УДК 517.5 + 517.9

© **В.И. Родионов**
rodionov@uni.udm.ru

О СИЛЬНЫХ И СЛАБЫХ ОПЕРАТОРАХ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЕРЫВИСТЫХ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: прерывистая функция, обобщенная функция, функционально-дифференциальное уравнение.

Abstract. Concepts of strong and weak operators on the space of regulated functions are defined. Solvability of equations $(\dot{x},\varphi) \equiv (Fx,\varphi)$ with special strong and weak operators F are proved. Explicit forms of continuous and regulated solutions are proved.

1. Обобщенные производные прерывистых функций

Зафиксируем интервал $K \doteq (a,b)$ (ограниченный или неограниченный) и через $\mathrm{G} \doteq \mathrm{G}(a,b)$ обозначим пространство прерывистых функций, то есть функций $x : K \to \mathbb{C}$, обладающих конечными пределами $x(t-0) \doteq \lim\limits_{\tau\to t-0} x(\tau)$ и $x(t+0) \doteq \lim\limits_{\tau\to t+0} x(\tau)$ для всех $t \in K$. Через $\mathrm{G}_L \doteq \mathrm{G}_L(a,b)$ [через $\mathrm{G}_R \doteq \mathrm{G}_R(a,b)$] обозначим подпространство в G, состоящее из непрерывных слева [справа] прерывистых функций. Через $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}} \doteq \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(a,b)$ обозначим пространство функций $x : K \to \mathbb{C}$ таких, что для любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset K$ сужение $x : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ принадлежит $\mathrm{G}_0[\alpha,\beta]$ (где $\mathrm{G}_0[\alpha,\beta]$ — это пространство таких функций $x : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$, что при любом $\varepsilon > 0$ множество $\{t \in [\alpha,\beta] : |x(t)| \geqslant \varepsilon\}$ состоит из конечного числа точек). Согласно [1, с. 19] для любых $x \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$ и $t \in K$ справедливо $x(t-0) = x(t+0) = 0$, поэтому $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}} \subset \mathrm{G}$. Более того, справедливо утверждение о том, что функция $x \in \mathrm{G}$ единственным образом представима в виде суммы

$x = x_{_L} + x_{_0}$ двух функций $x_{_L} \in \mathrm{G}_{_L}$ и $x_{_0} \in \mathrm{G}_{_0}^{\mathrm{loc}}$. Симметричное представление $x = x_{_R} + x_{_0}$, где $x_{_R} \in \mathrm{G}_{_R}$, $x_{_0} \in \mathrm{G}_{_0}^{\mathrm{loc}}$, также имеет место. При этом операторы $\mathrm{P} : x(t) \to x_{_L}(t) \doteq x(t-0)$ и $\mathrm{Q} : x(t) \to x_{_R}(t) \doteq x(t+0)$ являются проекторами в G. Мы называем функции $x, y \in \mathrm{G}$ эквивалентными и пишем $x \sim y$, если $x - y \in \mathrm{G}_{_0}^{\mathrm{loc}}$. Очевидно, $\mathrm{P}x \sim x \sim \mathrm{Q}x$ для любых $x \in \mathrm{G}$.

Через $\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}} \doteq \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}(a,b)$ обозначим пространство функций локально ограниченной вариации, а через $\mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}} \doteq \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(a,b)$ — его подпространство, состоящее из непрерывных функций. Включение $\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}} \subset \mathrm{G}$ хорошо известно.

Пространство $D \doteq D(a,b)$, состоящее из финитных функций пространства $\mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}$, называется пространством основных функций. В нем определено понятие сходящейся последовательности: говорим, что последовательность функций $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in D$, сходится к функции $\varphi \in D$ (и пишем $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$), если у всех функций φ_n и φ есть общий носитель $[\alpha, \beta] \subset K$ и $\operatorname*{Var}\limits_{[\alpha,\beta]} (\varphi_n - \varphi) \underset{n}{\to} 0$.

Через D' обозначим пространство линейных непрерывных функционалов $\ell : D \to \mathbb{C}$ (непрерывность означает, что сходимость последовательности основных функций $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$ влечет сходимость $(\ell, \varphi_n) \underset{n}{\longrightarrow} (\ell, \varphi)$), а его элементы назовем обобщенными функциями (распределениями). Если $x \in \mathrm{G}$, то в D' определены линейные непрерывные функционалы

$$(x, \varphi) \doteq \int\limits_K \varphi(t)\, x(t)\, dt \quad \text{и} \quad (\dot{x}, \varphi) \doteq \int\limits_K \varphi\, dx, \tag{1.1}$$

где второй функционал задан через интеграл Римана–Стилтьеса (он существует [2; 3]) и называется обобщенной производной.

Т е о р е м а 1.1. [4, теорема 8.2]. *Функция $x \in \mathrm{G}$ является решением обобщенного уравнения $(\dot{x}, \varphi) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x \sim \mathrm{const}$. Непрерывная функция $x \in \mathrm{C}$ является решением обобщенного уравнения $(\dot{x}, \varphi) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x = \mathrm{const}$.*

Пусть $X \subseteq \mathrm{G}$ — произвольное множество. Произвольные оператор $\mathrm{V} : X \to \mathrm{G}$ и функция $x \in X$ порождают в D линейный непрерывный функционал $(\dot{V}x, \varphi) \doteq \int\limits_K \varphi \, d\mathrm{V}x$, поэтому можно ставить вопрос о разрешимости уравнения $(\dot{V}x, \varphi) \equiv 0$. В соответствии с теоремой 1.1 равенство $(\dot{V}x, \varphi) = 0$ справедливо при всех $\varphi \in D$ тогда и только тогда, когда $x \in X$ и $Vx \sim \mathrm{const}$. Таким образом, процедура решения уравнения $(\dot{V}x, \varphi) \equiv 0$ сводится к решению совокупности уравнений $\begin{cases} Vx = c + r \\ x \in X \end{cases}$ при всевозможных параметрах $c \in \mathbb{C}$ и $r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$.

Произвольные оператор $F : X \to \mathrm{G}$ и точка $\alpha \in K$ порождают новый оператор $V : X \to \mathrm{G}$, $(Vx)(t) \doteq x(t) - \int\limits_\alpha^t (Fx)(s)\, ds$, для которого уравнение $(\dot{V}x, \varphi) \equiv 0$ (согласно (1.1) оно равносильно уравнению $(\dot{x}, \varphi) \equiv (Fx, \varphi)$ или в символической записи $\dot{x} = Fx$) эквивалентно совокупности уравнений

$$\begin{cases} x(t) - \int\limits_\alpha^t (Fx)(s)\, ds = c + r(t) \\ x \in X \end{cases} \qquad \forall\, c \in \mathbb{C} \ \forall\, r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}. \tag{1.2}$$

Предположим, что при некоторых c и r уравнение (1.2) разрешимо, и пусть $x \in X$ — какое-нибудь его решение. Так как $Fx \in \mathrm{G}$, то Fx — локально суммируемая функция, поэтому первообразная $\int\limits_\alpha^t (Fx)(s)\, ds$ локально абсолютно непрерывна, а так как $r(t-0) = r(t+0) = 0$ при всех $t \in K$, то

$$x(t-0) = c + \int\limits_\alpha^t (Fx)(s)\, ds = x(t+0), \tag{1.3}$$

поэтому если x и имеет разрывы, то все они устранимые. Если непрерывную функцию, которая получается из x устранением разрывов, обозначить через y, то при всех $t \in K$ выполнены равенства $y(t) = x(t-0) = (\mathrm{P}x)(t)$. Здесь уместно отметить, что y — это не просто непрерывная функция, а в соответствии с [5] она является *регулярно дифференцируемой* (как первообразная от прерывистой функции Fx в равенстве (1.3)). Другими словами, $y \in \mathrm{RD} \doteq \mathrm{RD}(a,b)$. Отметим еще, что справедлива цепочка включений $\mathrm{C}^{(1)} \subset \mathrm{RD} \subset \mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}} \subset \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}} \subset \mathrm{C}$, где $\mathrm{C}^{(1)}$, $\mathrm{Lip}^{\mathrm{loc}}$, $\mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$ и C — соответственно пространства непрерывно дифференцируемых, локально липшицевых, локально абсолютно непрерывных и непрерывных функций, определенных на (a,b).

Уместно также отметить, что если искать лишь непрерывные решения (то есть $x \in X \subseteq \mathrm{C}$), то (1.3) превращается в уравнение $x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} (Fx)(s)\,ds = c$. Следовательно, x — решение функционально-дифференциального уравнения $\dot{x} = Fx$ (см. [6; 7]), то есть x удовлетворяет уравнению $x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} (Fx)(s)\,ds = x(\alpha)$ при любом $\alpha \in K$, и, таким образом, имеет место следующая

Т е о р е м а 1.2. *Пусть $X \subseteq \mathrm{C}$, $F : X \to \mathrm{G}$ — произвольный оператор. Непрерывная функция $x \in X$ является решением обобщенного уравнения $(\dot{x}, \varphi) \equiv (Fx, \varphi)$ тогда и только тогда, когда она является решением функционально-дифференциального уравнения $\dot{x} = Fx$.*

Таким образом, *при переходе от функционально-дифференциального к обобщенному уравнению новых непрерывных решений появиться не может, в то же время, как мы увидим ниже, могут появиться новые прерывистые решения, все точки разрыва которых устранимые.*

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть $X \subseteq \mathrm{G}$. Оператор $F : X \to \mathrm{G}$ называется *сильным*, если множество X таково, что $\mathrm{P}z \in X$ для любого $z \in X$, а сам оператор F таков, что эквивалентность $u \sim v$ влечет эквивалентность $Fu \sim Fv$ для любых $u, v \in X$. Если F не является сильным, он называется *слабым.*

Заметим, что в [4] в определение сильного оператора мы не включали первое условие. Очевидно, сильный оператор в настоящей трактовке является сильным и в смысле определения [4].

Л е м м а 1.1. *Пусть* $X \subseteq \mathrm{G}$. *Оператор* $F : X \to \mathrm{G}$ *является сильным тогда и только тогда, когда для любого* $x \in X$ *справедливо* $\mathrm{P}x \in X$ *и* $F\mathrm{P}x \sim Fx$.

Если F — сильный оператор, то эквивалентность $\mathrm{P}x \sim x$ влечет $F\mathrm{P}x \sim Fx$. С другой стороны, если $u, v \in X$ таковы, что $u \sim v$, то $\mathrm{P}u = \mathrm{P}v$ и $Fu \sim F\mathrm{P}u = F\mathrm{P}v \sim Fv$.

Допустим далее, что оператор $F : X \to \mathrm{G}$ в совокупности (1.2) — сильный, тогда уравнение (1.3) принимает вид

$$y(t) - \int_{\alpha}^{t} (Fy)(s)\, ds = c \tag{1.4}$$

(поскольку $y = \mathrm{P}x \in X$ и $Fy = F\mathrm{P}x \sim Fx$, а в соответствии с [1, с. 19] первообразные от эквивалентных функций Fy и Fx совпадают). Следовательно, функция y (она же $\mathrm{P}x$) является решением функционально-дифференциального уравнения $\dot{y} = Fy$ и, таким образом, доказана следующая

Т е о р е м а 1.3. *Пусть* $X \subseteq \mathrm{G}$, *оператор* $F : X \to \mathrm{G}$ *— сильный,* $x \in X$, $y = \mathrm{P}x$ *(поэтому* $y \in X$*). Следующие утверждения эквивалентны:*

1) x *— решение уравнения* $(\dot{x}, \varphi) \equiv (Fx, \varphi)$*;*

2) $y \in \mathrm{C} \cap X$ *и* y *— решение уравнения* $(\dot{y}, \varphi) \equiv (Fy, \varphi)$*;*

3) $y \in \mathrm{C} \cap X$ *и* y *— решение функционально-дифференциального уравнения* $\dot{y} = Fy$*;*

4) $y \in \mathrm{RD} \cap X$ *и* y *— решение уравнения* $(\dot{y}, \varphi) \equiv (Fy, \varphi)$*;*

5) $y \in \mathrm{RD} \cap X$ *и* y *— решение функционально-дифференциального уравнения* $\dot{y} = Fy$.

П р и м е р 1.1. Пусть непрерывная функция $f : \Omega \to \mathbb{C}$ задана на произвольном множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, а

$$X \doteq \{x \in \mathrm{G}(K) : \ (t, x(t)) \in \Omega \ \text{и} \ (t, (\mathrm{P}x)(t)) \in \Omega \quad \forall\, t \in K\},$$

где интервал $K \doteq (a,b)$ таков, что $a \geqslant \inf\limits_{(t,x)\in\Omega} t$, а $b \leqslant \sup\limits_{(t,x)\in\Omega} t$. Оператор $F : X \to \mathrm{G}(K)$ такой, что $(Fx)(t) \doteq f(t,x(t))$, является сильным. Действительно, так как P — проектор $\mathrm{G}(K)$, то импликация $x \in X \Longrightarrow \mathrm{P}x \in X$ очевидна. Для любого $t \in K$

$$\lim_{\tau\to t-0}(\tau, x(\tau)) = \big(t, \lim_{\tau\to t-0} x(\tau)\big) = \big(t, (\mathrm{P}x)(t)\big), \tag{1.5}$$

следовательно, в силу непрерывности функции f справедливо

$$\lim_{\tau\to t-0} f\,(\tau, x(\tau)) = f\,\big(\lim_{\tau\to t-0}(\,\tau, x(\tau))\big) = f\,\big(t, (\mathrm{P}x)(t)\big),$$

поэтому $(Fx)(t) \sim (\mathrm{P}Fx)(t) = (F\mathrm{P}x)(t)$, что и требуется. Таким образом, сильный оператор $(Fx)(t) = f(t,x(t))$ и произвольная точка $\alpha \in K$, во-первых, порождают оператор $V : X \to \mathrm{G}(K)$, $(Vx)(t) \doteq x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} f(s,x(s))\,ds$, и уравнение $(\dot{V}x, \varphi) \equiv 0$, равносильное уравнению $(\dot{x}, \varphi) \equiv (f(\cdot,x), \varphi)$, а во-вторых, в силу теоремы 1.3 функция $x \in X$ является решением этого уравнения тогда и только тогда, когда она эквивалентна некоторому непрерывно дифференцируемому решению $y \in X$ обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{y} = f(t,y)$.

Если Ω замкнуто, а $X \doteq \{x \in \mathrm{G}(K) : (t,x(t)) \in \Omega \ \forall\, t \in K\}$, то в силу (1.5) справедлива импликация $x \in X \Longrightarrow \mathrm{P}x \in X$, поэтому оператор $F : X \to \mathrm{G}(K)$, $(Fx)(t) = f(t,x(t))$, — сильный, и для него справедливо утверждение теоремы 1.3. Если же Ω не является замкнутым, то утверждение теоремы 1.3 для оператора $F : X \to \mathrm{G}(K)$ в зависимости от K и Ω может быть как истинным, так и ложным. В качестве иллюстрации приведем пример, в котором $f(t,x) = x$, а Ω поочередно принимает значения $\mathbb{R}^2$, $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ и $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : x > t\}$.

П р и м е р 1.2. Пусть $K \doteq \mathbb{R}$, $\mathrm{G} \doteq \mathrm{G}(K,\mathbb{R})$ — пространство прерывистых функций со значениями в $\mathbb{R}$, $X \subseteq \mathrm{G}$, а оператор $F : X \to \mathrm{G}$ таков, что $Fx \doteq x$, $(Vx)(t) \doteq x(t) - \int\limits_{0}^{t} x(s)\,ds$.

Если $x \in X$ — какое-нибудь решение уравнения $(\dot{V}x, \varphi) \equiv 0$ или $(\dot{x}, \varphi) \equiv (x, \varphi)$, то в силу (1.2) $x(t) - \int\limits_0^t x(s)\,ds = c + r(t)$ для некоторых $c \in \mathbb{R}$ и $r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$. Следовательно, $y(t) - \int\limits_0^t y(s)\,ds = c$, где функция $y \doteq x - r$ непрерывна (в силу уравнения). Очевидно, y является решением дифференциального уравнения $\dot{y} = y$, поэтому $y(t) = c\,e^t$. Поскольку $x \in X$, то семейство всех решений уравнения $(\dot{x}, \varphi) \equiv (x, \varphi)$ зависит от исходного множества X и представимо в виде пересечения $\big\{\, x(t) \sim c\,e^t : \;\; c \in \mathbb{R} \,\big\} \cap X$.

Если, например, $X = \mathrm{G}$, то, очевидно, F — сильный оператор. Семейство решений имеет вид $\big\{\, x(t) \sim c\,e^t : \;\; c \in \mathbb{R} \,\big\}$, что подтверждает истинность утверждения теоремы 1.3.

Предположим далее, что $X = \{x \in \mathrm{G} : x(t) > 0 \;\; \forall\, t \in K\}$. Допустив $c < 0$, получаем $x(t-0) = c\,e^t < 0$, а, с другой стороны, $x(t-0) = \lim\limits_{\tau \to t-0} x(\tau) \geqslant 0$. Полученное противоречие означает, что $c \geqslant 0$. Допустив $c = 0$, получаем, что $x \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, поэтому, например, $\int\limits_0^1 x(t)\,dt = 0$. С другой стороны, $\int\limits_0^1 x(t)\,dt > 0$ (поскольку $x(t) > 0$ для всех $t \in K$), следовательно, $c > 0$. Таким образом, семейство решений имеет вид $\big\{\, x(t) \sim c\,e^t : \;\; c > 0, \;\; x(t) > 0 \,\big\}$. (Мы видим, что для данного слабого оператора F утверждение теоремы 1.3 остается справедливым. Слабость F имеет место в силу следующего обстоятельства: если, например, $z(t) = t^2$ при $t \neq 0$ и $z(0) = 1$, то $z \in X$, однако $\mathrm{P}z \notin X$, поэтому любой оператор $X \to \mathrm{G}$ является слабым.)

Пусть, наконец, $X = \{x \in \mathrm{G} : x(t) > t \;\; \forall\, t \in K\}$. Предположив $c < e^{-1}$, обнаруживаем (α, β) такой, что $1 \in (\alpha, \beta)$ и $c\,e^t < t$ при всех $t \in (\alpha, \beta)$. Следовательно, для $t \in (\alpha, \beta)$ справедливо $x(t-0) = c\,e^t < t$, а, с другой стороны, $x(t-0) = \lim\limits_{\tau \to t-0} x(\tau) \geqslant t$. Полученное противоречие означает, что $c \geqslant e^{-1}$, причем $\mathrm{P}x \in X$, когда $c > e^{-1}$, и $\mathrm{P}x \notin X$, когда $c = e^{-1}$. Таким образом, семейство решений имеет вид $\big\{\, x(t) \sim c\,e^t : \;\; c \geqslant e^{-1}, \;\; x(t) > t \big\}$, а семейством всех непрерывных решений является множество $\{x(t)=c\,e^t,\ c>e^{-1}\}$. (Мы видим, что для данного слабого оператора F формулировка теоремы 1.3 не верна, — всякая функция $x(t)\sim e^{t-1}$, принадлежащая X, является решением уравнения $(\dot x,\varphi)\equiv(x,\varphi)$, однако $(\mathrm{P}x)(t)=e^{t-1}\notin X$. Другими словами, существуют решения $x\in X$ уравнения $(\dot x,\varphi)\equiv(x,\varphi)$, для которых нет эквивалентной им непрерывной функции $y\in X$, являющейся решением дифференциального уравнения $\dot y=y$. Слабость F имеет место в силу следующего обстоятельства: если, например, $z(t)=t^2+t$ при $t\neq 0$ и $z(0)=1$, то $z\in X$, однако $\mathrm{P}z\notin X$, поэтому любой оператор $X\to\mathrm{G}$ — слабый.)

П р и м е р 1.3. Пусть $K\doteq\mathbb{R}$, $X=\mathrm{G}\doteq\mathrm{G}(K,\mathbb{R})$. Если $(Fx)(t)\doteq x(0)\,f(t)$, где функция $f\in\mathrm{G}$ фиксирована и такова, что $f\notin\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, то оператор F — слабый (например, если $u(t)=0$ при $t\neq0$ и $u(0)=1$, а $v(t)\equiv0$, то $(Fu)(t)=f(t)$, $(Fv)(t)\equiv0$ и $u\sim v$, однако $Fu\not\sim Fv$). Если $(Vx)(t)\doteq x(t)-\int_\alpha^t(Fx)(s)\,ds$, $(\dot Vx,\varphi)\equiv0$ или $(\dot x,\varphi)\equiv(Fx,\varphi)$, то совокупность (1.2) имеет вид

$$x(t)-x(0)\int_\alpha^t f(s)\,ds=\gamma+r(t)\qquad\forall\,\gamma\in\mathbb{R}\ \forall\,r\in\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}.$$

Подставив в равенство $t=0$, исключив из него α и введя обозначение $c\doteq x(0)$, получаем множество всех решений уравнения $(\dot x,\varphi)\equiv(Fx,\varphi)$, — это функции

$$x(t)=c\,\bigl(1+\int_0^t f(s)\,ds\bigr)+r(t)-r(0)\tag{1.6}$$

с произвольными параметрами $c\in\mathbb{R}$ и $r\in\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$. Это семейство существенно отличается от семейства решений функционально-дифференциального уравнения $\dot y(t)=y(0)\,f(t)$, понимаемого как равенство п.в. (то есть уравнения $y(t)-\int_\alpha^t y(0)\,f(s)\,ds=y(\alpha)$), и имеющего вид $y(t)=c\,\bigl(1+\int_0^t f(s)\,ds\bigr)$, $c\in\mathbb{R}$. Если, например,

$c=1$, а r такова, что $r(0)=1$, то функция $x(t)=\int\limits_0^t f(s)\,ds+r(t)$ является решением обобщенного уравнения $(\dot{x},\varphi)\equiv(Fx,\varphi)$, в то же время функция $y(t)\doteq(\mathrm{P}x)(t)=\int\limits_0^t f(s)\,ds$ решением функционально-дифференциального уравнения $\dot{y}(t)=y(0)\,f(t)$ не является. (Мы видим, что и для данного слабого оператора F формулировка теоремы 1.3 не верна: пункт 1 не влечет пункты 2–5. Подобное явление мы наблюдали в предыдущем примере, однако здесь имеется и обратное явление: из пунктов 2–5 не следует пункт 1. Пусть, например, $x(t)=1+\int\limits_0^t f(s)\,ds$ при $t\neq 0$ и $x(0)=0$, тогда $y(t)\doteq(\mathrm{P}x)(t)=1+\int\limits_0^t f(s)\,ds$ — решение функционально-дифференциального уравнения $\dot{y}(t)=y(0)\,f(t)$, в то же время само x решением уравнения $(\dot{x},\varphi)\equiv(Fx,\varphi)$ не является, — правая часть равна 0 при всех φ, а левая — нет.)

Заметим, что при $f\in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$ оператор $(Fx)(t)\doteq x(0)\,f(t)$ является сильным (здесь $\int\limits_\alpha^t f(s)\,ds\equiv 0$, $x(t)=\gamma+r(t)$ и $y(t)\equiv\gamma$).

П р и м е р 1.4. Если в условиях примера 1.3 множество $X\subset \mathrm{G}$ состоит из непрерывных в нуле функций, то при любом $f\in\mathrm{G}$ оператор $F:X\to\mathrm{G}$, $(Fx)(t)\doteq x(0)\,f(t)$, является сильным. Действительно, так как $x(0-0)=x(0)$, то очевидны импликация $x\in X\Longrightarrow \mathrm{P}x\in X$ и равенство $F\mathrm{P}x=Fx$. Таким образом, в силу теоремы 1.3 функция $x\in X$ является решением уравнения $(\dot{x},\varphi)\equiv(Fx,\varphi)$ тогда и только тогда, когда она эквивалентна некоторому $y(t)=c\big(1+\int\limits_0^t f(s)\,ds\big)$, $c\in\mathbb{R}$. Заметим, что данное утверждение согласуется с формулой (1.6), поскольку непрерывность в нуле решения x влечет непрерывность в нуле функции r и поэтому $r(0)=r(0-0)=0$.

В дальнейшем в § 2 изучается достаточно широкий класс обобщенных уравнений, в который попадает уравнение из примера 1.3. В § 3 исследуется класс уравнений, представителем которого является уравнение из примера 1.4 (при некотором $f \in \mathrm{G}$), а соответствующие функционально-дифференциальные уравнения этого класса являются интегро-дифференциальными.

2. Об одном семействе слабых операторов

В предыдущем параграфе мы выяснили, что для сильных операторов $F : X \to \mathrm{G}$ решения уравнения $(\dot{x}, \varphi) \equiv (Fx, \varphi)$, заданного в обобщенных функциях, могут отличаться от непрерывных решений лишь функциями из подпространства $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$. Как показывают примеры, в случае слабого оператора F ситуация принципиально иная, здесь могут появиться ґновые решенияЄ — прерывистые функции x, все точки разрыва которых устранимы и такие, что непрерывная функция $y \doteq \mathrm{P}x$ решением уравнения $(\dot{y}, \varphi) \equiv (Fy, \varphi)$ не является. И если в примере 1.2 данное явление носит достаточно искусственный характер (за счет манипулирования областью определения Ω), то в примере 1.3 оно весьма существенно и требует изучения с более общих позиций.

2.1. Представление прерывистых решений

Конечное разбиение $T \doteq \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ (набор попарно различных точек из K) и квадратные матрицы $f^0, f^1, \dots, f^n \in \mathrm{G}^{m\times m}$ (другими словами, $f_{ij}^k \in \mathrm{G}$ при всех $k = 1, \dots, n$ и $i, j = 1, \dots, m$) порождают слабый конечномерный оператор

$$(Fx)(t) = f^0(t) + \sum_{k=1}^{n} f^k(t)\, x(\tau_k),$$

действующий из $\mathrm{G}^{m\times m}$ в $\mathrm{G}^{m\times m}$, и уравнение $(\dot{x}, \varphi) \equiv (Fx, \varphi)$, для которого будем применять символическую запись

$$\dot{x}(t) = f^0(t) + \sum_{k=1}^{n} f^k(t)\, x(\tau_k). \tag{2.1}$$

Если z — это матрица из прерывистых функций, то под обобщенными функциями (z,φ) и $(\dot z,\varphi)$ мы понимаем матрицы с компонентами (z_{ij},φ) и $(\dot z_{ij},\varphi)$ соответственно. Таким образом, уравнение (2.1) — это система уравнений $\dot x_{ij}(t) = (Fx)_{ij}(t)$, $i,j = 1,\dots,m$, заданных в терминах обобщенных прерывистых функций. Заметим еще, что при $f^0(t)\equiv 0$ уравнение (2.1) будем называть *однородным*, а иначе — *неоднородным*.

З а м е ч а н и е 2.1. Пусть $A \in \mathrm{G}^{m\times m}$ и $X(t,\tau)$ — матрица Коши системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot y(t) = A(t)\,y(t)$ (где y — вектор длины m). Покажем, что замена переменной $x(t) = X(t,\alpha)\,\widetilde x(t)$, возмущения $f^0(t) = X(t,\alpha)\,\widetilde f^{\,0}(t)$ и коэффициентов $f^k(t) = X(t,\alpha)\,\widetilde f^{\,k}(t)\,X(\alpha,\tau_k)$, $k = 1,\dots,n$, приводит обобщенное матричное уравнение

$$\dot x(t) = A(t)\,x(t) + f^0(t) + \sum_{k=1}^{n} f^k(t)\,x(\tau_k) \tag{2.2}$$

к уравнению вида (2.1). (Это наблюдение демонстрирует каноничность уравнения (2.1).) Действительно. Пусть $x \in \mathrm{G}^{m\times m}$ — какое-нибудь решение уравнения (2.2). Согласно теореме 1.1 при любом $\alpha\in K$ существуют матрицы c и $r(\cdot)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$ и $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$ такие, что $x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t}(Fx)(s)\,ds = c + r(t)$, где через $(Fx)(\cdot)$ обозначена правая часть уравнения (2.2). Следовательно, справедливо равенство $x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} A(s)\,x(s)\,ds = h(t)$ или

$$X(t,\alpha)\,\widetilde x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} A(s)\,X(s,\alpha)\,\widetilde x(s)\,ds = h(t),$$

где $h(t) \doteq c + r(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} f^0(s)\,ds + \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{\alpha}^{t} f^k(s)\,x(\tau_k)\,ds$. Поскольку $A(s)\,X(s,\alpha) = \frac{\partial}{\partial s}X(s,\alpha)$, то после интегрирования по частям получаем, что $\widetilde{x}(\alpha)+\int\limits_{\alpha}^{t}X(s,\alpha)\,d\widetilde{x}(s)=h(t)$, поэтому

$$\widetilde{x}(t)=\widetilde{x}(\alpha)+\int\limits_{\alpha}^{t}d\widetilde{x}=\widetilde{x}(\alpha)+\int\limits_{\alpha}^{t}X(\alpha,s)X(s,\alpha)\,d\widetilde{x}(s)=$$

$$=\widetilde{x}(\alpha)+\int\limits_{\alpha}^{t}X(\alpha,s)\,d\Big[\int\limits_{\alpha}^{s}X(\tau,\alpha)\,d\widetilde{x}(\tau)\Big]=\widetilde{x}(\alpha)+\int\limits_{\alpha}^{t}X(\alpha,s)\,dh(s).$$

Доказательство замечания завершает цепочка равенств

$$\int\limits_{K}\varphi\,d\widetilde{x}=\int\limits_{K}\varphi(t)X(\alpha,t)\,dh(t)=\int\limits_{K}\varphi(t)\Big[\widetilde{f}^{\,0}(t)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{f}^{\,k}(t)\widetilde{x}(\tau_k)\Big]dt,$$

то есть $(\dot{\widetilde{x}},\varphi)\equiv(\widetilde{F}\,\widetilde{x},\varphi)$, где $(\widetilde{F}\,\widetilde{x})(t)\doteq\widetilde{f}^{\,0}(t)+\sum\limits_{k=1}^{n}\widetilde{f}^{\,k}(t)\,\widetilde{x}(\tau_k)$ — оператор требуемого вида.

Пусть $T_k\doteq T\setminus\{\tau_k\}$ и $\alpha\in K$. Ниже доказывается, что всякое решение x уравнения (2.1) допускает представление в виде

$$x(t)=\overline{\chi}_{T}(t)\big[\,r(t)+c_0+\int\limits_{\alpha}^{t}f^0(s)\,ds\,\big]+\sum_{k=1}^{n}\overline{\chi}_{T_k}(t)\big[\,E+\int\limits_{\tau_k}^{t}f^k(s)\,ds\,\big]\,c_k,\tag{2.3}$$

где $c_0,c_1,\dots,c_n$ — комплекснозначные матрицы, а матрица $r(\cdot)$ состоит из элементов пространства $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$. Через $\overline{\chi}_S(t)$ обозначена характеристическая функция множества $\overline{S}\doteq K\setminus S$, то есть $\overline{\chi}_S(t)\doteq\chi_{\overline{S}}(t)=1-\chi_S(t)$, где $\chi_S(t)$ — характеристическая функция множества S. Через E обозначена единичная матрица.

У т в е р ж д е н и е 2.1. *Каковы бы ни были матрицы* $c_0\in\mathbb{C}^{m\times m}$ *и* $r\in(\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}})^{m\times m}$, *функция*

$$x^0(t)\doteq\overline{\chi}_{T}(t)\,\big[\,r(t)+c_0+\int\limits_{\alpha}^{t}f^0(s)\,ds\,\big]\tag{2.4}$$

является решением уравнения (2.1).

Действительно, так как $\overline{\chi}_T(\tau_k) = 0$ для всех k, то $x^0(\tau_k) = 0$ и $(Fx^0)(t) = f^0(t)$, а поскольку $x^0(t)$ эквивалентна регулярно дифференцируемой функции $y^0(t) \doteq c_0 + \int\limits_{\alpha}^{t} f^0(s)\,ds$, то для всех $\varphi \in D$ имеем $(\dot{x}^0, \varphi) = (\dot{y}^0, \varphi) = (f^0, \varphi) = (Fx^0, \varphi)$.

З а м е ч а н и е 2.2. Поскольку для $\alpha, \beta \in K$ справедливо $c_0 + \int\limits_{\alpha}^{t} f^0(s)\,ds = \gamma_0 + \int\limits_{\beta}^{t} f^0(s)\,ds$, где $\gamma_0 \doteq c_0 + \int\limits_{\alpha}^{\beta} f^0(s)\,ds$, то семейство функций (2.4) не зависит от выбора точки α.

У т в е р ж д е н и е 2.2. *При каждом* $k = 1, \ldots, n$ *функция* $x^k(t) \doteq \overline{\chi}_{T_k}(t)\left[\,E + \int\limits_{\tau_k}^{t} f^k(s)\,ds\,\right]$ *является решением однородного уравнения* (2.1). *Каковы бы ни были матрицы* $c_1, \ldots, c_n$ *и функция* x^0 *вида* (2.4), *функция* $x(t) \doteq x^0(t) + \sum\limits_{k=1}^{n} x^k(t)\,c_k$ *(она же* (2.3)) *является решением неоднородного уравнения* (2.1).

Действительно, поскольку $\overline{\chi}_{T_k}(\tau_i) = \delta_{ik}$ при всех i и k, то $x^k(\tau_i) = \delta_{ik}E$ и $(Fx^k)(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} f^i(t)\,x^k(\tau_i) = f^k(t)$, а так как $x^k(t)$ эквивалентна регулярно дифференцируемой функции $y^k(t) \doteq E + \int\limits_{\tau_k}^{t} f^k(s)\,ds$, то $(\dot{x}^k, \varphi) = (\dot{y}^k, \varphi) = (f^k, \varphi) = (Fx^k, \varphi)$. Вторая часть утверждения очевидна в силу утверждения 2.1.

З а м е ч а н и е 2.3. Все точки разрыва функции (2.3) являются устранимыми и справедливо равенство

$$(\mathrm{P}x)(t) = \left[\,c_0 + \int\limits_{\alpha}^{t} f^0(s)\,ds\,\right] + \sum_{k=1}^{n}\left[\,E + \int\limits_{\tau_k}^{t} f^k(s)\,ds\,\right] c_k. \tag{2.5}$$

Таким образом, всякая функция x вида (2.3) является решением уравнения $(\dot{x}, \varphi) \equiv (Fx, \varphi)$ вида (2.1), однако $\mathrm{P}x$ может не быть его решением (см. пример 1.3, в котором $n = 1$, $\tau_1 = 0$, $f^0 = 0$,

$f^1 = f$). С другой стороны, если непрерывная функция y представима в виде $y = \mathrm{P}x$ (в виде (2.5)), то, как мы сейчас установим, уравнению $(\dot{x}, \varphi) \equiv (Fx, \varphi)$ удовлетворяют не произвольные прерывистые функции $x \sim y$, а лишь те из них, для которых справедливо представление (2.3) (см. тот же пример 1.3).

Т е о р е м а 2.1. *Уравнение* (2.1), *заданное в терминах обобщенных прерывистых функций, разрешимо. Всякое его решение* x *представимо в виде* (2.3), *то есть существуют постоянные матрицы* $c_0, c_1, \dots, c_n$ *и матрица* $r(\cdot)$ *с компонентами из* $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, *порождающие функцию вида* (2.3), *совпадающую с* x. *Для* x *справедливо равенство* (2.5) *и* $x(\tau_k) = c_k$ *при всех* $\tau_k \in T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разрешимость уравнения уже доказана. Заметим также, что согласно замечанию 2.2 зависимость от $\alpha \in K$ носит формальный характер. Пусть $x \in \mathrm{G}^{m\times m}$ — какое-нибудь решение уравнения (2.1). В соответствии с (1.2) существуют матрицы $\gamma \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и $r(\cdot)$ с компонентами из $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$ такие, что $x(t) - \int\limits_\alpha^t (Fx)(s)\,ds = \gamma + r(t)$, $t \in K$. Введя обозначения $c_k \doteq x(\tau_k)$ и $y(t) \doteq x(t) - r(t)$, замечаем, что $\mathrm{P}x = \mathrm{P}y$ и $y(t) = \gamma + \int\limits_\alpha^t f^0(s)\,ds + \sum\limits_{k=1}^n \int\limits_\alpha^t f^k(s)\,ds\; c_k$ — непрерывная функция (поэтому $\mathrm{P}y = y$). Если $c_0 \doteq \gamma - \sum\limits_{k=1}^n \big[\, E + \int\limits_{\tau_k}^\alpha f^k(s)\,ds \,\big]\, c_k$, то

$$(\mathrm{P}x)(t) = y(t) = \Big[\, c_0 + \int\limits_\alpha^t f^0(s)\,ds \,\Big] + \sum_{k=1}^n \Big[\, E + \int\limits_{\tau_k}^t f^k(s)\,ds \,\Big]\, c_k,$$

что и доказывает (2.5). Обозначив функции, стоящие в квадратных скобках, через $y^0(t)$ и $y^k(t)$ соответственно, получаем

$$x(t) = r(t) + y(t) = r(t) + y^0(t) + \sum_{k=1}^n y^k(t)\, c_k.$$

Утверждается, что $x = z$, где $z(\cdot)$ — функция вида (2.3):

$$z(t) \doteq \overline{\chi}_T(t)\big[\, r(t) + y^0(t) \,\big] + \sum_{k=1}^n \overline{\chi}_{T_k}(t)\, y^k(t)\, c_k.$$

Действительно, для разности $\delta(t) \doteq x(t) - z(t)$ справедливо

$$\delta(t) = \chi_T(t)\big[\, r(t) + y^0(t) \,\big] + \sum_{k=1}^{n} \chi_{T_k}(t)\, y^k(t)\, c_k,$$

причем если $t \notin T$, то $\chi_T(t) = 0$, $\chi_{T_k}(t) = 0$ и $\delta(t) = 0$. Если же $t = \tau_i$ для некоторого i, то $y^i(t) = y^i(\tau_i) = E$ и, следовательно,

$$\delta(\tau_i) = r(\tau_i) + y^0(\tau_i) + \sum_{k:\ k\neq i} y^k(\tau_i)\, c_k =$$

$$= \big(\, r(\tau_i) + y^0(\tau_i) + \sum_{k=1}^{n} y^k(\tau_i)\, c_k \,\big) - c_i = x(\tau_i) - c_i = 0.$$

Таким образом, $\delta(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

Функция (2.5) регулярно дифференцируема, а все разрывы решения x уравнения (2.1), если они имеются, — устранимые, причем $x(\tau_i - 0) = x(\tau_i + 0) = (\mathrm{P}x)(\tau_i)$ и $x(\tau_i) = c_i$. Следовательно, ґимпульсныйЄ скачок функции x в точке $\tau_i \in T$ равен

$$x(\tau_i - 0) - x(\tau_i) = x(\tau_i + 0) - x(\tau_i) = (\mathrm{P}x)(\tau_i) - x(\tau_i) =$$

$$= \big[\, c_0 + \int_{\alpha}^{\tau_i} f^0(s)\, ds \,\big] + \sum_{k:\ k\neq i} \big[\, E + \int_{\tau_k}^{\tau_i} f^k(s)\, ds \,\big]\, c_k, \tag{2.6}$$

а ґимпульсныйЄ скачок в любой другой точке $t \in K \setminus T$, если он имеется, равен скачку функции $r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$.

З а м е ч а н и е 2.4. Замечание 2.1 позволяет сформулировать аналогичные утверждения для уравнения (2.2).

2.2. Представление непрерывных решений

Среди решений (2.3) уравнения (2.1) могут оказаться функции, вообще не имеющие разрывов, — это выполнено тогда и только тогда, когда $\overline{\chi}_T(t)\, r(t) \equiv 0$ и найдутся матрицы $c_0, c_1, \ldots, c_n$ такие, что правые части (2.6) равны нулю при всех $i = 1, \ldots, n$:

$$\big[\, c_0 + \int_{\alpha}^{\tau_i} f^0(s)\, ds \,\big] + \sum_{j:\ j\neq i} \big[\, E + \int_{\tau_j}^{\tau_i} f^j(s)\, ds \,\big]\, c_j = 0. \tag{2.7}$$

Это условие будем называть *условием непрерывной разрешимости* уравнения (2.1). Для однородного уравнения (2.1) система (2.7) относительно $c_0, c_1, \dots, c_n$ также однородна и поэтому разрешима, причем имеет и нетривиальные решения. Рассмотрим случай $m = 1$. Если $x \in \mathrm{C}$ — какое-нибудь решение однородного уравнения (2.1) (поэтому $\mathrm{P}x = x$), то x представимо формулой (2.5), в которой $f^0 = 0$, а коэффициенты $c_0, \dots, c_n$ этого представления удовлетворяют условию непрерывной разрешимости (2.7). Пусть $a_0(t) \doteq 1$, $a_j(t) \doteq 1 + \int\limits_{\tau_j}^{t} f^j(s)\,ds$ для всех $j = 1, \dots, n$, а $a(t) \doteq (\,a_0(t), \dots, a_n(t)\,)$, $c \doteq (c_0, \dots, c_n)$ — векторы пространства $\mathbb{C}^{n+1}$. Тогда формула (2.5) принимает вид $x(t) = (\,a(t), \overline{c}\,)$ (где (u, v) — скалярное произведение в $\mathbb{C}^{n+1}$), а условие (2.7) превращается в систему $(\,a(\tau_i) - e_i, \overline{c}\,) = 0$, $i = 1, \dots, n$, где $e_i \doteq (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ — базисные векторы. Если r — ранг матрицы этой системы и $s \doteq n + 1 - r$, то $s \geqslant 1$ и существуют векторы $h_1, \dots, h_s \in \mathbb{C}^{n+1}$ такие, что $(h_i, h_j) = \delta_{ij}$, а общее решение системы (2.7) представимо в виде $c = \sum\limits_{k=1}^{s} \lambda_k h_k$ через произвольные параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$. В частности, для любых допустимых i и k справедливо равенство $(\,a(\tau_i) - e_i, \overline{h}_k\,) = 0$.

Тем самым $x(t) = \sum\limits_{k=1}^{s} \lambda_k\,(a(t), \overline{h}_k)$ для некоторых констант $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Покажем, что функции $(a(t), \overline{h}_1), \dots, (a(t), \overline{h}_s)$ линейно независимы. Если это не так, то существуют $\mu_1, \dots, \mu_s$ такие, что $\sum\limits_{k=1}^{s} |\,\mu_k\,|^2 \neq 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{s} \mu_k\,(a(t), \overline{h}_k) \equiv 0$. Следовательно,

$$\Big(\,e_i, \sum_{k=1}^{s} \overline{\mu}_k \overline{h}_k\Big) = \sum_{k=1}^{s} \mu_k (e_i, \overline{h}_k) = \sum_{k=1}^{s} \mu_k (a(\tau_i), \overline{h}_k) = 0$$

при всех $i = 1, \dots, n$, поэтому вектор $h \doteq \sum\limits_{k=1}^{s} \overline{\mu}_k \overline{h}_k$ имеет вид

$h=(\varepsilon, 0, \dots, 0)$, причем $\overline{\varepsilon}=(a(t), h)=\sum\limits_{k=1}^{s} \mu_k\,(a(t), \overline{h}_k) \equiv 0$, но

$$|\,\varepsilon\,|^2=(\overline{h}, \overline{h})=\sum_{i,j}(\,\mu_i h_i, \mu_j h_j)=\sum_{i,j}\mu_i\,\overline{\mu}_j\,(h_i, h_j)=s\,\sum_{k}|\,\mu_k\,|^2 \neq 0\,.$$

Итак, при $m=1$ размерность пространства непрерывных решений однородного уравнения (2.1) равна размерности пространства решений однородной системы линейных алгебраических уравнений (2.7), причем общее непрерывное решение имеет вид

$$x(t)=\sum_{k=1}^{s}\lambda_k\,(a(t), \overline{h}_k) \quad \forall\,\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}\,,$$

где $h_1, \dots, h_s$ — ортонормированный базис пространства решений однородной системы (2.7), а функции $(a(t), \overline{h}_1), \dots, (a(t), \overline{h}_s)$ линейно независимы. Неоднородное уравнение (2.1) разрешимо тогда и только тогда, когда разрешима неоднородная система (2.7), при этом общее непрерывное решение уравнения имеет вид

$$x(t)=x^0(t)+\sum_{k=1}^{s}\lambda_k\,(a(t), \overline{h}_k) \quad \forall\,\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}\,,$$

где $x^0(t)$ — частное решение, порожденное каким-нибудь решением неоднородной системы (2.7).

Таким образом, *условие разрешимости системы* (2.7) *является необходимым и достаточным для непрерывной разрешимости уравнения* (2.1) *и проверяется методами линейной алгебры.*

П р и м е р 2.1. При $n=1$ всякое непрерывное решение уравнения (2.1) имеет вид $x(t)=\int\limits_{\tau_1}^{t} f^0(s)\,ds+\big[\,E+\int\limits_{\tau_1}^{t} f^1(s)\,ds\,\big]\,c_1$, где c_1 — произвольная постоянная матрица. Действительно, если x — какое-нибудь непрерывное решение (поэтому $\mathrm{P}x=x$), то в его представлении (2.3) необходимо $\overline{\chi}_{T}(t)\,r(t) \equiv 0$, а условие непрерывной разрешимости означает, что $c_0+\int\limits_{\alpha}^{\tau_1} f^0(s)\,ds=0$, поэтому согласно (2.5) $x(t)=\int\limits_{\tau_1}^{t} f^0(s)\,ds+\big[\,E+\int\limits_{\tau_1}^{t} f^1(s)\,ds\,\big]\,c_1$.

П р и м е р 2.2. Пусть в уравнении (2.1) $n = 2$, $m = 1$, $f^1(t) \equiv 1$, $f^2(t) = t$, точки $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ произвольны. Семейство всех прерывистых решений уравнения допускает параметрическое представление вида (2.3) через произвольные постоянные $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ и функции $r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$. Относительно непрерывных решений отметим следующее. Условие (2.7) непрерывной разрешимости означает, что c_0, c_1, c_2 удовлетворяют системе

$$\begin{cases} c_0 + \int\limits_{\alpha}^{\tau_1} f^0(s)\, ds + \left[\, 1 + \frac{1}{2}(\tau_1^2 - \tau_2^2) \,\right] c_2 = 0\,, \\ c_0 + \int\limits_{\alpha}^{\tau_2} f^0(s)\, ds + \left[\, 1 + \tau_2 - \tau_1 \,\right] c_1 = 0\,. \end{cases} \tag{2.8}$$

При $f^0(t) \equiv 0$ система разрешима. Более того, во всех случаях, кроме одного, а именно когда $\tau_1 = -\frac{1}{2}$ и $\tau_2 = -\frac{3}{2}$, ранг матрицы системы равен 2. В этом исключительном случае ранг равен 1 (поэтому здесь одна базисная и две свободные переменные). Тем самым $c_0 = 0$, константы c_1, c_2 произвольны, а общее непрерывное решение является двупараметрическим и имеет вид $x(t) = c_1\,[\,2t + 3\,] + c_2\,[\,4t^2 - 1\,]$ (что следует из формулы (2.5), имеющей вид $(\mathrm{P}x)(t) = c_0 + c_1\,[\,1 + t - \tau_1\,] + c_2\,[\,1 + \frac{1}{2}\,(t^2 - \tau_2^2)\,]$). При $(\tau_1, \tau_2) \neq (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ семейство решений является однопараметрическим (здесь одна свободная и две базисные переменные), а формула $x(t) = c \begin{vmatrix} 1 + t - \tau_1 & \frac{1}{2}\,(t^2 - \tau_1^2) \\ t - \tau_2 & 1 + \frac{1}{2}\,(t^2 - \tau_2^2) \end{vmatrix}$ описывает все непрерывные решения уравнения $\dot{x}(t) = x(\tau_1) + t\,x(\tau_2)$ (формулу легко проверить непосредственной подстановкой в уравнение).

Если функция f^0 произвольна, то при $(\tau_1, \tau_2) \neq (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ семейство непрерывных решений остается однопараметрическим. Например, если $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = \sqrt{3}$, то при любом $c \in \mathbb{C}$ функция $x(t) = c\,[\,t^2 - 1\,] - \frac{t}{\sqrt{3}} \int\limits_1^{\sqrt{3}} f^0(s)\, ds + \int\limits_1^{t} f^0(s)\, ds$ удовлетворяет уравнению $\dot{x}(t) = x(1) + t\,x(\sqrt{3}) + f^0(t)$. Если же $(\tau_1, \tau_2) = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$, то система (2.8) разрешима в том и только в том случае, когда

$\int\limits_{-3/2}^{-1/2} f^0(s)\,ds = 0$, причем в случае разрешимости общее непрерывное решение имеет вид $x(t) = \int\limits_{-1/2}^{t} f^0(s)\,ds + c_1\,[\,2t+3\,] + c_2\,[\,4t^2-1\,]$.

Заключительная часть параграфа посвящена исследованию вопроса об однопараметрическом представлении семейства непрерывных решений уравнения $(\dot{x},\varphi) \equiv (Fx,\varphi)$ вида (2.1) при $m = 1$. (Исследование случая $m > 1$ и многопараметрического представления непрерывных решений оставляем читателю.) Разбиение $T = \{\tau_1,\ldots,\tau_n\}$ и функции $b_0, b_1, \ldots, b_n : K \to \mathbb{C}$ порождают функциональное уравнение

$$x(t) + \sum_{k=1}^{n} b_k(t)\,x(\tau_k) = b_0(t) \tag{2.9}$$

и определители Δ и $\mathrm{D}(t)$ порядка n и $n+1$ соответственно:

$$\Delta \doteq \begin{vmatrix} 1+b_1(\tau_1) & \ldots & b_n(\tau_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1(\tau_n) & \ldots & 1+b_n(\tau_n) \end{vmatrix}, \tag{2.10}$$

$$\mathrm{D}(t) \doteq \begin{vmatrix} b_0(t) & b_1(t) & \ldots & b_n(t) \\ b_0(\tau_1) & 1+b_1(\tau_1) & \ldots & b_n(\tau_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_0(\tau_n) & b_1(\tau_n) & \ldots & 1+b_n(\tau_n) \end{vmatrix}. \tag{2.11}$$

Л е м м а 2.1. *Определители* Δ *и* $\mathrm{D}(t)$ *удовлетворяют тождеству* $\mathrm{D}(t) + \sum_{k=1}^{n} b_k(t)\,\mathrm{D}(\tau_k) = b_0(t)\,\Delta$. *Уравнение* (2.9) *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда* $\Delta \neq 0$. *Этим решением является функция* $x(t) \doteq \mathrm{D}(t)/\Delta$, $t \in K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При любом k справедливо

$$\mathrm{D}(\tau_k) = \begin{vmatrix} b_0(\tau_k) & b_1(\tau_k) & \dots & b_n(\tau_k) \\ b_0(\tau_1) & 1+b_1(\tau_1) & \dots & b_n(\tau_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_0(\tau_n) & b_1(\tau_n) & \dots & 1+b_n(\tau_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 \\ b_0(\tau_1) & 1+b_1(\tau_1) & \dots & b_k(\tau_1) & \dots & b_n(\tau_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_0(\tau_k) & b_1(\tau_k) & \dots & 1+b_k(\tau_k) & \dots & b_n(\tau_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_0(\tau_n) & b_1(\tau_n) & \dots & b_k(\tau_n) & \dots & 1+b_n(\tau_n) \end{vmatrix}.$$

Вычли k-ю строку из нулевой (заметим, что нумерацию строк и столбцов мы ведем от 0 до n). Таким образом,

$$\mathrm{D}(t) + \sum_{k=1}^{n} b_k(t)\,\mathrm{D}(\tau_k) =$$

$$= \begin{vmatrix} b_0(t) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ b_0(\tau_1) & 1+b_1(\tau_1) & \dots & b_k(\tau_1) & \dots & b_n(\tau_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_0(\tau_k) & b_1(\tau_k) & \dots & 1+b_k(\tau_k) & \dots & b_n(\tau_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_0(\tau_n) & b_1(\tau_n) & \dots & b_k(\tau_n) & \dots & 1+b_n(\tau_n) \end{vmatrix} = b_0(t)\,\Delta.$$

Уравнению (2.9) соответствует система линейных алгебраических уравнений относительно переменных $x_1,\dots,x_n$:

$$\begin{cases} x_i + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j(\tau_i)\,x_j = b_0(\tau_i) \\ i = 1,\dots,n \end{cases} \iff \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \Delta_{ij}\,x_j = b_0(\tau_i) \\ i = 1,\dots,n \end{cases}, \quad (2.12)$$

где Δ_{ij} — элементы определителя (2.10).

При $\Delta \neq 0$ одним из решений уравнения (2.9) является функция $x(t) \doteq \mathrm{D}(t)/\Delta$, поэтому уравнение разрешимо. Если $x^1(\cdot)$ и $x^2(\cdot)$ — два решения уравнения, то векторы $(x^1(\tau_1), \dots, x^1(\tau_n))$ и $(x^2(\tau_1), \dots, x^2(\tau_n))$ удовлетворяют системе (2.12), следовательно, $x^1(\tau_j) = x^2(\tau_j)$ для всех $j = 1, \dots, n$, поэтому $x^1(\cdot) = x^2(\cdot)$.

Пусть x — единственное решение уравнения (2.9). Одним из решений системы (2.12) является вектор $(x(\tau_1), \dots, x(\tau_n))$, поэтому система разрешима. Если $(x_1^1, \dots, x_n^1)$ и $(x_1^2, \dots, x_n^2)$ — два решения системы и $x^k(\cdot) \doteq b_0(\cdot) - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j(\cdot)\, x_j^k$, $k = 1, 2$, то $x^k(\tau_i) = x_i^k$ для всех $i = 1, \dots, n$, поэтому функции $x^1(\cdot)$ и $x^2(\cdot)$ удовлетворяют уравнению (2.9). Таким образом, $x^1(\cdot) = x^2(\cdot)$, $x_j^1 = x^1(\tau_j) = x^2(\tau_j) = x_j^2$ для всех $j = 1, \dots, n$, поэтому $\Delta \neq 0$.

П р и м е р 2.3. Уравнение $x(t) + \sin t \cdot x(0) + \cos t \cdot x(\frac{\pi}{2}) = 0$ имеет бесконечно много решений: $x(t) = c\,(\cos t - \sin t)$, $c \in \mathbb{C}$. Здесь определитель (2.10) равен нулю.

Разбиение $T = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ и функции $f^0, f^1, \dots, f^n \in \mathrm{G}(K)$ порождают скалярное уравнение $(\dot{x}, \varphi) \equiv (Fx, \varphi)$ вида (2.1), а произвольная точка $(\tau_0, x_0) \in K \times \mathbb{C}$ порождает функции $\Delta_{ij}(t) \doteq \delta_{ij} + \int\limits_{\tau_i}^{t} f^j(s)\, ds$ при $(i, j) \neq (0, 0)$, $\Delta_{00}(t) \doteq x_0 + \int\limits_{\tau_0}^{t} f^0(s)\, ds$ и определители $\Delta(t)$ и $\mathrm{D}(t)$ порядка n и $n+1$ соответственно:

$$\Delta(t) \doteq \begin{vmatrix} \Delta_{11}(t) & \dots & \Delta_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1}(t) & \dots & \Delta_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{D}(t) \doteq \mathrm{D}(t; \tau_0, x_0) \doteq \begin{vmatrix} \Delta_{00}(t) & \Delta_{01}(t) & \dots & \Delta_{0n}(t) \\ \Delta_{10}(t) & \Delta_{11}(t) & \dots & \Delta_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n0}(t) & \Delta_{n1}(t) & \dots & \Delta_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Т е о р е м а 2.2. 1. *Определители* $\Delta(t)$ *и* $\mathrm{D}(t)$ *удовлетворяют тождеству* $\mathrm{D}(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} \Big[\int\limits_{\tau_0}^{t} f^k(s)\, ds \Big]\, \mathrm{D}(\tau_k) = \Delta_{00}(t)\, \Delta(\tau_0)$.

2. *Задача, состоящая из скалярного уравнения* $(\dot{x},\varphi)\equiv(Fx,\varphi)$ *вида* (2.1) *и начального условия* $x(\tau_0)=x_0$, *имеет единственное непрерывное решение тогда и только тогда, когда* $\Delta(\tau_0)\neq 0$. *Этим решением является функция* $x(t)\doteq \mathrm{D}(t;\tau_0,x_0)/\Delta(\tau_0)$.

3. *Для скалярного уравнения* $(\dot{x},\varphi)\equiv(Fx,\varphi)$ *вида* (2.1) *следующие утверждения эквивалентны:*

a) *пространство непрерывных решений уравнения одномерно;*

b) $\Delta(t)\not\equiv 0$ *;*

c) $\Delta(\tau_k)\neq 0$ *при некотором* $k=1,\ldots,n$.

При этом общее непрерывное решение уравнения имеет вид $x(t)\doteq \mathrm{D}(t;\tau_0,c)/\Delta(\tau_0)$, $c\in\mathbb{C}$, *где* $\tau_0\in K$ — *произвольная точка такая, что* $\Delta(\tau_0)\neq 0$. *В частности, общее непрерывное решение однородного уравнения имеет вид* $x(t)=c\,\Delta(t)$, $c\in\mathbb{C}$.

4. *При любом* $c\in\mathbb{C}$ *непрерывная функция* $x(t)=c\,\Delta(t)$ *является решением однородного уравнения* (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Для всех $i=1,\ldots,n$ справедливы равенства $\Delta_{i0}(t)-\Delta_{00}(t)=-\Delta_{00}(\tau_i)$, а при всех $j>0$ имеем $\Delta_{ij}(t)-\Delta_{0j}(t)=\delta_{ij}-\Delta_{0j}(\tau_i)$. Следовательно, вычитая в определителе $\mathrm{D}(t)$ нулевую строку из всех остальных, получаем

$$\mathrm{D}(t)=\begin{vmatrix} \Delta_{00}(t) & \Delta_{01}(t) & \ldots & \Delta_{0n}(t)\\ -\Delta_{00}(\tau_1) & 1-\Delta_{01}(\tau_1) & \ldots & -\Delta_{0n}(\tau_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\Delta_{00}(\tau_n) & -\Delta_{01}(\tau_n) & \ldots & 1-\Delta_{0n}(\tau_n) \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \Delta_{00}(t) & -\Delta_{01}(t) & \ldots & -\Delta_{0n}(t)\\ \Delta_{00}(\tau_1) & 1-\Delta_{01}(\tau_1) & \ldots & -\Delta_{0n}(\tau_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \Delta_{00}(\tau_n) & -\Delta_{01}(\tau_n) & \ldots & 1-\Delta_{0n}(\tau_n) \end{vmatrix}.$$

Поочередно умножили на -1 нулевую строку и нулевой столбец. Таким образом, $\mathrm{D}(t)$ имеет вид (2.11), где $b_0(t)=\Delta_{00}(t)$ и $b_j(t)=-\Delta_{0j}(t)$ при $j>0$. Следовательно, в силу леммы 2.1

имеет место равенство $\mathrm{D}(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_{0k}(t)\,\mathrm{D}(\tau_k) = \Delta_{00}(t)\,\Delta$, где

$$\Delta \doteq \begin{vmatrix} 1-\Delta_{01}(\tau_1) & \ldots & -\Delta_{0n}(\tau_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Delta_{01}(\tau_n) & \ldots & 1-\Delta_{0n}(\tau_n) \end{vmatrix} = \Delta(\tau_0)\,, \qquad (2.13)$$

что справедливо в силу равенства $\delta_{ij} - \Delta_{0j}(\tau_i) = \Delta_{ij}(\tau_0)$.

2. Задача, состоящая из скалярного уравнения $(\dot{x},\varphi)\equiv(Fx,\varphi)$ вида (2.1) и начального условия $x(\tau_0) = x_0$, эквивалентна интегральному уравнению $x(t)-x_0 = \int\limits_{\tau_0}^{t} f^0(s)ds + \sum\limits_{k=1}^{n} \Big[\int\limits_{\tau_0}^{t} f^k(s)ds\Big]\, x(\tau_k)$ или $x(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_{0k}(t)\,x(\tau_k) = \Delta_{00}(t)$. Последнее уравнение имеет вид (2.9), а для соответствующего ему определителя (2.10) имеет место равенство (2.13). В силу леммы 2.1 данное уравнение, а вместе с ним и исходная задача, имеет единственное непрерывное решение тогда и только тогда, когда $\Delta(\tau_0) \neq 0$, и этим решением является функция $x(t) \doteq \mathrm{D}(t)/\Delta(\tau_0)$, $t \in K$.

3. $b) \Longrightarrow a)$. Если $\Delta(t) \not\equiv 0$, то существует $\tau_0 \in K$ такое, что $\Delta(\tau_0) \neq 0$. Так как $x \in \mathrm{C}$, то уравнение $(\dot{x},\varphi) \equiv (Fx,\varphi)$ эквивалентно совокупности уравнений $x(t) - \int\limits_{\tau_0}^{t} (Fx)(s)\,ds = c$, $c \in \mathbb{C}$, а каждое из них эквивалентно задаче $\begin{cases} (\dot{x},\varphi) \equiv (Fx,\varphi) \\ x(\tau_0) = c \end{cases}$, имеющей единственное решение $x(t) = \mathrm{D}(t;\tau_0,c)/\Delta(\tau_0)$. Таким образом, семейство $\mathcal{X}$ всех непрерывных решений исходного уравнения $(\dot{x},\varphi) \equiv (Fx,\varphi)$ имеет вид $\mathcal{X} = \big\{\mathrm{D}(t;\tau_0,c)/\Delta(\tau_0),\ c \in \mathbb{C}\big\}$, причем для любых констант $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ имеет место равенство $\mathrm{D}(t;\tau_0,c_1) - \mathrm{D}(t;\tau_0,c_2) = (c_1-c_2)\,\Delta(t)$, поэтому $\dim \mathcal{X} = 1$.

$a) \Longrightarrow b)$. Если пространство непрерывных решений неоднородного уравнения (2.1) одномерно, то таковым же является и пространство $\mathcal{X}_0$ непрерывных решений однородного уравнения.

Тем самым $\mathcal{X}_0$ имеет вид $\mathcal{X}_0 = \left\{ c\,\xi(t),\, c \in \mathbb{C} \right\}$, где непрерывная функция $\xi(\cdot)$ такова, что $\xi(t) \not\equiv 0$. Зафиксируем $\tau_0 \in K$ такое, что $\xi(\tau_0) \neq 0$. Каждая из функций $c\,\xi(\cdot)$ является единственным решением уравнения $x(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\int\limits_{\tau_0}^{t} f^k(s)\, ds \right] x(\tau_k) = c\,\xi(\tau_0)$, поэтому в соответствии с пунктом 2 теоремы справедливо $\Delta(\tau_0) \neq 0$.

$b) \iff c)$. Предположим, что $\Delta(t) \not\equiv 0$, но $\Delta(\tau_k) = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Положив $x_0 = 1$ и $f^0(t) \equiv 0$, получаем равенства $\mathrm{D}(t) = \Delta(t)$ и $\Delta(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\int\limits_{\tau_0}^{t} f^k(s)\, ds \right] \Delta(\tau_k) = \Delta(\tau_0)$, поэтому $\Delta(t) = \Delta(\tau_0)$ для всех $t, \tau_0 \in K$. Следовательно, $\Delta(t) \equiv \mathrm{const}$, причем $\Delta(t) \equiv 0$, а обратная импликация тривиальна.

Если $f^0 = 0$, то $\mathrm{D}(t; \tau_0, x_0) = x_0\, \Delta(t)$, поэтому $x(t) = c\,\Delta(t)$ — общее непрерывное решение однородного уравнения (2.1).

4. Случай $\Delta(t) \not\equiv 0$ мы уже обсудили, а случай $\Delta(t) \equiv 0$ тривиален.

З а м е ч а н и е 2.5. Согласно замечанию 2.1 для уравнения (2.2) легко сформулировать аналог теоремы 2.2: в этом случае элементы определителей $\Delta(t)$ и $\mathrm{D}(t)$ преобразуются в соответствии с заменой, предложенной в замечании.

З а м е ч а н и е 2.6. При τ_0 таких, что $\Delta(\tau_0) \neq 0$, начальная задача $(\dot{x}, \varphi) \equiv (Fx, \varphi)$, $x(\tau_0) = x_0$ имеет единственное непрерывное решение, поэтому в соответствии с [8, с.16] она является корректно поставленной. Она перестает быть таковой, если $\Delta(\tau_0) = 0$. В этом случае задача либо вообще не имеет непрерывных решений, либо имеет их бесконечно много. Однако в классе прерывистых функций данная задача всегда разрешима. Таким образом, процедура регуляризации, предложенная в [8], позволяет на основании минимизации функционала $\|x - \mathrm{P}x\|$, заданного на множестве функций вида (2.3) таких, что $r(\cdot) = 0$, находить псевдорешения и нормальные решения задачи (в классе прерывистых функций).

3. Об одном семействе сильных операторов

Произвольные функции $Q \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$ и $f \in \mathrm{G}$ и точка $\alpha \in K$ порождают оператор $F : X \to \mathrm{G}$, $(Fx)(t) \doteq f(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} x\,dQ$, где через X обозначено подпространство $X \subseteq \mathrm{G}$, состоящее из тех $x \in \mathrm{G}$, что при всех $\beta \in K$ существует интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} x\,dQ$. Если, например, Q непрерывна, то $X = \mathrm{G}$. Через $\langle\alpha,\beta\rangle$ обозначим отрезок $[\alpha,\beta]$ при $\alpha \leqslant \beta$, а иначе $\langle\alpha,\beta\rangle$ — это отрезок $[\beta,\alpha]$. Согласно [9, с.117] функция $x \in X$ тогда и только тогда, когда она непрерывна в каждой точке разрыва функции Q. Другими словами, $T(x) \cap T(Q) = \varnothing$, где $T(u)$ обзначает множество точек разрыва функции $u \in \mathrm{G}$ (заметим, что в соответствии с [1, с. 17] пересечение $T(u) \cap \langle\alpha,\beta\rangle$ — не более чем счетное множество).

Покажем, что $F : X \to \mathrm{G}$ — сильный оператор. Если $x \in X$ и $z \doteq x - \mathrm{P}x$, то $z \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, причем $z(t) = x(t) - x(t-0) = 0 = z(t-0)$ для любого $t \in T(Q)$, поэтому интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} z\,dQ$ существует и равен 0. Действительно, сужение $Q : \langle\alpha,\beta\rangle \to \mathbb{C}$ представимо в виде суммы $Q = q + \theta$ (см. [10, с. 206]), где $q \in \mathrm{CBV}\langle\alpha,\beta\rangle$, а $\theta : \langle\alpha,\beta\rangle \to \mathbb{C}$ — функция скачков, имеющая вид

$$\theta(t) \doteq \sum_{\tau_k \in T} \Big[-Q_k^- \int\limits_{\alpha}^{t} d\xi_k + Q_k^+ \int\limits_{\alpha}^{t} d\eta_k\Big], \qquad \sum_{\tau_k \in T} (|Q_k^-| + |Q_k^+|) < \infty,$$

$$T \doteq T(Q) \cap \langle\alpha,\beta\rangle,\ Q_k^- \doteq Q(\tau_k - 0) - Q(\tau_k),\ Q_k^+ \doteq Q(\tau_k + 0) - Q(\tau_k),$$

$$\xi_k(t) \doteq \begin{cases} -1 &, \ t < \tau_k \\ 0 &, \ t \geqslant \tau_k \end{cases}, \qquad \eta_k(t) \doteq \begin{cases} 0 &, \ t \leqslant \tau_k \\ 1 &, \ t > \tau_k \end{cases}.$$

Если $\theta_k(t) \doteq Q_k^- \int\limits_{\alpha}^{t} d\xi_k - Q_k^+ \int\limits_{\alpha}^{t} d\eta_k$, то $\theta(t) = -\sum\limits_{\tau_k \in T} \theta_k(t)$ — равномерно на $\langle\alpha,\beta\rangle$ сходящийся функциональный ряд. Согласно [9, с.102] для любой функции u, непрерывной в точке τ_k, справедливо $\int\limits_{\alpha}^{\beta} u\,d\xi_k = u(\tau_k) \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\xi_k$ и $\int\limits_{\alpha}^{\beta} u\,d\eta_k = u(\tau_k) \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\eta_k$, поэтому

$\int\limits_\alpha^\beta u\,d\theta_k = u(\tau_k)\,\theta_k(\beta)$. Поскольку $z(\tau_k) = 0$, то $\int\limits_\alpha^\beta z\,d\theta = 0$, а так как $z \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$ и $q \in \mathrm{CBV}\langle\alpha,\beta\rangle$, то $\int\limits_\alpha^\beta z\,dq = 0$ (см. [4]). Таким образом, $(F\mathrm{P}x)(t) = f(t) + \int\limits_\alpha^t \mathrm{P}x\,dQ = f(t) + \int\limits_\alpha^t x\,dQ = (Fx)(t)$ для всех $t \in K$, а импликация $x \in X \Longrightarrow \mathrm{P}x \in X$ очевидна.

Поскольку F — сильный оператор, то в силу теоремы 1.3 процедура решения уравнения $(\dot{x},\varphi) \equiv (Fx,\varphi)$ сводится к поиску регулярно дифференцируемых решений интегро-дифференциального уравнения $\dot{y} = Fy$. Другими словами, если $x \in X$ — какое-нибудь решение уравнения $(\dot{x},\varphi) \equiv (Fx,\varphi)$ и $y \doteq \mathrm{P}x$, то $y \in \mathrm{RD} \cap X = \mathrm{RD}$ и $\dot{y} = Fy$ почти всюду. Если $z \doteq Fy$, то

$$v(t) \doteq \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(\alpha) \\ f(t) \end{pmatrix} + \int\limits_\alpha^t d\begin{pmatrix} 0 & s \\ Q(s) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix},$$

$$v(t) - \int\limits_\alpha^t d\mathcal{Q} \cdot v = b(t), \qquad t \in \langle\alpha,\beta\rangle, \tag{3.1}$$

где $\mathcal{Q}(s) \doteq \begin{pmatrix} 0 & s \\ q(s) & 0 \end{pmatrix}$, $b(t) \doteq \begin{pmatrix} y(\alpha) \\ f(t) + \int_\alpha^t y\,d\theta \end{pmatrix}$. Обозначим через $C(t,\tau)$ матрицу Коши уравнения (3.1). Согласно [11] она существует и справедливы тождества: $C(t,\tau) - \int\limits_\tau^t d\mathcal{Q}(s) \cdot C(s,\tau) = E$; $C(t,\tau) - \int\limits_\tau^t C(t,s) \cdot d\mathcal{Q}(s) = E$; $C(t,s)\,C(s,\tau) = C(t,\tau)$; $C(t,t) = E$. Кроме того, $C : \langle\alpha,\beta\rangle^2 \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ непрерывна, имеет ограниченное изменение по каждой переменной, а единственным решением (3.1) является функция $v(t) = C(t,\alpha)\,b(\alpha) + \int\limits_\alpha^t C(t,\tau) \cdot d\,b(\tau)$. В частности, функции y и z удовлетворяют системе уравнений

$$y(t) = C_{11}(t,\alpha)\,y(\alpha) + C_{12}(t,\alpha)\,f(\alpha) + \int\limits_\alpha^t C_{12}(t,\tau)\,d\big[f(\tau) + \int\limits_\alpha^\tau y\,d\theta\big],$$

$$z(t) = C_{21}(t,\alpha)\,y(\alpha) + C_{22}(t,\alpha)\,f(\alpha) + \int\limits_{\alpha}^{t} C_{22}(t,\tau)\,d\big[f(\tau) + \int\limits_{\alpha}^{\tau} y\,d\theta\big],$$

причем в первое уравнение входит лишь функция y. Кроме того, проинтегрировав интеграл $\int\limits_{\alpha}^{t} C_{12}(t,\tau)\,df(\tau)$ по частям, получаем

$$y(t) = C_{11}(t,\alpha)\,y(\alpha) - \int\limits_{\alpha}^{t} f(\tau)\,d_\tau C_{12}(t,\tau) + \int\limits_{\alpha}^{t} C_{12}(t,\tau)\,y(\tau)\,d\theta(\tau)$$

(в силу равенства $C(t,t) = E$ справедливо $C_{12}(t,t) = 0$). Пусть $b_0(t) \doteq C_{11}(t,\alpha)\,y(\alpha) - \int\limits_{\alpha}^{t} f(\tau)\,d_\tau C_{12}(t,\tau)$, $\quad b_k(t) \doteq C_{12}(t,\tau_k)\,\theta_k(t)$. Функция $\theta_k(t)$ ограничена (она постоянна при $t < \tau_k$ и при $t > \tau_k$ и разрывна разве что в точке τ_k), а $\lim\limits_{t\to\tau_k} C_{12}(t,\tau_k) = 0$, поэтому $\lim\limits_{t\to\tau_k} b_k(t) = 0 = b_k(\tau_k)$, следовательно, все $b_k : \langle\alpha,\beta\rangle \to \mathbb{C}$ — непрерывные функции. Заметим, что функция b_0 тоже непрерывна. Очевидная оценка (через sup-нормы)

$$|b_k(t)\,y(\tau_k)| \leqslant \|y\|_{\langle\alpha,\beta\rangle} \cdot \|C_{12}\|_{\langle\alpha,\beta\rangle^2} \cdot (|Q_k^-| + |Q_k^+|), \qquad t \in \langle\alpha,\beta\rangle,$$

означает, что функциональный ряд $\sum\limits_{\tau_k\in T} b_k(t)\,y(\tau_k)$ абсолютно и равномерно на $\langle\alpha,\beta\rangle$ сходится. Следовательно,

$$\int\limits_{\alpha}^{t} C_{12}(t,\tau)\,y(\tau)\,d\theta(\tau) = -\sum_{\tau_k\in T} b_k(t)\,y(\tau_k), \qquad t \in \langle\alpha,\beta\rangle,$$

а $y\,|_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ удовлетворяет уравнению $y(t) + \sum\limits_{\tau_k\in T} b_k(t)\,y(\tau_k) = b_0(t)$.

1^0. Если $\operatorname{card} T < \infty$, то $y(t)$ при $t \in \langle\alpha,\beta\rangle$ удовлетворяет уравнению (2.9), а элементы Δ_{ij} определителя (2.10) имеют вид

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} + C_{12}(\tau_i,\tau_j)\,\big[\,Q_j^- \int\limits_{\alpha}^{\tau_i} d\xi_j - Q_j^+ \int\limits_{\alpha}^{\tau_i} d\eta_j\,\big].$$

Пусть $\alpha < \beta$, и предположим, что $\alpha \leqslant \tau_1 < \ldots < \tau_n \leqslant \beta$, где $n \doteq \operatorname{card} T$. Тогда, очевидно, $\Delta_{ii} = 1$, $\Delta_{ij} = 0$ при $i < j$ и, следовательно, $\Delta = 1$. Эти же равенства имеют место и в том случае, когда $\beta < \alpha$ и $\beta \leqslant \tau_n < \ldots < \tau_1 \leqslant \alpha$. Таким образом, в соответствии с леммой 2.1 сужение $y : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{C}$ принадлежит множеству $\mathcal{X}\langle \alpha, \beta \rangle \doteq \{ \mathrm{D}_c(\cdot)|_{\langle \alpha,\beta\rangle},\ c \in \mathbb{C} \}$, где $\mathrm{D}_c(t)$ — определитель вида (2.11), построенный по разбиению $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ (независимо от порядка $\tau_{i_1} < \ldots < \tau_{i_n}$) и функциям $b_0(t), \ldots, b_n(t)$. Все эти функции, кроме $b_0(t)$, зависят лишь от исходных параметров уравнения $(\dot{x}, \varphi) \equiv (Fx, \varphi)$, а функция $b_0(t)$ зависит еще от величины $y(\alpha)$ (от константы $c \in \mathbb{C}$), что и отражено в обозначении $\mathrm{D}_c(t)$. Таким образом, если $\operatorname{card}(T(Q) \cap \langle \alpha, \beta \rangle) < \infty$, то семейство $\mathcal{X}\langle \alpha, \beta \rangle$ является общим решением интегро-дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = f(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} x\, dQ$ (при $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$), а для сужения $y\,|_{\langle \alpha,\beta\rangle}$ имеет место равенство $y(t) = \mathrm{D}_c(t)$ при $c = y(\alpha)$.

В силу второго тождества для матрицы $C(t, \tau)$ справедливо равенство $C_{12}(t,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} C_{11}(t,s)\, ds$, поэтому $b_0(t) - C_{11}(t,\alpha)\, y(\alpha) = = -\int\limits_{\alpha}^{t} f(\tau)\, d_\tau \big[\int\limits_{\tau}^{t} C_{11}(t,s)\, ds \big] = \int\limits_{\alpha}^{t} C_{11}(t,\tau)\, f(\tau)\, d\tau$, следовательно,

$$y(t) = \mathrm{D}_{y(\alpha)}(t) =$$

$$= \begin{vmatrix} C_{11}(t,\alpha)y(\alpha) + \int\limits_{\alpha}^{t} C_{11}(t,\tau)f(\tau)d\tau & b_1(t) & \ldots & b_n(t) \\ C_{11}(\tau_1,\alpha)y(\alpha) + \int\limits_{\alpha}^{\tau_1} C_{11}(\tau_1,\tau)f(\tau)d\tau & 1 + b_1(\tau_1) & \ldots & b_n(\tau_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{11}(\tau_n,\alpha)y(\alpha) + \int\limits_{\alpha}^{\tau_n} C_{11}(\tau_n,\tau)f(\tau)d\tau & b_1(\tau_n) & \ldots & 1 + b_n(\tau_n) \end{vmatrix}.$$

Таким образом, справедлива следующая

Т е о р е м а 3.1. *Если функция $Q \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}(K)$ имеет на отрезке $\langle \alpha, \beta \rangle \subset K$ лишь конечное число точек разрыва, то всякое непрерывное решение интегро-дифференциального уравнения*

$\dot y(t) = f(t) + \int\limits_\alpha^t y\,dQ$ *при* $t \in \langle\alpha,\beta\rangle$ *представимо в виде*

$$y(t) = R_n(t,\alpha)\,y(\alpha) + \int\limits_\alpha^t R_n(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau, \qquad t \in \langle\alpha,\beta\rangle, \tag{3.2}$$

где через $R_n(t,\tau)$ *обозначен определитель порядка* $n+1$ *:*

$$R_n(t,\tau) \doteq \begin{vmatrix} C_{11}(t,\tau) & b_1(t) & \dots & b_n(t) \\ C_{11}(\tau_1,\tau)\,\chi_{\langle\alpha,\tau_1\rangle}(\tau) & 1+b_1(\tau_1) & \dots & b_n(\tau_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{11}(\tau_n,\tau)\,\chi_{\langle\alpha,\tau_n\rangle}(\tau) & b_1(\tau_n) & \dots & 1+b_n(\tau_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} C_{11}(t,\tau) & C_{12}(t,\tau_1)\theta_1(t) & \dots & C_{12}(t,\tau_n)\,\theta_n(t) \\ C_{11}(\tau_1,\tau)\chi_{\langle\alpha,\tau_1\rangle}(\tau) & 1 & \dots & C_{12}(\tau_1,\tau_n)\theta_n(\tau_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{11}(\tau_n,\tau)\chi_{\langle\alpha,\tau_n\rangle}(\tau) & C_{12}(\tau_n,\tau_1)\theta_1(\tau_n) & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Легко заметить, что функция $R_n(t,\tau)$, $(t,\tau) \in \langle\alpha,\beta\rangle^2$, ограничена, непрерывна по t при фиксированном τ и является кусочно непрерывной функцией по τ при фиксированном t .

2^0. Если множество точек разрыва у Q на отрезке $\langle\alpha,\beta\rangle$ счетно, то формула (3.2) также имеет место. Роль ядра $R_n(t,\tau)$ в этом случае выполняет предельная функция последовательности $\{R_n(t,\tau)\}_{n=1}^\infty$ в sup-норме. Непрерывность по t у предельной функции сохранится, а по переменной τ она является прерывистой. Мы приводим эти утверждения без доказательства.

3^0. Для задачи, состоящей из интегро-дифференциального уравнения $\dot y(t) = f(t) + \int\limits_\alpha^t y\,dQ$ и начального условия $y(\alpha) = y_0$, справедлива процедура продолжения решения с произвольного отрезка $\langle\alpha,\beta\rangle$ на весь интервал K .

4^0. Теоремы 1.3 и 3.1 позволяют дать полное описание всех прерывистых решений уравнения $(\dot x,\varphi) \equiv (Fx,\varphi)$.

Список литературы

1. Hönig Ch.S. Volterra-Stieltjes integral equations. Mathematics Studies 16. Amsterdam: North-Holland, 1975. 152 p.
2. Hildebrandt T.H. Introduction to the theory of integration. N.Y.; L.: Academic Press, 1963. 385 p.
3. Дерр В.Я. Об одном обобщении интеграла Римана–Стилтьеса // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1997. Вып. 3 (11). С. 3–29.
4. Родионов В.И. Присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса в алгебре прерывистых функций // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2005. Вып. 1 (31). С. 3–78.
5. Родионов В.И. О пространстве регулярно дифференцируемых функций // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2004. Вып. 1 (29). С. 3–32.
6. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
7. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. 384 с.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1969. 656 с.
10. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
11. Пешков Д.С., Родионов В.И. О линейных импульсных системах // Вестн. Удм. ун-та. Сер. ґМатематикаЄ. 2006. Ґ 1. С. 95–106.