. Схематическое изображение бифуркационной диаграммы (без соблюдения масштаба). Серым цветом отмечена область возможных значений интегралов I, H .

Теорема 5. В задаче трех одинаковых вихрей в круге существует два (с точностью до перестановки номеров вихрей) семейства равнобедренных стационарных конфигураций $\Gamma_{\text{is}}^{(1)}$, $\Gamma_{\text{is}}^{(2)}$.

4. Коллинеарная несимметричная конфигурация. В окрестности каждой из трех коллинеарных симметричных конфигураций, которые отличаются номером вихря в центре, появляются две коллинеарные несимметричные конфигурации, различающиеся четностью перестановки номеров вихрей и номером вихря, который находится по другую сторону от двух других вихрей относительно центра (см. рис. 24).

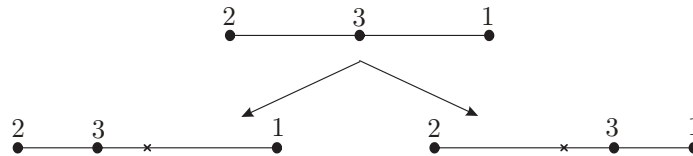


Рис. 24. Появление коллинеарных несимметричных конфигураций.

Вследствие симметрии исходной системы относительно перестановок номеров вихрей, достаточно рассмотреть одну из этих шести конфигураций. Таким образом, искомое семейство критических точек приведенного гамильтониана (4.5) будем искать в виде

$$\rho_1 = \frac{r_1^2}{2}, \quad \rho_2 = \frac{r_2^2}{2}, \quad \psi_1 = \psi_2 = \pi. \quad (4.17)$$

Обозначим подмногообразие, определенное этими соотношениями, как

$$\mathcal{M}_n = \{(\rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2) \mid \rho_1 = \frac{r_1^2}{2}, \rho_2 = \frac{r_2^2}{2}, \psi_1 = \psi_2 = \pi\}. \quad (4.18)$$

Подставляя соотношения (4.18) в условия экстремальности гамильтониана (4.5), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H}{\partial \rho_1} \right|_{\mathcal{M}_n} &= \left. \frac{\partial H}{\partial \rho_2} \right|_{\mathcal{M}_n} = R_n(r_1, r_2, I) = 0, \\ \left. \frac{\partial H}{\partial \psi_1} \right|_{\mathcal{M}_n} &= \left. \frac{\partial H}{\partial \psi_2} \right|_{\mathcal{M}_n} = \Psi_n(r_1, r_2, I) = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Функции $R_n(r_1, r_2, I)$, $\Psi_n(r_1, r_2, I)$ мы также не приводим здесь в силу их громоздкости. Решая эту систему методом продолжения по параметру относительно переменных r_1 , r_2 , получим одно семейство критических точек (будем обозначать его \mathcal{C}_n), параметризуемое величиной интеграла I и соответствующее коллинеарным несимметричным конфигурациям. Для найденного семейства построим бифуркационную кривую на плоскости первых интегралов и укажем индекс квадратичной части гамильтониана (4.5) (рис. 22).

ЗАМЕЧАНИЕ. С учетом перестановок число семейств коллинеарных несимметричных конфигураций необходимо также умножить на 6.

Найденные коллинеарные несимметричные конфигурации обладают следующими свойствами (см. рис. 23):

- семейство C_n рождается в точке $I = I_1^{(C_s)}$ и продолжается до точки возврата при $I \rightarrow \frac{1}{2}$, в которой оно сливается с семейством равнобедренных конфигураций $T_{is}^{(2)}$,
- индекс квадратичной части гамильтониана для C_n всюду равен 1.

Таким образом, используя численный анализ критических точек системы (4.6), мы доказали следующую теорему.

Теорема 6. *В задаче трех одинаковых вихрей в круге существует одно (с точностью до перестановки номеров вихрей) семейство C_n коллинеарных несимметричных стационарных конфигураций.*

5. Дискуссия

Интересно сравнить полученные результаты для трех вихрей равной интенсивности в круге с аналогичными результатами А. Албуи в задаче четырех одинаковых вихрей на плоскости [15, 16]. В частности, А. Албуи показал, что имеется стационарная конфигурация, в которой три вихря образуют равнобедренный треугольник, а четвертый расположен на его оси симметрии; в случае вихрей в круге, центр круга играет роль четвертого вихря.

Отметим еще один результат, который также можно попытаться обобщить на рассматриваемую нами задачу, — это теорема о конечности числа относительных равновесий в задаче четырех вихрей на плоскости при произвольных интенсивностях [25]. Для вихрей в круге вопрос о конечности числа стационарных конфигураций при произвольных интенсивностях требует дополнительных исследований, так как в доказательствах работы [25] существенным образом используется однородность уравнений движения.

В заключение укажем также, что было бы интересно применить методы, развитые в данной работе, к поиску и анализу частных решений в неконсервативных моделях вихревой динамики (в частности, к задачам о динамике точечных вихресточников [19] и диссипирующих вихрей [32]).

Авторы благодарны А. А. Килину и С. М. Гусейн-Заде за полезные обсуждения в ходе работы.

Список литературы

- [1] Аносов Д. В., Бронштейн И. У. Гладкие динамические системы: Гл. 3: Топологическая динамика // Динамические системы–1 / Д. В. Аносов, В. И. Арнольд. (Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, т. 1.) М.: ВИНТИ, 1985. С. 204–229.
- [2] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтонизация неголономных систем в окрестности инвариантных многообразий // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 829–854.
- [3] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН, 2010, т. 65, № 2(392), с. 71–132.
- [4] Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 368 с.

- [5] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения: Т. 1. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 333 с.
Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения: Т. 2. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 278 с.
- [6] Каток С. Б. Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела // УМН, 1972, т. 27, № 2, с. 126–132.
- [7] Килин А. А., Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика точечных вихрей внутри и вне круговой области // Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев, М. А. Соколовский. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. С. 414–440.
- [8] Куракин Л. Г. Устойчивость, резонансы и неустойчивость правильных вихревых многоугольников внутри круговой области // Докл. РАН, 2004, т. 399, вып. 1, с. 52–55.
- [9] Куракин Л. Г. Об устойчивости томсоновских вихревых конфигураций внутри круговой области // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 3, с. 295–317.
- [10] Маркеев А. П. Теоретическая механика: Учебн. пособие для вузов. М.: ЧеРо, 1999. 572 с.
- [11] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах // КАМ-теория и проблемы устойчивости / Ю. Мозер. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. С. 141–198.
- [12] Смейл С. Топология и механика // УМН, 1972, т. 27, № 2, с. 77–133.
- [13] Татаринов Я. В. Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестн. Моск. ун-та, 1974, № 6, с. 99–105.
- [14] Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989. 494 с.
- [15] Albouy A. Symétrie des configurations centrales de quatre corps // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1, 1995, vol. 320, pp. 217–220. (См. также: Относительные равновесия: Периодические решения: Сб. ст. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2006, с. 143–148.)
- [16] Albouy A. The symmetric central configurations of four equal masses // Contemp. Math., 1996, vol. 198, pp. 131–135. (См. также: Относительные равновесия: Периодические решения: Сб. ст. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2006, с. 149–161.)
- [17] Arango C. A., Ezra G. S. Classical mechanics of dipolar asymmetric top molecules in collinear static electric and nonresonant linearly polarized laser fields: Energy-momentum diagrams, bifurcations and accessible configuration space. arXiv:physics/0611231v1 [physics.class-ph], 23 Nov 2006.
- [18] Armstrong M. A. Basic Topology. New York–Berlin: Springer, 1983. 251 pp.
- [19] Borisov A. V., Mamaev I. S. On the problem of motion of vortex sources on a plane // Regul. Chaotic Dyn., 2006, vol. 11, no. 4, pp. 455–466.
- [20] Charles Conley memorial volume: Special issue of Ergodic theory and dynamical systems // Ergodic Theory Dynam. Systems, 1988, vol. 8/8*, no. 9, 409 pp.
- [21] Conley Ch. Isolated invariant sets and the Morse index. (CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 38.) Providence, R. I.: AMS, 1978. 89 pp.
- [22] Conley Ch. C., Zehnder R. Morse-type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations // Comm. Pure Appl. Math., 1984, vol. 37, no. 2, pp. 207–253.
- [23] Grauert H. On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds // Ann. of Math. (2), 1958, vol. 68, pp. 460–472.
- [24] Guckenheimer J., Holmes Ph. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. New York: Springer, 1983. 453 pp.
- [25] Hampton M., Moeckel R. Finiteness of stationary configurations of the four-vortex problem // Trans. Amer. Math. Soc., 2009, vol. 361, pp. 1317–1332.
- [26] Havelock T. H. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // Philos. Mag., 1931, vol. 11, no. 70, pp. 617–633.
- [27] van der Meer J.-C. The Hamiltonian Hopf Bifurcation. (Lecture Notes in Math., vol. 1160.) Berlin: Springer, 1985. 115 pp.



- [28] Milnor J. W. *Topology from the differentiable viewpoint: Based on notes by David W. Weaver.* Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1997. 64 pp.
- [29] Mischaikow K. *The Conley index theory: A brief introduction // Conley index theory (Warsaw, 1997).* (Banach Center Publ., vol. 47.) Warsaw: Polish Acad. Sci., 1999. P. 9–19.
- [30] Mischaikow K., Mrozek M. *Conley index theory // Conley index: Handbook of dynamical systems: Vol. 2: Towards applications / B. Fiedler (Ed.).* Amsterdam: Elsevier, 2002. P. 393–460.
- [31] O’Neil K. *Clustered equilibria of point vortices // Regul. Chaotic Dyn., 2011 (принято к печати).*
- [32] Shashikanth B. N. *Dissipative N -point-vortex models in the plane // J. Nonlinear Sci., 2010, vol. 20, no. 1, pp. 81–103.*
- [33] Yatsuyanagi Yu., Kiwamoto Ya., Tomita H., Sano M. M., Yoshida T., Ebisuzaki T. *Dynamics of two-sign point vortices in positive and negative temperature state // Phys. Rev. Lett., 2005, vol. 94, 054502, 4 pp.*

The bifurcation analysis and the Conley index in mechanics

Alexey V. Bolsinov¹, Alexey V. Borisov², Ivan S. Mamaev³

¹School of Mathematics, Loughborough University
United Kingdom, LE11 3TU, Loughborough, Leicestershire
Lomonosov Moscow State University
Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia

^{2,3}Institute of Computer Science

Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

¹A.Bolsinov@lboro.ac.uk, ²borisov@rcd.ru, ³mamaev@rcd.ru

The paper is concerned with the use of bifurcation analysis and the Conley index in Hamiltonian dynamical systems. We give the proof of the theorem on the appearance (disappearance) of fixed points in the case of the Morse index change. We find new relative equilibria in the problem of the motion of point vortices of equal intensity in a circle.

MSC 2010: 76M23, 34A05

Keywords: Morse index, Conley index, bifurcation analysis, bifurcation diagram, Hamiltonian dynamics, fixed point, relative equilibrium

Received September 1, 2011, accepted September 24, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 649–681 (Russian)