

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ



СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Тезисы Международной (43-й Всероссийской)
молодежной школы-конференции,
29 января — 5 февраля 2012 г.

ЕКАТЕРИНБУРГ
2012

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ: тезисы Международной (43-й Всероссийской) молодежной школы-конференции. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2012.

Настоящее издание включает тезисы Международной (43-й Всероссийской) школы-конференции молодых ученых, прошедшей с 29 января по 5 февраля 2012 года в г. Екатеринбурге.

Представлены работы по следующим вопросам: алгебра и дискретная математика, математическая теория оптимального управления и дифференциальные игры, топология и геометрия, компьютерные науки, приближение функций, математическое программирование и машинное обучение, параллельные вычисления и техническое зрение, прикладной функциональный анализ и уравнения в частных производных, численные методы и математическое моделирование. Сборник представляет интерес для специалистов по указанным областям науки.

Конференция проведена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-06802) и Президиума УрО РАН (грант поддержки молодежных научных школ и конференций).

Ответственный редактор
чл.-корр. РАН А.А. Махнев.

Рецензенты:

чл.-корр. РАН А.А. Махнев, д.ф.-м.н. А.Л. Агеев, д.ф.-м.н. А.Г. Бабенко, к.ф.-м.н. А.Л. Гаврилюк, д.ф.-м.н. А.Р. Данилин, д.ф.-м.н. А.В. Ким, д.ф.-м.н. А.С. Кондратьев, д.ф.-м.н. А.И. Короткий, к.ф.-м.н. В.Б. Костоусов, д.ф.-м.н. Н.Ю. Лукоянов, к.ф.-м.н. Н.В. Маслова, к.ф.-м.н. М.Ф. Прохорова, д.ф.-м.н. С.С. Титов, д.ф.-м.н. М.Ю. Хачай, к.ф.-м.н. Д.В. Хлопин, д.ф.-м.н. В.Т. Шевалдин.

Ответственные за выпуск:

Л.В. Камнева, Н.В. Маслова, М.С. Морина, С.Ф. Правдин.

О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ, ПОРОЖДЕННОЙ ПРОСТЕЙШИМ ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ

Родионова Н.В.

1. Мы переносим метод построения разностных схем [1, 2] с уравнения теплопроводности на волновое уравнение: при фиксированных $\gamma \neq 0$ и $\tau > 0$ изучается начально-граничная задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}; \quad u(0, \xi) = \phi(\xi), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \xi) = \psi(\xi), \quad \xi \in [0, 1];$$

$$u(t, 0) = \rho_0(t), \quad u(t, 1) = \rho_1(t), \quad t \in [0, 2\tau]. \quad (1)$$

Предполагаются выполненными естественные условия сопряжения $\rho_0(0) = \phi(0)$, $\rho_1(0) = \phi(1)$, $\rho'_0(0) = \psi(0)$, $\rho'_1(0) = \psi(1)$.

2. Через Ω обозначим прямоугольник $[0, 2\tau] \times [0, 1]$. Пусть $h \doteq \frac{1}{2N}$, где $N \in \mathbb{N}$, $\theta \doteq \gamma^2 \frac{\tau^2}{h^2}$, $\nu \doteq \frac{h}{\tau^3}$, а точки $(\tau_i, h_j) \in \Omega$ таковы, что $\tau_i \doteq i\tau$, $i = 0, 1, 2$, $h_j \doteq jh$, $j = 0, 1, \dots, 2N$.

Массив u_j^i , $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, \dots, 2N$, называется *допустимым*, если $u_j^0 \doteq \phi(h_j)$, $j = 0, 1, \dots, 2N$; $u_0^i \doteq \rho_0(\tau_i)$, $u_{2N}^i \doteq \rho_1(\tau_i)$, $i = 0, 1, 2$. Сетка $\{(\tau_i, h_j)\}$ и допустимый массив (u_j^i) порождают четыре серии $(\ell = 1, \dots, 4, k = 1, \dots, N)$ треугольников Ω_k^ℓ (каждый треугольник содержит ровно шесть точек сетки, см. [2]) и четыре серии интерполяционных квадратичных полиномов $P_k^\ell : \Omega_k^\ell \rightarrow \mathbb{R}$, порождающих две непрерывные функции $u_L, u_R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (о построении этих квадратичных сплайнов см. формулы (3) и (4) работы [2]).

Зафиксируем $\lambda \in [0, 1]$, и пусть $\mu \doteq 1 - \lambda$, $\omega \doteq \lambda - \mu$. Очевидно, $\mu \in [0, 1]$, $\omega \in [-1, 1]$. Функции u_L и u_R порождают на множестве Ω квадратичный сплайн $u_\lambda \doteq \lambda u_L + \mu u_R$, который мы называем *аппроксимирующим сплайном*. Разнообразие таких сплайнов определяется лишь наборами чисел u_j^i , $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, 2N - 1$. Это означает, что при фиксированном значении λ аппроксимирующие сплайны образуют конечномерное линейное пространство размерности $4N - 2$. Обозначим его $\sigma_\lambda(\Omega) = \sigma_{\lambda, N}(\Omega)$. В качестве приближенного решения исходной задачи (1) принимаем сплайн, реализующий задачу

$$J \doteq J(u) \doteq \|u_{tt} - \gamma^2 u_{\xi\xi}\|_{L_2(\Omega)}^2 \rightarrow \min, \quad u \in \sigma_\lambda(\Omega). \quad (2)$$

3. Далее используются обозначения: $x \doteq -1 - \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{2\mu^2} < -1$,

$$x_j \doteq u_j^2 - u_j^0, \quad y_j \doteq u_j^2 - 2u_j^1 + u_j^0, \quad j = 0, 1, \dots, 2N,$$

$$Z_k \doteq u_{2k-2}^0 - 2u_{2k-1}^0 + u_{2k}^0, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$W_k \doteq -\frac{1}{\lambda^2} \theta Z_k - \frac{1}{\mu^2} \theta Z_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n \doteq N-1$$

(выражения для x и W_k имеют смысл при $\lambda\mu \neq 0$). Анализ функционала (2) и начального условия $u_t(0, \xi) = \psi(\xi)$ порождает итоговые уравнения разностной схемы (в которой $j = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, n$):

$$x_{2j-1} - \lambda y_{2j-2} - y_{2j-1} - \mu y_{2j} = 2\tau \psi(h_{2j-1}), \quad (3)$$

$$\mu y_{2j-2} + \lambda y_{2j} - (1 - \lambda\mu) \theta (x_{2j-2} - 2x_{2j-1} + x_{2j}) - \theta Z_j = 0, \quad (4)$$

$$x_{2k} - 2y_{2k} = 2\tau \psi(h_{2k}), \quad (5)$$

$$\lambda^2 \mu^2 (y_{2k-2} + y_{2k+2}) - (\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda^2 \mu^2) y_{2k} + \mu^2 \theta Z_k + \lambda^2 \theta Z_{k+1} = 0. \quad (6)$$

Для решения системы (6) применим метод прогонки. Мы, однако, приводим явные выражения для решения этой системы, — они необходимы при выводе формулы для минимума функционала (2).

4. Последовательность $\{U_n(x), x \in \mathbb{R}\}$, состоящую из многочленов Чебышева 2-го рода, определяем рекурсивно: $U_{-1}(x) \doteq 0$, $U_0(x) \doteq 1$, $U_{n+1}(x) \doteq 2x U_n(x) - U_{n-1}(x)$. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ определена симметрическая матрица $B(x) \doteq (B_{ij}(x))$, $i, j = 1, \dots, n$,

$$B_{ij}(x) \doteq (-1)^{i+j} \begin{cases} U_{i-1}(x) U_{n-j}(x), & \text{если } i \leq j, \\ U_{j-1}(x) U_{n-i}(x), & \text{если } i \geq j. \end{cases}$$

Теорема 1. Система уравнений (3)–(6) имеет единственное решение. При этом, в зависимости от параметра $\lambda \in [0, 1]$, решения системы (6) допускают для величин y_{2k} явное представление:

$$\lambda = 0 \implies y_{2k} = \theta Z_k, \quad \lambda = 1 \implies y_{2k} = \theta Z_{k+1},$$

$$\lambda \in (0, 1) \implies y_{2k} = \frac{1}{U_n(x)} \left(-B_{k1}(x) y_0 - B_{kn}(x) y_{2N} + \sum_{j=1}^n B_{kj}(x) W_j \right).$$

Это позволяет последовательно вычислить значения x_{2k} , x_{2j-1} и y_{2j-1} из уравнений (5), (4) и (3) соответственно. Полученные значения позволяют, в конечном счете, вычислить все коэффициенты $u_j^1 = u_j^0 + (x_j - y_j)/2$ и $u_j^2 = u_j^0 + x_j$ оптимального сплайна.

Теорема 2. Минимум J^* функционала J достигается на решении системы (3)–(6). В зависимости от параметра $\lambda \in [0, 1]$ для него имеет место одна из следующих формул:

$$\lambda = 0 \implies \frac{1}{2\nu} J^* = (y_{2N} - \theta Z_N)^2, \quad \lambda = 1 \implies \frac{1}{2\nu} J^* = (y_0 - \theta Z_1)^2,$$

$$\begin{aligned} \lambda \in (0, 1) \implies \frac{1-\lambda\mu}{2\nu} J^* = & \lambda^2 (1+\mu^2) y_0^2 + \mu^2 (1+\lambda^2) y_{2N}^2 - \\ & - 2\lambda^2 y_0 \theta Z_1 - 2\mu^2 y_{2N} \theta Z_N + (\lambda^2 + \mu^2) \sum_{k=1}^N \theta^2 Z_k^2 - \\ & - \lambda^2 \mu^2 \frac{1}{U_n(x)} y_0 \left(-B_{11}(x) y_0 - B_{1n}(x) y_{2N} + \sum_{j=1}^n B_{1j}(x) W_j \right) - \\ & - \lambda^2 \mu^2 \frac{1}{U_n(x)} \left(-B_{n1}(x) y_0 - B_{nn}(x) y_{2N} + \sum_{j=1}^n B_{nj}(x) W_j \right) y_{2N} + \\ & + \lambda^2 \mu^2 \frac{1}{U_n(x)} \sum_{k=1}^n \left(-B_{k1}(x) y_0 - B_{kn}(x) y_{2N} + \sum_{j=1}^n B_{kj}(x) W_j \right) W_k \end{aligned}$$

— положительно определенная квадратичная форма от исходных конечных разностей $Z_k = \phi(h_{2k-2}) - 2\phi(h_{2k-1}) + \phi(h_{2k})$, $k = 1, \dots, N$, $y_0 = \rho_0(2\tau) - 2\rho_0(\tau) + \rho_0(0)$, $y_{2N} = \rho_1(2\tau) - 2\rho_1(\tau) + \rho_1(0)$.

5. Формулы позволяют получить априори достаточное количество N узлов сетки для достижения нужной точности $\sqrt{J^*} < \varepsilon$.

Литература

- [1] Родионов В.И., Родионова Н.В. Точные формулы для коэффициентов и невязки оптимального аппроксимирующего сплайна простейшего уравнения теплопроводности // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2010. № 4. С. 154–171.
- [2] Родионов В.И., Родионова Н.В. О точном решении одной задачи оптимизации, порожденной простейшим уравнением теплопроводности // Тезисы докладов 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции. С. 142–144. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011.