УДК 517.5

© **Л.И.Данилов**
danilov@otf.pti.udm.ru

О РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВЕЙЛЮ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО БЕЗИКОВИЧУ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: почти периодические функции, равномерная аппроксимация.

Abstract. We suggest a new proof of the theorem on uniform approximation of Weyl almost periodic functions by elementary Weyl almost periodic functions. Analogous result is also obtained for Besicovitch almost periodic functions.

Введение

В работе доказываются теоремы о равномерной аппроксимации почти периодических (п.п.) по Вейлю и п.п. по Безиковичу функций (со значениями в метрическом пространстве) элементарными п.п. функциями. Эти теоремы используются при доказательстве существования п.п. по Вейлю и п.п. по Безиковичу сечений многозначных п.п. отображений [1; 2; 3]. Утверждения о существовании п.п. сечений находят применение при исследовании п.п. решений дифференциальных включений (см. статьи [4; 5], в которых сформулирована соответствующая проблема).

Существование п.п. по Степанову сечений многозначных п.п. по Степанову отображений было впервые доказано в [6] на основе результатов Фришковского [7]. В [8] предложен другой метод доказательства, использующий равномерную аппроксимацию п.п. по Степанову функций элементарными п.п. функциями. Этот метод позволяет доказать существование п.п. по Степанову сечений, удовлетворяющих разнообразным дополнительным условиям [9; 10; 11]. Равномерная аппроксимация элементарными п.п.

функциями используется также при исследовании мерозначных п.п. по Степанову функций [12; 13], а также при доказательстве теорем о суперпозиции п.п. функций и многозначных отображений [14; 15].

Теорема о равномерной аппроксимации п.п. по Вейлю функций элементарными п.п. по Вейлю функциями была доказана в [1; 2]. Предложенное в настоящей работе доказательство проще, чем доказательство из [1; 2]. Приведено также доказательство теоремы о равномерной аппроксимации п.п. по Безиковичу функций элементарными п.п. по Безиковичу функциями.

В § 1 сформулированы некоторые свойства п.п. по Вейлю и п.п. по Безиковичу функций, используемые в дальнейшем. Определение и ряд утверждений о п.п. функциях приведены, например, в [16]. Многие утверждения о п.п. по Вейлю функциях можно найти в [1]. Теоремы о равномерной аппроксимации п.п. по Вейлю и п.п. по Безиковичу функций приведены в § 2 и § 3.

1. Определения и некоторые свойства почти периодических по Вейлю и по Безиковичу функций

Пусть $(\mathcal{U},\rho)$ — полное метрическое пространство, $\overline{A}$ — замыкание множества $A\subseteq\mathcal{U}$, $U_r(x)=\{y\in\mathcal{U}:\rho(x,y)<r\}$, $x\in\mathcal{U}$, $r>0$; mes — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Функция $f:\mathbb{R}\to\mathcal{U}$ называется *элементарной*, если существуют точки $x_j\in\mathcal{U}$ и непересекающиеся измеримые (по Лебегу) множества $T_j\subseteq\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$, такие, что $\operatorname{mes}\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_j T_j=0$ и $f(t)=x_j$ для всех $t\in T_j$. Обозначим такую функцию через $f(.)=\sum\limits_j x_j\chi_{T_j}(.)$ (где $\chi_T(.)$ — характеристическая функция множества $T\subseteq\mathbb{R}$). Для любых функций $f_j:\mathbb{R}\to\mathcal{U}$, $j\in\mathbb{N}$, определим функцию $\sum\limits_j f_j(.)\chi_{T_j}(.):\mathbb{R}\to\mathcal{U}$, совпадающую с функцией $f_j(.)$ на множестве T_j, $j\in\mathbb{N}$ (обозначение $\sum\limits_j f_j(.)\chi_{T_j}(.)$ будет использоваться не только в случае, когда пространство $\mathcal{U}=(\mathcal{H},\|.\|)$ нормированное, но и в случае метрического пространства $\mathcal{U}$, однако никаких линейных операций над такими функциями производиться не будет). Функция

$f:\mathbb{R}\to\mathcal{U}$ *измерима*, если для любого $\varepsilon>0$ существует элементарная функция $f_\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathcal{U}$ такая, что $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\rho(f(t),f_\varepsilon(t))<\varepsilon$.

Пусть $M(\mathbb{R},\mathcal{U})$ — это пространство измеримых функций $f:\mathbb{R}\to\mathcal{U}$ (функции, совпадающие при почти всех (п.в.) $t\in\mathbb{R}$, отождествляются). Пусть $x_0\in\mathcal{U}$. Для $p\geqslant 1$ обозначим

$$M_p(\mathbb{R},\mathcal{U})\doteq\bigl\{f\in M(\mathbb{R},\mathcal{U}):\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\int\limits_{\xi}^{\xi+1}\rho^p(f(t),x_0)\,dt<+\infty\bigr\}.$$

На множестве $M_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ для всех $l>0$ определяются метрики

$$D^{(S)}_{p,l}(f,g)=\bigl(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\tfrac{1}{l}\int\limits_{\xi}^{\xi+l}\rho^p(f(t),g(t))\,dt\bigr)^{1/p},\quad f,g\in M_p(\mathbb{R},\mathcal{U}).$$

Если $l_1\geqslant l$, то

$$\bigl(\tfrac{l}{l_1}\bigr)^{1/p}D^{(S)}_{p,l}(f,g)\leqslant D^{(S)}_{p,l_1}(f,g)\leqslant\bigl(1+\tfrac{l}{l_1}\bigr)^{1/p}D^{(S)}_{p,l}(f,g),$$

поэтому существует предел

$$D^{(W)}_p(f,g)=\lim_{l\to+\infty}D^{(S)}_{p,l}(f,g)=\inf_{l>0}D^{(S)}_{p,l}(f,g),\quad f,g\in M_p(\mathbb{R},\mathcal{U}),$$

который является полуметрикой на $M_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$.

Пусть $\mathcal{M}_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $p\geqslant 1$, — пространство Марцинкевича, то есть множество таких функций $f\in M(\mathbb{R},\mathcal{U})$, что $\rho(f(.),x_0)$ принадлежит $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\varlimsup\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{2b}\int\limits_{-b}^{b}\rho^p(f(t),x_0)\,dt<+\infty$. На множестве $\mathcal{M}_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ вводится полуметрика

$$D^{(B)}_p(f,g)=\Bigl(\varlimsup_{b\to+\infty}\tfrac{1}{2b}\int\limits_{-b}^{b}\rho^p(f(t),g(t))\,dt\Bigr)^{1/p},\quad f,g\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R},\mathcal{U}).$$

Если для функций $f,g\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ определить отношение эквивалентности: $f\sim g$ тогда и только тогда, когда $D^{(B)}_p(f,g)=0$, то фактор-пространство $(\mathcal{M}_p(\mathbb{R},\mathcal{U})/\sim,D^{(B)}_p)$ становится полным метрическим пространством [17]. Справедливо включение

$M_p(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{M}_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ и $D_p^{(B)}(f,g) \leqslant D_p^{(W)}(f,g) \leqslant D_{p,l}^{(S)}(f,g)$ для всех функций $f,g \in M_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ (и всех $l>0$).

Если $\mathcal{U} = (\mathcal{H},\|.\|)$ — банахово пространство (обозначаем $\rho(x,y)=\|x-y\|$, $x,y\in\mathcal{H}$), то на $M_p(\mathbb{R},\mathcal{H})$ определены нормы

$$\|f\|_{p,l}^{(S)} = \Big(\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_{\xi}^{\xi+l} \|f(t)\|^p dt \Big)^{1/p}, \quad l>0,$$

и полунорма $\|f\|_p^{(W)} = \lim\limits_{l\to+\infty} \|f\|_{p,l}^{(S)}$, $f \in M_p(\mathbb{R},\mathcal{H})$, а на пространстве $\mathcal{M}_p(\mathbb{R},\mathcal{H})$ — полунорма

$$\|f\|_p^{(B)} = \Big(\varlimsup_{b\to+\infty} \frac{1}{2b} \int_{-b}^{b} \|f(t)\|^p\, dt \Big)^{1/p}, \quad f \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R},\mathcal{H}).$$

В случае $\mathcal{H}=\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$) полагаем $\|h\|=|h|$, $h\in\mathbb{C}$. В дальнейшем (без пояснений) через $\mathcal{H}$ будет обозначаться банахово пространство, при этом удобно считать банахово пространство $\mathcal{H}=(\mathcal{H},\|.\|)$ комплексным. Если банахово пространство $\mathcal{H}$ вещественное, то можно рассмотреть его комплексификацию $\mathcal{H}+i\mathcal{H}$ (с нормой $\|h_1+ih_2\| = \sup\limits_{\varphi\in[0,2\pi)} \|h_1\cos\varphi - h_2\sin\varphi\|$), отождествляя пространство $\mathcal{H}$ с вещественным подпространством.

Множество $T\subseteq\mathbb{R}$ назывется *относительно плотным*, если существует $a>0$ такое, что $[\xi,\xi+a]\cap T\neq\varnothing$ для всех $\xi\in\mathbb{R}$. Число $\tau\in\mathbb{R}$ называется $(\varepsilon, D_{p,l}^{(S)})$*-почти периодом* функции $f\in M_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, где $\varepsilon>0$, $p\geqslant 1$, если $D_{p,l}^{(S)}(f(.),f(.+\tau))<\varepsilon$. Функция $f\in M_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ принадлежит пространству $S_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *п.п. по Степанову* функций *порядка* $p\geqslant 1$, если для любого $\varepsilon>0$ множество $(\varepsilon, D_{p,1}^{(\rho)})$-почти периодов f относительно плотно.

Функция $f\in M_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ принадлежит пространству $W_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *п.п. по Вейлю* функций *порядка* $p\geqslant 1$, если для любого $\varepsilon>0$ существует функция $f_\varepsilon\in S_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ такая, что $D_p^{(W)}(f,f_\varepsilon)<\varepsilon$. Функция $f\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ принадлежит пространству $B_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$

п.п. по Безиковичу функций *порядка* $p \geqslant 1$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f_\varepsilon \in S_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, для которой $D_p^{(B)}(f, f_\varepsilon) < \varepsilon$. Имеем $S_p(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq W_p(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq B_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ и $S_{p_1}(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq S_{p_2}(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $W_{p_1}(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq W_{p_2}(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $B_{p_1}(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq B_{p_2}(\mathbb{R},\mathcal{U})$ для всех $p_1 \geqslant p_2 \geqslant 1$. Если $f, g \in W_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, то $D_p^{(W)}(f,g) = D_p^{(B)}(f,g)$, $p \geqslant 1$.

На пространстве $\mathcal{U}$ определим еще одну метрику $\rho'(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$, $x, y \in \mathcal{U}$; легко проверить, что $(\mathcal{U}, \rho')$ — полное метрическое пространство. Пусть $S(\mathbb{R},\mathcal{U}) \doteq S_1(\mathbb{R},(\mathcal{U},\rho'))$, $W(\mathbb{R},\mathcal{U}) \doteq W_1(\mathbb{R},(\mathcal{U},\rho'))$, $B(\mathbb{R},\mathcal{U}) \doteq B_1(\mathbb{R},(\mathcal{U},\rho'))$. Справедливы следующие вложения $S_1(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq S(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $W_1(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq W(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $B_1(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq B(\mathbb{R},\mathcal{U})$ и $S(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq W(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq B(\mathbb{R},\mathcal{U})$. Для всех $f, g \in M(\mathbb{R},\mathcal{U}) = M_1(\mathbb{R},(\mathcal{U},\rho')) = \mathcal{M}_1(\mathbb{R},(\mathcal{U},\rho'))$ обозначим

$$D_l^{(S)}(f,g) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_\xi^{\xi+l} \rho'(f(t), g(t))\, dt, \quad l > 0,$$

$$D^{(W)}(f,g) = \lim_{l\to+\infty} D_l^{(S)}(f,g),$$

$$D^{(B)}(f,g) = \varlimsup_{b\to+\infty} \frac{1}{2b} \int_{-b}^{b} \rho'(f(t), g(t))\, dt.$$

Если $f, g \in W(\mathbb{R},\mathcal{U})$, то $D^{(W)}(f,g) = D^{(B)}(f,g)$.

Последовательность $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, называется f*-возвращающей* для функции $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, если

$$D^{(B)}(f(.), f(. + \tau_j)) \to 0 \tag{1.1}$$

при $j \to +\infty$. Если функция $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$ принадлежит какому-либо из рассматриваемых пространств п.п. функций $S_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $W_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $B_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $S(\mathbb{R},\mathcal{U})$ или $W(\mathbb{R},\mathcal{U})$, то f-возвращающие последовательности — это те и только те последовательности $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, для которых выполняется (1.1) при замене полуметрики $D^{(B)}$ на (полу)метрику $D_{p,l}^{(S)}$ (для любого $l > 0$),

$D_p^{(W)}$, $D_p^{(B)}$, $D_l^{(S)}$ (также для любого $l > 0$) или $D^{(W)}$ соответственно.

Для функций $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$ через $\operatorname{Mod} f$ обозначается множество чисел $\lambda \in \mathbb{R}$ таких, что $e^{i\lambda\tau_j} \to 1$ (где $i^2 = -1$) при $j \to +\infty$ для любой f -возвращающей последовательности $\tau_j \in \mathbb{R}$. Если $D^{(B)}(f(.), y(.)) \neq 0$ для всех постоянных функций $y(t) \equiv y \in \mathcal{U}$, $t \in \mathbb{R}$, то $\operatorname{Mod} f$ — счетный модуль (группа по сложению). В противном случае $\operatorname{Mod} f = \{0\}$. Если $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$ и $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, — такая последовательность, что для всех $\lambda \in \operatorname{Mod} f$ имеем $e^{i\lambda\tau_j} \to 1$ при $j \to +\infty$, то τ_j — f -возвращающая последовательность.

Для любой функции $f \in B_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ существует среднее значение $M(e^{-i\lambda t}f) = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{2b} \int\limits_{-b}^{b} e^{-i\lambda t} f(t)\, dt$. Обозначим через $\Lambda\{f\}$ множество показателей Фурье функции $f \in B_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$, то есть множество тех чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых $M\,(e^{-i\lambda t}f) \neq 0$. Для функции $f \in B_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ множество (модуль) $\operatorname{Mod} f$ совпадает с модулем показателей Фурье $\lambda \in \Lambda\{f\}$, то есть с наименьшим модулем (группой по сложению) в $\mathbb{R}$, содержащим множество $\Lambda\{f\}$.

Если $f \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $f(t) \geqslant 0$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$, то справедливо равенство $M(f) = \|f\|_1^{(W)}$. Аналогично, если $f \in B_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $f(t) \geqslant 0$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$, то $M(f) = \|f\|_1^{(B)}$.

Если $\Lambda_j \subseteq \mathbb{R}$ — произвольные модули (индекс j может принадлежать любому непустому индексному множеству), то через $\sum_j \Lambda_j$ (или через $\Lambda_1 + \dots + \Lambda_n$ для конечного числа модулей Λ_j , $j = 1, \dots, n$) обозначается сумма модулей, определяемая как наименьший модуль в $\mathbb{R}$, содержащий все множества Λ_j .

Пусть $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $f_j \in B(\mathbb{R},\mathcal{U}_j)$, $j \in \mathbb{N}$, где $\mathcal{U}_j$ — (полные) метрические пространства. Тогда $\operatorname{Mod} f \subseteq \sum\limits_j \operatorname{Mod} f_j$ в том и только в том случае, если всякая f_j -возвращающая для всех $j \in \mathbb{N}$ последовательность $\tau_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, является f -возвращающей. В частности, если $f_j \in B(\mathbb{R},\mathcal{U}_j)$, $j = 1, 2$, то включение $\operatorname{Mod} f_1 \subseteq \operatorname{Mod} f_2$ имеет место тогда и только тогда, когда всякая f_2-возвращающая последовательность $\tau_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, является f_1-возвращающей.

Если $f, f_j \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $j \in \mathbb{N}$, и $D^{(B)}(f, f_j) \to 0$ при $j \to +\infty$, то $\operatorname{Mod} f \subseteq \sum\limits_j \operatorname{Mod} f_j$.

Для любой функции $f \in W_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $p \geqslant 1$, и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f_\varepsilon \in S_1(\mathbb{R},\mathcal{U}) \cap L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq S_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ такая, что $D_p^{(W)}(f, f_\varepsilon) < \varepsilon$ и $\operatorname{Mod} f_\varepsilon \subseteq \operatorname{Mod} f$. Аналогично, если $f \in B_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция f_ε из $S_1(\mathbb{R},\mathcal{U}) \cap L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq S_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ такая, что $D_p^{(B)}(f, f_\varepsilon) < \varepsilon$ и $\operatorname{Mod} f_\varepsilon \subseteq \operatorname{Mod} f$. Следующая лемма является следствием последних утверждений и аналогичной леммы (см., напр., [8]) для п.п. по Степанову функций.

Л е м м а 1.1. *Пусть* $(\mathcal{U}, \rho)$ *и* $(\mathcal{V}, \rho_{\mathcal{V}})$ — *(полные) метрические пространства и* $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — *такая функция, что для некоторой константы* $C > 0$ *и всех* $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ *справедливо неравенство* $\rho_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}(u_1), \mathcal{F}(u_2)) \leqslant C\rho(u_1, u_2)$. *Тогда для любой функции* $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *имеем* $\mathcal{F}(f(.)) \in B(\mathbb{R},\mathcal{V})$ *и* $\operatorname{Mod}\mathcal{F}(f(.)) \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$. *Если* $f \in B_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, *то* $\mathcal{F}(f(.)) \in B_p(\mathbb{R},\mathcal{V})$. *Аналогично для любой функции* $f \in W(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *имеем* $\mathcal{F}(f(.)) \in W(\mathbb{R},\mathcal{V})$. *Если* $f \in W_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, *то* $\mathcal{F}(f(.)) \in W_p(\mathbb{R},\mathcal{V})$.

С л е д с т в и е 1.1. *Пусть* $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $x \in \mathcal{U}$. *Тогда* $\rho(f(.), x) \in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *и* $\operatorname{Mod}\rho(f(.), x) \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$. *Если* $f \in W(\mathbb{R},\mathcal{U})$, *то* $\rho(f(.), x) \in W(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Для банахова пространства $(\mathcal{H}, \|.\|)$ и чисел $a > 0$ определим функции $\mathcal{H} \ni h \to \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(a; h) = \begin{cases} h, & \text{если } \|h\| \leqslant a, \\ a\|h\|^{-1}h, & \text{если } \|h\| > a. \end{cases}$ Для всех $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ имеем $\|\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(a; h_1) - \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(a; h_2)\| \leqslant 2\,\|h_1 - h_2\|$, поэтому лемма 1.2 непосредственно вытекает из леммы 1.1.

Л е м м а 1.2. *Если* $f \in B(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, *то для любого* $a > 0$ *функция* $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(a; f(.))$ *принадлежит множеству*

$$B(\mathbb{R},\mathcal{H}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R},\mathcal{H}) \subset B_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$$

и $\operatorname{Mod}\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(a;f(.)) \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$. *Если* $f \in W(\mathbb{R},\mathcal{H})$, *то*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(a;f(.)) \in W(\mathbb{R},\mathcal{H}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R},\mathcal{H}) \subset W_1(\mathbb{R},\mathcal{H}) .$$

Для измеримого множества $T \subseteq \mathbb{R}$ используем обозначения $\kappa_B(T) = \|\chi_T\|_1^{(B)}$, $\kappa_W(T) = \|\chi_T\|_1^{(W)}$; $0 \leqslant \kappa_B(T) \leqslant \kappa_W(T) \leqslant 1$. Для $h \in (\mathcal{H}, \|.\|)$ обозначим $\operatorname{sgn} h = \begin{cases} \|h\|^{-1}h , & \text{если } h \neq 0 , \\ 0 , & \text{если } h = 0 . \end{cases}$

Л е м м а 1.3. *Пусть* $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{H})$. *Предположим, что* $\kappa_B(\{t \in \mathbb{R} : \|f(t)\| < \delta\}) \to 0$ *при* $\delta \to +0$. *Тогда справедливы включения* $\operatorname{sgn} f(.) \in B_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ *и* $\operatorname{Mod}\operatorname{sgn} f(.) \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$ (*более того,* $\kappa_B(\{t \in \mathbb{R} : f(t) = 0\}) = 0$). *Если же* $f \in W(\mathbb{R},\mathcal{H})$ *и* $\kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : \|f(t)\| < \delta\}) \to 0$ *при* $\delta \to +0$, *то справедливо включение* $\operatorname{sgn} f(.) \in W_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ (*и* $\kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : f(t) = 0\}) = 0$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{H})$ (для функций $f \in W(\mathbb{R},\mathcal{H})$ доказательство проводится аналогично). Для всех $j \in \mathbb{N}$ положим $f_j(t) \doteq j\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(j^{-1}; f(t))$, $t \in \mathbb{R}$. В силу леммы 1.2 $f_j \in B_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ и $\operatorname{Mod} f_j \subseteq \operatorname{Mod} f$. С другой стороны, из условия леммы получаем, что $\kappa_B(\{t \in \mathbb{R} : f(t) = 0\}) = 0$ и $\|\operatorname{sgn} f(.) - f_j(.)\|_1^{(B)} \to 0$ при $j \to +\infty$. Поэтому справедливо $\operatorname{sgn} f(.) \in B_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ и $\operatorname{Mod}\operatorname{sgn} f(.) \subseteq \sum\limits_j \operatorname{Mod} f_j(.) \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$. $\square$

Для функций $f_1, f_2 \in B(\mathbb{R},\mathcal{H})$ имеем $f_1 + f_2 \in B(\mathbb{R},\mathcal{H})$ и $\operatorname{Mod}(f_1 + f_2) \subseteq \operatorname{Mod} f_1 + \operatorname{Mod} f_2$. Если же $f_1, f_2 \in W(\mathbb{R},\mathcal{H})$, то $f_1 + f_2 \in W(\mathbb{R},\mathcal{H})$. Для функций $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{H})$, $g \in B(\mathbb{R},\mathbb{C})$ справедливо $gf \in B(\mathbb{R},\mathcal{H})$, при этом $\operatorname{Mod} gf \subseteq \operatorname{Mod} f + \operatorname{Mod} g$. Если $f \in W(\mathbb{R},\mathcal{H})$, $g \in W(\mathbb{R},\mathbb{C})$, то $gf \in W(\mathbb{R},\mathcal{H})$. Последние утверждения означают, что пространства $B(\mathbb{R},\mathcal{H})$ и $W(\mathbb{R},\mathcal{H})$ являются соответственно $B(\mathbb{R},\mathbb{C})$ - и $W(\mathbb{R},\mathbb{C})$ - модулями.

Следующая лемма вытекает из определения п.п. по Вейлю и п.п. по Безиковичу функций (и соответствующего утверждения для п.п. по Степанову функций [8]).

Л е м м а 1.4. *Пусть* $f \in W(\mathbb{R},\mathcal{H})$ (*соответственно* $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{H})$). *Тогда для любых* $\varepsilon,\, \delta > 0$ *найдется конечное множество точек* $x_j \in \mathcal{U}$, $j = 1,\dots,N$, *таких, что*

$$\kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : f(t) \notin \bigcup_{j=1}^{N} U_\delta(x_j)\}) < \varepsilon$$

(*соответственно* $\kappa_B(\{t \in \mathbb{R} : f(t) \notin \bigcup_{j=1}^{N} U_\delta(x_j)\}) < \varepsilon$).

С л е д с т в и е 1.2. *Пусть* $f \in W(\mathbb{R},\mathcal{H})$ (*соответственно* $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{H})$). *Найдутся точки* $x_j \in \mathcal{U}$, $j \in \mathbb{N}$, *такие, что*

(1) $\operatorname{mes}\{t \in \mathbb{R} : f(t) \notin \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} x_j}\} = 0$,

(2) *для любого* $\delta > 0$ *при* $N \to +\infty$

$$\kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : f(t) \notin \bigcup_{j=1}^{N} U_\delta(x_j)\}) \to 0 \tag{1.2}$$

(*соответственно* $\kappa_B(\{t \in \mathbb{R} : f(t) \notin \bigcup_{j=1}^{N} U_\delta(x_j)\}) \to 0$).

2. Равномерная аппроксимация почти периодических по Вейлю функций

Пусть $W(\mathbb{R})$ — множество измеримых подмножеств $T \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\chi_T \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Для множеств $T \in W(\mathbb{R})$ положим $\operatorname{Mod} T \doteq \operatorname{Mod} \chi_T$. Если $T \in W(\mathbb{R})$, то также $\mathbb{R} \backslash T \in W(\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod} \mathbb{R} \backslash T = \operatorname{Mod} T$. Так как для любых функций f_1, f_2 из $W(\mathbb{R},\mathbb{C})$ имеем $f_1 f_2 \in W(\mathbb{R},\mathbb{C})$ и $\operatorname{Mod} f_1 f_2 \subseteq \operatorname{Mod} f_1 + \operatorname{Mod} f_2$, то справедлива следующая лемма.

Л е м м а 2.1. *Если* $T_1, T_2 \in W(\mathbb{R})$, *то* $T_1 \cup T_2 \in W(\mathbb{R})$, $T_1 \cap T_2 \in W(\mathbb{R})$, $T_1 \backslash T_2 \in W(\mathbb{R})$ *и все модули* $\operatorname{Mod} T_1 \cup T_2$, $\operatorname{Mod} T_1 \cap T_2$, $\operatorname{Mod} T_1 \backslash T_2$ *содержатся в* $\operatorname{Mod} T_1 + \operatorname{Mod} T_2$.

Если $T \in W(\mathbb{R})$, то $\kappa_W(T) = \kappa_B(T)$.

Для произвольного модуля $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ обозначим через $\mathfrak{M}^{(W)}(\Lambda)$ совокупность последовательностей $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ непересекающихся измеримых (по Лебегу) множеств $T_j \in W(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$, для которых $\operatorname{Mod} T_j \subseteq \Lambda$, $\operatorname{mes} \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} T_j = 0$ и $\kappa_W(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j\leqslant n} T_j) \to 0$ при $n \to +\infty$. Можно также считать, что в $\mathfrak{M}^{(W)}(\Lambda)$ содержатся соответствующие конечные последовательности $\{T_j\}_{j=1,\ldots,N}$, которые всегда можно дополнить до счетных последовательностей, добавляя пустые множества.

Если $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}^{(W)}(\Lambda)$ и $J \subseteq \mathbb{N}$ — произвольное непустое множество, то $\bigcup_{j\in J} T_j \in W(\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod} \bigcup_{j\in J} T_j \subseteq \sum_{j\in J} \operatorname{Mod} T_j$. Если, кроме того, $\kappa_W(T_j) = 0$ для всех $j \in J$, то $\kappa_W(\bigcup_{j\in J} T_j) = 0$.

Л е м м а 2.2. *Пусть* $\{T_j\} \in \mathfrak{M}^{(W)}(\mathbb{R})$ *и* $f_j \in W(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $j \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\sum_j f_j(.)\chi_{T_j}(.) \in W(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *и*

$$\operatorname{Mod} \sum_j f_j(.)\chi_{T_j}(.) \subseteq \sum_j \operatorname{Mod} f_j + \sum_j \operatorname{Mod} T_j . \tag{2.1}$$

Лемма 2.2 вытекает из того, что пространство $W(\mathbb{R},\mathcal{H})$ есть $W(\mathbb{R},\mathbb{C})$ - модуль, и из теоремы Фреше (об изометрическом вложении метрического пространства в банахово пространство).

З а м е ч а н и е 2.1. В условиях леммы 2.2 для индексов j, для которых $\kappa_W(T_j) = 0$ (в этом случае $\operatorname{Mod} T_j = \{0\}$), можно выбирать произвольные функции $f_j \in M(\mathbb{R},\mathcal{U})$ и исключить эти индексы при суммировании в правой части (2.1).

Если $\{T_j\} \in \mathfrak{M}^{(W)}(\mathbb{R})$ и $x_j \in \mathcal{U}$, $j \in \mathbb{N}$, то (в силу леммы 2.2) $\sum_j x_j\chi_{T_j}(.) \in W(\mathbb{R},\mathcal{U})$ (и $\operatorname{Mod} \sum_j x_j\chi_{T_j}(.) \subseteq \sum_j \operatorname{Mod} T_j$). Функция $\sum_j x_j\chi_{T_j}(.)$ называется *элементарной п.п. по Вейлю* функцией.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть* $f \in W(\mathbb{R},\mathcal{U})$. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся последовательность* $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}^{(W)}(\operatorname{Mod} f)$ *и точки* $x_j \in \mathcal{U}$, $j \in \mathbb{N}$, *такие, что* $\rho(f(t), x_j) < \varepsilon$ *для всех* $t \in T_j$.

Доказательство теоремы 2.1 (о равномерной аппроксимации п.п. по Вейлю функций элементарными п.п. по Вейлю функциями) приведено в конце этого параграфа. При доказательстве этого утверждения важную роль играет теорема 2.2.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть* $f \in W(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Тогда найдется не более чем счетное множество* $Y_f \subset \mathbb{R}$ *такое, что для всех* $\lambda \in \mathbb{R}\backslash Y_f$ *справедливо* $\varkappa_W(\{t \in \mathbb{R} : f(t) = \lambda\}) = 0$, $\{t \in \mathbb{R} : f(t) > \lambda\} \in W(\mathbb{R})$ *и* $\operatorname{Mod}\{t \in \mathbb{R} : f(t) > \lambda\} \subseteq \operatorname{Mod} f$ (*кроме того,* $\{t \in \mathbb{R} : f(t) < \lambda\} \in W(\mathbb{R})$ *и* $\operatorname{Mod}\{t \in \mathbb{R} : f(t) < \lambda\} \subseteq \operatorname{Mod} f$).

Другое (более сложное) доказательство теоремы 2.1 было получено в [1; 2]. Оно опирается на следующую теорему 2.3 (см. [18; 1; 2]). Обозначим через $\mathcal{A}^{(W)}$ совокупность таких семейств $\mathbb{F}$ функций $f \in W(\mathbb{R},\mathbb{R})$, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти числа $l = l(\varepsilon,\mathbb{F}) > 0$ и $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon,\mathbb{F}) > 0$ такие, что

$$\sup_{f\in\mathbb{F}}\ \sup_{\tau\in[0,\tau_0]}\ D_l^{(S)}(f(.),f(.+\tau)) < \varepsilon\,.$$

Т е о р е м а 2.3. *Зафиксируем* $\mathbb{F}\in\mathcal{A}^{(W)}$, $\Delta>0$, $\mathbb{T}>0$, $\varepsilon\in(0,1]$. *Тогда существует периодическая с периодом* $\mathbb{T}$ *функция* $g(.) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *зависящая от* $\mathbb{F}$, Δ , $\mathbb{T}$, *но не от числа* ε , *для которой* $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} < \Delta$, *и числа* $\delta = \delta(\varepsilon,\Delta) > 0$ *и* $l = l(\varepsilon,\Delta,\mathbb{F}) > 0$ *такие, что для всех* $\lambda\in\mathbb{R}$ *и всех* $f\in\mathbb{F}$

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \operatorname{mes}\{\,t\in[\,\xi,\xi+l\,] : |f(t)+g(t)-\lambda| < \delta\,\} < \varepsilon l\,.$$

Аналогичное теореме 2.3 утверждение для п.п. по Безиковичу функций приведено в [3]. В следующем параграфе для п.п. по Безиковичу функций сформулированы также аналоги теорем 2.1 и 2.2 (доказательства которых непосредственно переносятся и на этот случай). Отметим, что аналога теоремы 2.2 для п.п. по Степанову функций не существует. В [8] содержится пример п.п. по Бору функции $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ такой, что для всех $\lambda\in(-1,1)$ имеем $\operatorname{sgn}(f(.)-\lambda)\notin S_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и при этом для каждого $b>0$ множество $\{t\in[-b,b] : f(t)=\lambda\}$ конечно.

Для п.п. по Степанову функций утверждение о равномерной аппроксимации элементарными п.п. по Степанову функциями получено в [8; 10]. Более сильные утверждения (в том числе п.п. вариант теоремы Лузина) содержатся в [15; 19; 20] (в двух последних работах п.п. по Степанову функции рассматриваются также на относительных компактах Бора).

Лемма 2.3 необходима при доказательстве теоремы 2.2.

Л е м м а 2.3. *Пусть* $f \in W(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Тогда множество чисел* $\lambda \in \mathbb{R}$, *для которых*

$$\lim_{\delta\to+0} \varkappa_W(\{t \in \mathbb{R} : |f(t)-\lambda| < \delta\}) > 0\,, \tag{2.2}$$

не более чем счетно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$ обозначим $T(\lambda;\delta) \doteq \{t \in \mathbb{R} : |f(t)-\lambda| < \delta\}$. Так как функция $(0,+\infty) \ni \delta \to \varkappa_W(T(\lambda;\delta)) \in [0,1]$ не убывает, то существует число $b_W(f;\lambda) \geqslant 0$ такое, что $\varkappa_W(T(\lambda;\delta)) \downarrow b_W(f;\lambda)$ при $\delta \to +0$. Выберем произвольные числа $\beta,\gamma > 0$. Пусть λ_j , $j = 1,\dots,N$, — (какие-либо) разные числа из отрезка $[-\beta,\beta]$, для которых $b_W(f;\lambda_j) \geqslant \gamma$. Положим $\varepsilon = \min\{\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{4}\min\limits_{i\neq j}|\lambda_i-\lambda_j|\,\}$ и определим функцию

$$\mathbb{R} \ni t \to G(t) = \begin{cases} 1\,, & \text{если } |t| \leqslant \varepsilon\,, \\ 2-\varepsilon^{-1}|t|\,, & \text{если } \varepsilon < |t| \leqslant 2\varepsilon\,, \\ 0\,, & \text{если } |t| > 2\varepsilon\,. \end{cases}$$

Из леммы 1.1 следует, что $g_j(.) \doteq G(f(.)-\lambda_j) \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $j = 1,\dots,N$. Поэтому существует среднее значение $M(g_j)$ и $\gamma \leqslant b_W(f;\lambda_j) \leqslant \varkappa_W(T(\lambda_j;\varepsilon)) \leqslant M(g_j)$, $j = 1,\dots,N$. С другой стороны, $\sum\limits_{j=1}^{N} M(g_j) \leqslant \varkappa_W(\{t \in \mathbb{R} : |f(t)| \leqslant \beta+1\}) \leqslant 1$. Следовательно, $N \leqslant \gamma^{-1}$. Выбирая теперь числа $\beta = n$ и $\gamma = n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, получаем, что на каждом отрезке $[-n,n]$ существует не более n чисел λ , для которых $b_W(f;\lambda) \geqslant n^{-1}$. Отсюда следует, что существует не более чем счетное множество чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых $b_W(f;\lambda) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.2. Пусть Y_f — множество чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых выполняется неравенство (2.2).

В силу леммы 2.3 это множество не более чем счетно. Из леммы 1.3 следует, что для всех $\lambda \in \mathbb{R}\backslash Y_f$ справедливо включение $\operatorname{sgn}(f(.)-\lambda) \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod}\operatorname{sgn}(f(.)-\lambda) \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$. Более того, $\kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : f(t) = \lambda\}) = 0$. Определим функцию $\mathcal{F}(t) = 1 - |t-1|$, если $0 \leqslant t \leqslant 2$, и $\mathcal{F}(t) = 0$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0,2]$. Из леммы 1.1 получаем, что $\mathcal{F}(\pm\operatorname{sgn}(f(.)-\lambda)) \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod}\ \mathcal{F}(\pm\operatorname{sgn}(f(.)-\lambda)) \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$. Поэтому

$$\{t \in \mathbb{R} : f(t) > \lambda\} \in W(\mathbb{R}),\ \operatorname{Mod}\{t \in \mathbb{R} : f(t) > \lambda\} \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$$

и $\{t \in \mathbb{R} : f(t) < \lambda\} \in W(\mathbb{R})$, $\operatorname{Mod}\{t \in \mathbb{R} : f(t) < \lambda\} \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $x_j \in \mathcal{U}$, $j \in \mathbb{N}$, — точки, определяемые в следствии 1.2 для функции $f \in W(\mathbb{R},\mathcal{U})$. Для всех $j \in \mathbb{N}$ в силу следствия 1.1 имеем $\rho(f(.),x_j) \in W(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod}\rho(f(.),x_j) \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$. Из теоремы 2.2 получаем, что можно выбрать числа $\varepsilon_j \in [\varepsilon/2,\varepsilon]$, $j \in \mathbb{N}$, так, что $T_j' \doteq \{t \in \mathbb{R} : \rho(f(t),x_j) < \varepsilon_j\} \in W(\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod} T_j' \subseteq \operatorname{Mod}\rho(f(.),x_j) \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$. Положим $T_1 = T_1'$ и $T_j = T_j' \setminus \bigcup\limits_{k<j} T_k'$ при $j \geqslant 2$. Множества T_j, $j \in \mathbb{N}$, не пересекаются и $\bigcup\limits_{j\leqslant N} T_j = \bigcup\limits_{j\leqslant N} T_j'$ для всех $N \in \mathbb{N}$. В силу леммы 2.1 $T_j \in W(\mathbb{R})$, $\operatorname{Mod} T_j \subseteq \operatorname{Mod} f$. Кроме того, $\rho(f(t),x_j) < \varepsilon_j \leqslant \varepsilon$ для всех $t \in T_j$, $j \in \mathbb{N}$, и для каждого $N \in \mathbb{N}$ и п.в. $t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant N} T_j$ имеем $\rho(f(t),x_j) \geqslant \varepsilon_j \geqslant \varepsilon/2$ для всех $j=1,\dots,N$. Следовательно (см. следствие 1.2), $\operatorname{mes}\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} T_j = 0$ и (см. (1.2) при $\delta = \varepsilon/2$) $\kappa_W(\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant N} T_j) \to 0$ при $N \to +\infty$, то есть $\{T_j\} \in \mathfrak{M}^{(W)}(\operatorname{Mod} f)$.

3. Равномерная аппроксимация почти периодических по Безиковичу функций

В параграфе приведены утверждения для п.п. по Безиковичу функций, аналогичные соответствующим утверждениям из предыдущего параграфа. Приведенные в § 2 доказательства непосредственно переносятся и на случай п.п. по Безиковичу функций, при этом при доказательстве нужно использовать те же самые леммы из $\S\,1$, утверждения которых сформулированы параллельно как для п.п. по Вейлю, так и для п.п. по Безиковичу функций.

Обозначим через $B(\mathbb{R})$ множество измеримых подмножеств $T \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\chi_T \in B_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Для множеств $T \in B(\mathbb{R})$ (как и для множеств $T \in W(\mathbb{R})$) положим $\operatorname{Mod} T \doteq \operatorname{Mod} \chi_T$.

Л е м м а 3.1. *Если* $T_1, T_2 \in B(\mathbb{R})$, *то* $T_1 \cup T_2 \in B(\mathbb{R})$, $T_1 \cap T_2 \in B(\mathbb{R})$, $T_1 \backslash T_2 \in B(\mathbb{R})$ *и модули* $\operatorname{Mod} T_1 \cup T_2$, $\operatorname{Mod} T_1 \cap T_2$ *и* $\operatorname{Mod} T_1 \backslash T_2$ *содержатся в* $\operatorname{Mod} T_1 + \operatorname{Mod} T_2$.

Пусть $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ — произвольный модуль и $\mathfrak{M}^{(B)}(\Lambda)$ — совокупность последовательностей $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ непересекающихся множеств $T_j \in B(\mathbb{R})$ таких, что $\operatorname{Mod} T_j \subseteq \Lambda$, $\operatorname{mes} \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} T_j = 0$ и $\kappa_B(\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n} T_j) \to 0$ при $n \to +\infty$.

Если $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}^{(B)}(\Lambda)$ и $J \subseteq \mathbb{N}$, $J \neq \varnothing$, то $\bigcup\limits_{j\in J} T_j \in B(\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod} \bigcup\limits_{j\in J} T_j \subseteq \sum\limits_{j\in J} \operatorname{Mod} T_j$. Если, кроме того, $\kappa_B(T_j) = 0$ для всех $j \in J$, то также $\kappa_B(\bigcup\limits_{j\in J} T_j) = 0$.

Следующая лемма аналогична лемме 2.2.

Л е м м а 3.2. *Пусть* $\{T_j\} \in \mathfrak{M}^{(B)}(\mathbb{R})$ *и* $f_j \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $j \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\sum\limits_j f_j(.)\chi_{T_j}(.) \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *и*

$$\operatorname{Mod} \sum_j f_j(.)\chi_{T_j}(.) \subseteq \sum_j \operatorname{Mod} f_j + \sum_j \operatorname{Mod} T_j . \tag{3.1}$$

В условиях леммы 3.2 для индексов $j : \kappa_B(T_j) = 0$ можно выбирать произвольные функции $f_j \in M(\mathbb{R},\mathcal{U})$ (и при суммировании в правой части (3.1) эти индексы исключаются).

Функция $\sum_j x_j \chi_{T_j}(.)$, где $x_j \in \mathcal{U}$, $j \in \mathbb{N}$, и $\{T_j\} \in \mathfrak{M}^{(B)}(\mathbb{R})$, называется *элементарной п.п. по Безиковичу* функцией.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть* $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется элементарная п.п. по Безиковичу функция* $f_\varepsilon(.) = \sum_j x_j \chi_{T_j}(.)$ *такая, что* $\{T_j\} \in \mathfrak{M}^{(B)}(\mathrm{Mod}\, f)$ *и*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} \rho(f(t), f_\varepsilon(t)) < \varepsilon\,.$$

Теорема 3.1 доказывается аналогично теореме 2.1. При этом при доказательстве используется теорема 3.2, доказательство которой в свою очередь аналогично доказательству теоремы 2.2 и опирается на лемму 3.3

Т е о р е м а 3.2. *Пусть* $f \in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Тогда найдется не более чем счетное множество* $Y_f' \subset \mathbb{R}$ *такое, что для всех* $\lambda \in \mathbb{R}\setminus Y_f'$ *имеем* $\kappa_B(\{t \in \mathbb{R} : f(t) = \lambda\}) = 0$,

$$\{t \in \mathbb{R} : f(t) > \lambda\} \in B(\mathbb{R})\,, \qquad \{t \in \mathbb{R} : f(t) < \lambda\} \in B(\mathbb{R})\,,$$

$$\mathrm{Mod}\,\{t \in \mathbb{R} : f(t) > \lambda\} \subseteq \mathrm{Mod}\, f\,,\ \ \mathrm{Mod}\,\{t \in \mathbb{R} : f(t) < \lambda\} \subseteq \mathrm{Mod}\, f.$$

Л е м м а 3.3. *Пусть* $f \in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Тогда множество чисел* $\lambda \in \mathbb{R}$, *для которых* $\lim\limits_{\delta\to+0} \kappa_B(\{t \in \mathbb{R} : |f(t) - \lambda| < \delta\}) > 0$, *не более чем счетно.*

Список литературы

1. Данилов Л.И. О почти периодических по Вейлю сечениях многозначных отображений. Ижевск: ФТИ УрО РАН, 2004. 104 с. Деп. в ВИНИТИ 09.06.04, Ѓ 981–В2004.
2. Danilov L.I. On Weyl almost periodic selections of multivalued maps // J. Math. Anal. Appl. 2006. V. 316, Ѓ 1. P. 110–127.
3. Danilov L.I. On Besicovitch almost periodic selections of multivalued maps. Preprint arXiv: math.CA/0503293, 2005.
4. Andres J. Bounded, almost-periodic and periodic solutions of quasilinear differential inclusions // Differential Inclusions and Optimal Control / ed. by J. Andres, L. Górniewicz and P. Nistri, LN in Nonlin. Anal. 1998. V. 2. P. 35–50.
5. Andres J., Bersani A.M., Leśniak K. On some almost-periodicity problems in various metrics//Acta Appl. Math. 2001. V. 65, Ѓ 1–3. P. 35–57.

6. Долбилов А.М., Шнейберг И.Я. Почти периодические многозначные отображения и их сечения // Сиб. матем. журн. 1991. Т. 32, Ѓ 2. С. 172–175.
7. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps // Studia Math. 1983. V. 76, Ѓ 2. P. 163–174.
8. Данилов Л.И. Почти периодические сечения многозначных отображений // Известия отдела математики и информатики УдГУ. Ижевск, 1993. Вып. 1. С. 16–78.
9. Данилов Л.И. О многозначных почти периодических отображениях, зависящих от параметра//Вестн. Удм. ун-та. 1994. Ѓ 2. С. 29–44.
10. Данилов Л.И. Мерозначные почти периодические функции и почти периодические сечения многозначных отображений // Матем. сборник. 1997. Т. 188, Ѓ 10. С. 3–24.
11. Данилов Л.И. О почти периодических многозначных отображениях // Матем. заметки. 2000. Т. 68, Ѓ 1. С. 82–90.
12. Данилов Л.И. Мерозначные почти периодические функции // Матем. заметки. 1997. Т. 61, Ѓ 1. С. 57–68.
13. Данилов Л.И. О почти периодических мерозначных функциях // Матем. сборник. 2000. Т. 191, Ѓ 12. С. 27–50.
14. Данилов Л.И. О суперпозиции почти периодических многозначных отображений и функций. Ижевск: ФТИ УрО РАН, 1995. 31 с. Деп. в ВИНИТИ 31.01.95, Ѓ 262–В95.
15. Данилов Л.И. О равномерной аппроксимации почти периодических по Степанову функций//Изв. вузов. Математика. 1998. Ѓ5. С.10-18.
16. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953.
17. Marcinkiewicz J. Une remarque sur les espaces de M. Besicowitch // C. R. Acad. Sc. Paris. 1939. V. 208. P. 157–159.
18. Danilov L.I. On equi-Weyl almost periodic selections of multivalued maps. Preprint arXiv: math.CA/0310010, 2003.
19. Данилов Л.И. Равномерная аппроксимация почти периодических по Степанову функций и почти периодические сечения многозначных отображений. Ижевск: ФТИ УрО РАН, 2003. 70 с. Деп. в ВИНИТИ 21.02.03, Ѓ 354–В2003.
20. Данилов Л.И. Равномерная аппроксимация почти периодических по Степанову функций // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2004. Вып. 1 (29). С. 33–48.