РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Тезисы Международной (43-й Всероссийской) молодежной школы-конференции,
29 января — 5 февраля 2012 г.

ЕКАТЕРИНБУРГ
2012

УДК 51

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ: тезисы Международной (43-й Всероссийской) молодежной школы-конференции. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2012.

Настоящее издание включает тезисы Международной (43-й Всероссийской) школы-конференции молодых ученых, прошедшей с 29 января по 5 февраля 2012 года в г. Екатеринбурге.

Представлены работы по следующим вопросам: алгебра и дискретная математика, математическая теория оптимального управления и дифференциальные игры, топология и геометрия, компьютерные науки, приближение функций, математическое программирование и машинное обучение, параллельные вычисления и техническое зрение, прикладной функциональный анализ и уравнения в частных производных, численные методы и математическое моделирование. Сборник представляет интерес для специалистов по указанным областям науки.

Конференция проведена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-06802) и Президиума УрО РАН (грант поддержки молодежных научных школ и конференций).

Ответственный редактор
чл.-корр. РАН А.А. Махнев.

Рецензенты:
чл.-корр. РАН А.А. Махнев, д.ф.-м.н. А.Л. Агеев, д.ф.-м.н. А.Г. Бабенко, к.ф.-м.н. А.Л. Гаврилюк, д.ф.-м.н. А.Р. Данилин, д.ф.-м.н. А.В. Ким, д.ф.-м.н. А.С. Кондратьев, д.ф.-м.н. А.И. Короткий, к.ф.-м.н. В.Б. Костоусов, д.ф.-м.н. Н.Ю. Лукоянов, к.ф.-м.н. Н.В. Маслова, к.ф.-м.н. М.Ф. Прохорова, д.ф.-м.н. С.С. Титов, д.ф.-м.н. М.Ю. Хачай, к.ф.-м.н. Д.В. Хлопин, д.ф.-м.н. В.Т. Шевалдин.

Ответственные за выпуск:
Л.В. Камнева, Н.В. Маслова, М.С. Морина, С.Ф. Правдин.

К АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА УБЕГАЮЩИХ, ДОСТАТОЧНОГО ДЛЯ РАЗРЕШИМОСТИ ГЛОБАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ УКЛОНЕНИЯ В ИГРАХ СО СКАЛЯРНОЙ МАТРИЦЕЙ

Банников А.С.
e-mail: asbannikov@gmail.com

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i(t) = -a(t)x_i(t) + u_i(t), \quad u_i \in Q.$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$\dot{y}_j(t) = -a(t)y_j(t) + v_j(t), \quad v_j \in Q.$$

При $t = t_0$ заданы начальные позиции преследователей $x_1^0, \ldots, x_n^0$ и убегающих $y_1^0, \ldots, y_m^0$, причём

$$z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0 \neq 0 \quad \text{для всех } i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m.$$

Здесь x_i, y_j, u_i, $v_j \in \mathbb{R}^k$, $Q \subset \mathbb{R}^k$ — строго выпуклый компакт с гладкой границей, $a(t)$ — вещественная измеримая функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве оси t.

Цель группы преследователей состоит в том, чтобы «поймать» всех убегающих. Цель группы убегающих — помешать этому, то есть предоставить возможность по крайней мере одному из убегающих уклониться от встречи.

Пусть $z_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$. Обозначим данную игру через $\Gamma(n, m, z_0)$.

Будем предполагать, что убегающие используют кусочно-программные стратегии, а преследователи используют кусочно-программные контрстратегии (см., например, [1])

Пусть $g(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds}\, d\tau$, $\lambda_0 = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{g(t)}$.

Далее предполагаем, что выполнено следующее условие: $\lambda_0 = 0$.

Определение 1. В игре $\Gamma(n, m, z_0)$ происходит поимка, если существует $T > t_0$ и по любым стратегиям $V_1, \quad, V_m$ убегающих $E_1, \quad, E_m$ существуют контрстратегии $U_1, \quad, U_n$ преследователей $P_1, \quad, P_n$ такие, что существуют моменты времени $\tau_1, \quad, \tau_m \in [t_0, T]$ и номера $s_1, \quad, s_m \in \{1, \quad, n\}$, для которых

$$x_{s_i}(\tau_i) = y_i(\tau_i), \quad i = 1, \quad, m,$$

где $x_q(t)$ — реализовавшаяся в данной ситуации траектория преследователя P_q

Определение 2. В игре $\Gamma(n, m, z_0)$ происходит уклонение от встречи, если для любого $T > t_0$ существуют стратегии $V_1, \quad, V_m$ убегающих $E_1, \quad, E_m$ такие, что для любых траекторий $x_1(t), \quad, x_n(t)$ преследователей $P_1, \quad, P_n$ существует номер $s \in \{1, \quad, m\}$, что

$$y_s(t) \neq x_i(t), \quad i = 1, \quad, n, \quad t \in [t_0, T],$$

где $y_s(t)$ — реализовавшаяся в данной ситуации траектория убегающего P_s

Определение 3. Если для любого z_0 в игре $\Gamma(n, m, z_0)$ происходит уклонение от встречи, то будем говорить, что разрешима глобальная задача уклонения

Теорема 1 (Разрешимость глобальной задачи уклонения, [2]). *Для любых натуральных p, m таких, что $m \geqslant p \quad 2^p + 2$, в игре $\Gamma(2^p + 1, m, z_0)$ происходит уклонение от встречи для любого z_0*

Определим функцию $f \quad \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ следующим образом
$f(n) = \min\{m| \text{ в } \Gamma(n, m, z_0)$ происходит уклонение от встречи для любого $z_0\}$

Теорема 2 (Оценка сверху, [2]). *Существует константа $C_1 > 0$ такая, что для всех натуральных $n \geqslant 2$ справедливо следующее неравенство*

$$f(n) \leqslant C_1 n \lg n$$

Теорема 3 (Оценка снизу). *Существует константа $C_2 > 0$ такая, что для всех натуральных $n \geqslant 2$ справедливо следующее неравенство*

$$f(n) \geqslant C_2 n \lg n$$

Следствие 1 (Ср. с [3]). *Для любого натурального ℓ существуют натуральные n и m, существует z_0, такие, что $m - n > \ell$ и в игре $\Gamma(n, m, z_0)$ происходит поимка.*

Следствие 2. *Для любого натурального ℓ существуют натуральные n и m такие, что в игре $\Gamma(n, m, z_0)$ происходит уклонение от встречи для любого z_0, а в игре $\Gamma(n+1, m+\ell, z_0')$ происходит поимка при некотором z_0'.*

Литература

[1] *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992.

[2] *Банников А.С.* Нестационарная задача группового преследования // Известия РАН. Теория и системы управления 2009. № 4. С. 17–22.

[3] *Петров Н.Н., Петров Н.Никандр.* О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1366–1374.