УДК 517.958 + 517.984.56

© **Л.И. Данилов**
danilov@otf.pti.udm.ru

ОБ АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ СПЕКТРА ТРЕХМЕРНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Ключевые слова: оператор Дирака, абсолютно непрерывный спектр, периодические электрический и магнитный потенциалы.

Abstract. We prove the absolute continuity of the spectrum of periodic Dirac operator $\sum\limits_{j=1}^{3} \hat{\alpha}_j\bigl(-i\,\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j\bigr) + \hat{\mathcal{V}}^{(0)} + \hat{\mathcal{V}}^{(1)}$, $x \in \mathbb{R}^3$, with period lattice $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ if $A \in L^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$, $\|\,|A|\,\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < \max\limits_{\gamma\in\Lambda\setminus\{0\}} \pi|\gamma|^{-1}$, the Hermitian matrix-valued functions $\hat{\mathcal{V}}^{(s)}$ belong to Zigmund class $L^3\ln^{2+\delta}L(K)$ for some $\delta > 0$, where K is the unit cell of the lattice Λ, and $\hat{\mathcal{V}}^{(s)}\hat{\alpha}_j = (-1)^s\hat{\alpha}_j\hat{\mathcal{V}}^{(s)}$, $s = 0, 1$, for all anticommuting Hermitian matrices $\hat{\alpha}_j$, $\hat{\alpha}_j^2 = \hat{I}$, $j = 1, 2, 3$.

Введение

Пусть $\mathcal{M}_M$, $M\in\mathbb{N}$, — пространство комплексных матриц размера $M \times M$, $\hat{\alpha}_j \in \mathcal{M}_M$, $j = 1, \ldots, n$ ($n \geqslant 2$), — эрмитовы матрицы, удовлетворяющие антикоммутационным соотношениям $\hat{\alpha}_i\hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j\hat{\alpha}_i = 2\delta_{ij}\hat{I}$, $\hat{I}\in\mathcal{M}_M$ — единичная матрица, δ_{ij} — символ Кронекера. Рассмотрим n-мерный периодический оператор Дирака

$$\hat{\mathcal{D}} + \hat{\mathcal{W}} = -i\sum_{j=1}^{n} \hat{\alpha}_j\,\frac{\partial}{\partial x_j} + \hat{\mathcal{W}}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.1}$$

где эрмитова матричнозначная функция $\mathcal{W} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_M$ предполагается периодической с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Частным случаем оператора (0.1) является оператор

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\mathcal{D}}(A,\hat{\mathcal{V}}) = \sum_{j=1}^{n}\hat{\alpha}_j\bigl(-i\,\tfrac{\partial}{\partial x_j} - A_j\bigr) + \hat{\mathcal{V}}\,,\\ &\hat{\mathcal{V}} = \hat{\mathcal{V}}^{(0)} + \hat{\mathcal{V}}^{(1)},\end{aligned}\right\}\tag{0.2}$$

где для эрмитовых $M\times M$-матричнозначных функций $\hat{\mathcal{V}}^{(s)}$ при $s=0,1$ выполняются условия

$$\hat{\mathcal{V}}^{(s)}(x)\hat{\alpha}_j = (-1)^s\hat{\alpha}_j\hat{\mathcal{V}}^{(s)}(x),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad j=1,\dots,n\,.\tag{0.3}$$

При этом вещественнозначные функции A_j (компоненты магнитного потенциала A) и матричнозначные функции $\hat{\mathcal{V}}^{(s)}$ предполагаются периодическими с решеткой периодов Λ. Условиям (0.3) удовлетворяют матричнозначные функции

$$\hat{\mathcal{V}}^{(0)} = \mathcal{V}\hat{I},\quad \hat{\mathcal{V}}^{(1)} = m\hat{\beta}\,,\tag{0.4}$$

если $\mathcal{V}$ — периодическая с решеткой периодов Λ вещественнозначная функция (электрический потенциал), $m\in\mathbb{R}$ и $\hat{\beta}\in\mathcal{M}_M$ — эрмитова матрица, для которой $\hat{\beta}^2=\hat{I}$ и $\hat{\beta}\hat{\alpha}_j = -\hat{\alpha}_j\hat{\beta}$ для всех $j=1,\dots,n$.

Координаты в $\mathbb{R}^n$ задаются относительно некоторого ортогонального базиса $\{\mathcal{E}_j\}$ ($|\mathcal{E}_j|=1$, $j=1,\dots,n$; $|\,.\,|$ и $(\,.\,,.\,)$ — длина и скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^n$), $A_j(x) = (A(x),\mathcal{E}_j)$, $x\in\mathbb{R}^n$. Через $\{E_j\}$ обозначаем базис решетки $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$, а через $K=\bigl\{x=\sum_{j=1}^{n}\xi_jE_j : 0\leqslant\xi_j<1,\ j=1,\dots,n\bigr\}$ — элементарную ячейку решетки Λ.

В пространствах $\mathbb{C}^M$, $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$ и $L^2(K;\mathbb{C}^M)$ обычным образом вводятся скалярные произведения и нормы (которые далее, как правило, будут обозначаться без указания самих пространств). На линейном пространстве $\mathcal{M}_M$ определяется норма

$$\|\hat{B}\| = \max_{u\in\mathbb{C}^M:\,\|u\|=1}\|\hat{B}u\|,\quad \hat{B}\in\mathcal{M}_M\,.$$

Нулевые и единичные матрицы и операторы обозначаются через $\hat{0}$ и $\hat{I}$ соответственно (также без указания самих пространств).

Оператор $\hat{\mathcal{D}} = -i \sum\limits_{j=1}^{n} \hat{\alpha}_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ действует в $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$ и имеет область определения $D(\hat{\mathcal{D}}) = H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$, состоящую из вектор-функций $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$, все компоненты ψ_q, $q = 1,\dots,M$, которых принадлежат классу Соболева

$$H^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) = \bigl\{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n) : \tfrac{\partial\varphi}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^n),\ j = 1,\dots,n\bigr\}.$$

При $a \geqslant 0$ обозначим через $\mathbb{L}_M(n,\Lambda;a)$ множество измеримых периодических с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ матричнозначных функций $\hat{\mathcal{W}} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_M$, имеющих относительную грань a по отношению к оператору $\hat{\mathcal{D}}$, то есть таких, что $\hat{\mathcal{W}}\psi \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$ для всех $\psi \in H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует число $C_a(\varepsilon,\hat{\mathcal{W}}) > 0$ такое, что $\|\hat{\mathcal{W}}\psi\| \leqslant (a+\varepsilon)\|\hat{\mathcal{D}}\psi\| + C_a(\varepsilon,\hat{\mathcal{W}})\|\psi\|$ для всех вектор-функций $\psi \in H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$. Множеству $\mathbb{L}_M(n,\Lambda;0)$ (при $a = 0$) принадлежат периодические с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ матричнозначные функции $\hat{\mathcal{W}} \in L^n(K;\mathcal{M}_M)$ при $n \geqslant 3$ и $\hat{\mathcal{W}} \in L^p(K;\mathcal{M}_M)$ при $n = 2$ и $p > 2$.

Если $\hat{\mathcal{W}} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_M$ — эрмитова матричнозначная функция и $\hat{\mathcal{W}} \in \mathbb{L}_M(n,\Lambda;a)$ для некоторого $a \in [0,1)$, то $\hat{\mathcal{D}} + \hat{\mathcal{W}}$ — самосопряженный оператор с областью определения $D(\hat{\mathcal{D}} + \hat{\mathcal{W}}) = D(\hat{\mathcal{D}}) = H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M) \subset L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$. При этом сингулярный спектр оператора $\hat{\mathcal{D}} + \hat{\mathcal{W}}$ пуст, а собственные значения, если они существуют, имеют бесконечную кратность и образуют дискретное множество (без конечных предельных точек) [1] (см. также [2; 3]).

Важной задачей при исследовании спектра периодического оператора Дирака (0.1) является нахождение условий на матричнозначную функцию $\hat{\mathcal{W}} \in \mathbb{L}_M(n,\Lambda;a)$, $a \in [0,1)$, обеспечивающих отсутствие собственных значений в спектре оператора $\hat{\mathcal{D}} + \hat{\mathcal{W}}$ и, следовательно, его абсолютную непрерывность.

Вопросу об абсолютной непрерывности спектра периодических операторов математической физики посвящены обзорные статьи [4; 5]. Утверждения о периодическом операторе Шредингера приведены в [6–18] и в ссылках из этих работ.

Первые результаты об абсолютной непрерывности спектра периодического оператора Дирака были получены в [19; 20; 21]. В [21; 22] при всех $n \geqslant 2$ доказана абсолютная непрерывность спектра оператора (0.2), (0.4), если $\mathcal{V} \in C(\mathbb{R}^n)$, $A \in L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ и

$$\| \, |A| \, \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < \max_{\gamma \in \Lambda \backslash \{0\}} \frac{\pi}{|\gamma|} \, . \tag{0.5}$$

В последующих работах ослаблялись ограничения на периодический электрический потенциал $\mathcal{V}$. Спектр оператора (0.2), (0.4) абсолютно непрерывен, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) $n = 2$, $\mathcal{V} \in L^q(K)$, $q > 2$, и для магнитного потенциала $A \in L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ справедлива оценка (0.5) [23];

2) $n \geqslant 3$, $A \equiv 0$ и $\sum\limits_N |\mathcal{V}_N|^p < +\infty$, где $\mathcal{V}_N$ — коэффициенты Фурье функции $\mathcal{V}$, $p \in [1, q_n(q_n-1)^{-1})$ и числа $q_n > n$ выбираются как наибольшие корни алгебраических уравнений

$$q^4-(3n^2-4n-1)q^3+2(4n^2-6n-3)q^2-(9n^2-16n-4)q-4n(n-2) = 0\,,$$

$q_3 \simeq 11.645$, $n^{-2}q_n \to 3$ при $n \to +\infty$ [1] (см. также [20; 22; 23]);

3) $n = 3$, $\mathcal{V} \in L^q(K)$, $q > 3$, и для магнитного потенциала $A \in L^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ выполняется оценка (0.5) [24];

4) $n \geqslant 2$, $\mathcal{V} \in L^2(K)$, $A \in L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ и существует такой вектор $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$, что $\| \, |A| \, \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \pi|\gamma|^{-1}$ и отображение

$$\mathbb{R}^n \ni x \to \big\{[0,1] \ni t \to \mathcal{V}(x+t\gamma)\big\} \in L^2([0,1])$$

непрерывно (в этом случае $\mathcal{V}\hat{I} \in \mathbb{L}_M(n,\Lambda;0)$) [25].

При $n = 2$ можно считать, что $M = 2$, и в качестве матриц $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$ и $\hat{\beta}$ выбирать соответственно матрицы Паули

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Периодический оператор Дирака (0.2) при $n = 2$ с матричнозначными функциями

$$\hat{\mathcal{V}}^{(0)} = \mathcal{V}\hat{I}, \quad \hat{\mathcal{V}}^{(1)} = \mathcal{V}_1\hat{\beta} \tag{0.6}$$

и неограниченным магнитным потенциалом A исследовался в [26; 27]. В [27] доказана абсолютная непрерывность спектра оператора (0.2), (0.6) при $\mathcal{V}, \mathcal{V}_1 \in L^q(K)$ и $A \in L^q(K; \mathbb{R}^2)$, $q > 2$. Аналогичный результат приведен в [26] (предполагалось, однако, что $\mathcal{V}_1 \equiv m = \mathrm{const}$, но без каких-либо существенных изменений доказательства можно рассматривать функции $\mathcal{V}_1 \in L^q(K)$, $q > 2$). В [26] применялись методы работы [23]. Более общие условия на $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}_1$ и A приведены в [28]: достаточно, чтобы функции $\mathcal{V}^2 \ln(1 + |\mathcal{V}|)$, $\mathcal{V}_1^2 \ln(1 + |\mathcal{V}_1|)$ и $|A|^2 \ln^q(1 + |A|)$ для некоторого $q > 1$ принадлежали пространству $L^1(K)$.

Наиболее сильные результаты для двумерного периодического оператора Дирака получены в [17; 29]. В [29] доказано отсутствие собственных значений в спектре обобщенного двумерного периодического оператора Дирака

$$-i \sum_{j=1}^{2} (h_{j1}\hat{\sigma}_1 + h_{j2}\hat{\sigma}_2) \frac{\partial}{\partial x_j} + \hat{\mathcal{W}}, \tag{0.7}$$

где $h_{jl} \in L^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $j, l = 1, 2$, — периодические с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ функции, для которых $0 < \varepsilon \leqslant h_{11}(x)h_{22}(x) - h_{12}(x)h_{21}(x)$ при почти всех $x \in \mathbb{R}^2$, и $\mathcal{W} \in \mathbb{L}_2(2, \Lambda; 0)$. Если оператор (0.7) самосопряжен, то его спектр абсолютно непрерывен. Частные случаи оператора (0.7) рассматривались также в [7; 30; 31] (в [30] налагались те же условия на функции h_{jl}, что и в [29], но предполагалось, что $\mathcal{W} \in L^p(K; \mathcal{M}_2)$, $p > 2$).

В [27] при $n \geqslant 3$ доказана абсолютная непрерывность спектра оператора (0.2), (0.6) при $\mathcal{V}, \mathcal{V}_1 \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ и $A \in C^{2n+3}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. При доказательстве использовались результаты А.В. Соболева [6], установившего абсолютную непрерывность спектра оператора Шредингера с периодическим магнитным потенциалом $A \in C^{2n+3}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Последнее условие было ослаблено П. Кучментом и С. Левендорским [4]: $A \in H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $2q > 3n - 2$, что позволяет соответствующим образом ослабить ограничение на магнитный потенциал A и для периодического оператора Дирака [5; 27].

Пусть $\mathfrak{M}_h$, $h > 0$, — множество борелевских четных знакопеременных мер (зарядов) μ на $\mathbb{R}$ (с конечной полной вариацией), для которых $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{ipt}\, d\mu(t) = 1$ при всех $p \in (-h, h)$. В [32] при $n \geqslant 3$ приведено доказательство абсолютной непрерывности спектра периодического (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$) оператора (0.2), (0.3), если выполнены условия:

1) $\hat{\mathcal{V}}^{(s)} \in C(\mathbb{R}^n; \mathcal{M}_M)$, $s = 0, 1$;

2) $A \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ и существуют такие вектор $\gamma \in \Lambda \backslash \{0\}$ и мера $\mu \in \mathfrak{M}_h$, $h > 0$, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и всех единичных векторов $e \in \mathbb{R}^n : (e, \gamma) = 0$ справедливо неравенство

$$\Big| A_0 - \int\limits_{\mathbb{R}} d\mu(t) \int\limits_0^1 A(x - \xi\gamma - te)\, d\xi \,\Big| < \frac{\pi}{|\gamma|}\,, \tag{0.8}$$

где $A_0 = v^{-1}(K) \int\limits_K A(x)\, d^n x$, $v(K)$ — объем элементарной ячейки K решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$.

Для периодического магнитного потенциала $A \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ условие (0.8) (при выборе некоторых вектора $\gamma \in \Lambda \backslash \{0\}$ и меры $\mu \in \mathfrak{M}_h$, $h > 0$) выполняется, если $A \in H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $2q > n - 2$, а также в случае $\sum\limits_N |A_N|_{\mathbb{C}^n} < +\infty$, где A_N — коэффициенты Фурье функции A [32; 33].

При $n = 3$ можно считать, что $M = 4$, и положить

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{I} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{I} \end{pmatrix}, \ \hat{\alpha}_j = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{\sigma}_j \\ \hat{\sigma}_j & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где $\hat{0}$ и $\hat{I}$ — нулевая и единичная 2×2-матрицы и $\hat{\sigma}_j$ — матрицы Паули. В этом случае матричнозначные функции $\hat{\mathcal{V}}^{(s)}$, $s = 0, 1$, удовлетворяющие условиям (0.3), можно выбрать в виде $\hat{\mathcal{V}}^{(0)} = \mathcal{V}_1^{(0)} \hat{I} - i \mathcal{V}_2^{(0)} \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_3$, $\hat{\mathcal{V}}^{(1)} = \mathcal{V}_1^{(1)} \hat{\beta} + \mathcal{V}_2^{(1)} \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_3 \hat{\beta}$, где

$$-i\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\hat{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{I} \\ \hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\hat{\alpha}_3\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{0} & -i\hat{I} \\ i\hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix}$$

и $\mathcal{V}_q^{(s)}$, $q = 1, 2$, — периодические (с решеткой периодов Λ) вещественнозначные функции.

Основным результатом настоящей работы является

Т е о р е м а 0.1. *Спектр периодического оператора* (0.2), (0.3) *при* $n=3$ *абсолютно непрерывен, если для магнитного потенциала* $A\in L^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ *выполнено условие* (0.5) *и для некоторого* $\delta>0$

$$\int\limits_{x\in K\colon\,\|\hat{\mathcal{V}}(x)\|\geqslant 1}\|\hat{\mathcal{V}}(x)\|^3\ln^{2+\delta}\|\hat{\mathcal{V}}(x)\|\,d^3x<+\infty\,.$$

Утверждение теоремы 0.1 следует из теоремы 1.1, сформулированной и доказанной в следующем параграфе.

1. Доказательство теоремы 0.1

Пусть $\{E_j\}$ — базис решетки $\Lambda\subset\mathbb{R}^3$. Базис обратной решетки Λ^* образуют векторы E_i^*, $i=1,2,3$, удовлетворяющие условиям $(E_i^*,E_j)=\delta_{ij}$; K и K^* — элементарные ячейки решеток Λ и Λ^* соответственно, $v(K)$ и $v(K^*)$ — объемы элементарных ячеек K и K^*, $d(K^*)$ — диаметр ячейки K^* (при фиксированном базисе $\{E_i^*\}$ решетки Λ^*).

Пусть $e=(e_1,e_2,e_3)$ — единичный вектор в $\mathbb{R}^3$, $e_j=(e,\mathcal{E}_j)$, $k\in\mathbb{R}^3$, $k_j=(k,\mathcal{E}_j)$, $\varkappa\geqslant 0$ ($\{\mathcal{E}_j\}$ — фиксированный ортогональный базис в $\mathbb{R}^3$). Положим

$$\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)=-i\sum_{j=1}^{3}\hat{\alpha}_j\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{3}(k_j+i\varkappa e_j)\hat{\alpha}_j\,.$$

Оператор $\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)$ действует в $L^2(K;\mathbb{C}^M)$ и имеет область определения $D(\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e))=\tilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$, состоящую из вектор-функций $\psi\in L^2(K;\mathbb{C}^M)$, все компоненты которых, периодически продолженные с элементарной ячейки K на все пространство $\mathbb{R}^3$, принадлежат классу Соболева $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Для функций A и $\hat{\mathcal{V}}$, удовлетворяющих условиям теоремы 0.1, обозначим $\hat{\mathcal{W}}=-\sum\limits_{j=1}^{3}A_j\hat{\alpha}_j+\hat{\mathcal{V}}$. Так как $\hat{\mathcal{V}}\in L^3(K;\mathcal{M}_M)$, то для любой вектор-функции $\varphi\in\tilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$ имеет место включение $\hat{\mathcal{V}}\varphi\in L^2(K;\mathbb{C}^M)$ и для любого $\varepsilon>0$ существует число

$C(\varepsilon, \hat{\mathcal{V}}) > 0$ такое, что для всех векторов $k \in \mathbb{R}^3$ и всех вектор-функций $\varphi \in \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^M)$ справедливо неравенство

$$\|\hat{\mathcal{V}}\varphi\| \leqslant \varepsilon \, \|\hat{\mathcal{D}}(k)\varphi\| + C(\varepsilon, \hat{\mathcal{V}})\|\varphi\| \tag{1.1}$$

(где $\hat{\mathcal{D}}(k)$ — это оператор $\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)$ при $\varkappa = 0$). Отсюда, в частности, вытекает, что операторы $\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\hat{\mathcal{W}}$ (с областью определения $D(\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\hat{\mathcal{W}}) = \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^M) \subset L^2(K; \mathbb{C}^M)$) при всех $k+i\varkappa e \in \mathbb{C}^2$ имеют компактную резольвенту. При этом $\hat{\mathcal{D}}(k)+\hat{\mathcal{W}}$, $k \in \mathbb{R}^3$, — самосопряженные операторы с дискретным спектром. Пусть $\lambda_\nu(k)$, $\nu \in \mathbb{Z}$, — упорядоченные по возрастанию (с учетом кратности) собственные значения операторов $\hat{\mathcal{D}}(k) + \hat{\mathcal{W}}$. Нумерацию собственных значений при разных k можно выбрать так, чтобы функции $\mathbb{R}^3 \ni k \to \lambda_\nu(k)$ были непрерывными.

Оператор $\hat{\mathcal{D}}(A, \hat{\mathcal{V}})$ (0.2) унитарно эквивалентен прямому интегралу

$$\int_{2\pi K^*}^{\oplus} (\hat{\mathcal{D}}(k) + \hat{\mathcal{W}}) \, \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \, v(K^*)} \ .$$

Вектор $k \in 2\pi K^* \subset \mathbb{R}^3$ называется квазиимпульсом. Унитарная эквивалентность устанавливается с помощью преобразования Гельфанда [34; 35]. Спектр оператора $\hat{\mathcal{D}}(A, \mathcal{V})$ совпадает с объединением зон $\{\lambda_\nu(k) : k \in 2\pi K^*\}$, $\nu \in \mathbb{Z}$.

Так как в спектре оператора $\hat{\mathcal{D}}(A, \hat{\mathcal{V}})$ (0.2) нет сингулярной составляющей [1], то для доказательства теоремы 0.1 достаточно установить отсутствие в его спектре собственных значений (бесконечной кратности). С другой стороны, если λ — собственное значение оператора $\hat{\mathcal{D}}(A, \hat{\mathcal{V}})$, то λ — собственное значение операторов $\hat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \hat{\mathcal{W}}$ при всех $k + i\varkappa e \in \mathbb{C}^2$ (см. [36; 4]). Поэтому теорема 0.1 следует из теоремы 1.1.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть функции A и $\hat{\mathcal{V}}$ удовлетворяют условиям теоремы* 0.1. *Выберем вектор $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$, для которого $|\gamma| = \min\{|\gamma'| : \gamma' \in \Lambda\backslash\{0\}\}$; $e \doteq |\gamma|^{-1}\gamma$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ найдется число $\varkappa = \varkappa(\lambda) \geqslant 0$ такое, что для каждого вектора $k \in \mathbb{R}^3 : (k, \gamma) = \pi$ число λ не является собственным значением оператора $\hat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \hat{\mathcal{W}}$.*

Через $\varphi_N = v^{-1}(K)\int\limits_K \varphi(x)\, e^{-2\pi i\,(N,x)}\, d^3x$, $N \in \Lambda^*$, обозначим коэффициенты Фурье функций $\varphi \in L^1(K;U)$, где $U = \mathbb{C}^M$ или $\mathcal{M}_M$. Для любой вектор-функции $\varphi \in \tilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$ имеем

$$\hat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e)\varphi = \sum_{N\,\in\,\Lambda^*} \hat{\mathcal{D}}_N(k;\varkappa)\,\varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)},$$

где $\hat{\mathcal{D}}_N(k;\varkappa) = \sum\limits_{j=1}^{3}(k_j + 2\pi N_j + i\varkappa e_j)\,\hat{\alpha}_j$, $N_j = (N,\mathcal{E}_j)$, $j = 1,2,3$.

Для векторов $y \in \mathbb{R}^3$ обозначим $y_{\|} = (y,e)e$, $y_\perp = y - (y,e)e$. Положим $G_N^{\pm}(k;\varkappa) \doteq \bigl(|k_{\|} + 2\pi N_{\|}|^2 + (\varkappa \pm |k_\perp + 2\pi N_\perp|)^2\bigr)^{\frac{1}{2}}$, $N \in \Lambda^*$; $G_N^+(k;\varkappa) \geqslant G_N^-(k;\varkappa)$, $G_N^+(k;\varkappa) \geqslant \varkappa$. Будем использовать также сокращенное обозначение $G_N(k;\varkappa) \doteq G_N^-(k;\varkappa)$.

Фиксируем вектор $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$. В дальнейшем считаем, что $e = |\gamma|^{-1}\gamma$. Если $k \in \mathbb{R}^3 : (k,\gamma) = \pi$, то $G_N(k;\varkappa) \geqslant \pi|\gamma|^{-1}$ для всех $N \in \Lambda^*$ (и всех $\varkappa \geqslant 0$).

Для любых $k \in \mathbb{R}^3$, $\varkappa \geqslant 0$, $N \in \Lambda^*$ и всех $u \in \mathbb{C}^M$ имеем $G_N(k;\varkappa)\,\|u\| \leqslant \|\hat{\mathcal{D}}_N(k;\varkappa)u\| \leqslant G_N^+(k;\varkappa)\,\|u\|$. Следовательно, для любой вектор-функции $\varphi \in \tilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$ имеют место оценки

$$v(K)\sum_{N\,\in\,\Lambda^*} G_N^2(k;\varkappa)\,\|\varphi_N\|^2 \leqslant \|\hat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e)\varphi\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant v(K)\sum_{N\,\in\,\Lambda^*} (G_N^+(k;\varkappa))^2\|\varphi_N\|^2.$$

В случае $k \in \mathbb{R}^3 : (k,\gamma) = \pi$ будем использовать операторы $\hat{G}^{\pm\frac{1}{2}} = \hat{G}^{\pm\frac{1}{2}}(k;\varkappa)$, $\hat{G}_+^{\pm\frac{1}{2}} = \hat{G}_+^{\pm\frac{1}{2}}(k;\varkappa)$ и $\hat{G}^{-1} = \hat{G}^{-1}(k;\varkappa)$ с областями определения $D(\hat{G}^{\frac{1}{2}}) = D(\hat{G}_+^{\frac{1}{2}}) = \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(K;\mathbb{C}^M)$ и $D(\hat{G}^{-\frac{1}{2}}) = D(\hat{G}_+^{-\frac{1}{2}}) = D(\hat{G}^{-1}) = L^2(K;\mathbb{C}^M)$, где $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(K;\mathbb{C}^M)$ — пространство вектор-функций $\varphi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)$, все компоненты которых, периодически (с решеткой периодов Λ) продолженные на все пространство $\mathbb{R}^3$, принадлежат классу Соболева

$H^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Эти операторы ставят в соответствие вектор-функциям φ вектор-функции

$$\hat{G}^{\pm\frac{1}{2}}(k;\varkappa)\varphi = \sum_{N\,\in\,\Lambda^*} G_N^{\pm\frac{1}{2}}(k;\varkappa)\,\varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)}\,,$$

$$\hat{G}_+^{\pm\frac{1}{2}}(k;\varkappa)\varphi = \sum_{N\,\in\,\Lambda^*} (G_N^+(k;\varkappa))^{\pm\frac{1}{2}}\,\varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)}\,,$$

$$\hat{G}^{-1}(k;\varkappa)\varphi = \sum_{N\,\in\,\Lambda^*} G_N^{-1}(k;\varkappa)\,\varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)}\,.$$

Для множеств $\mathcal{O}\subseteq\Lambda^*$ определим в $L^2(K;\mathbb{C}^M)$ ортогональные проекторы $\hat{P}^{\,\mathcal{O}}$: $\hat{P}^{\,\mathcal{O}}\varphi = \sum\limits_{N\,\in\,\mathcal{O}} \varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)}$, $\varphi\in L^2(K;\mathbb{C}^M)$; $\hat{P}^{\,\varnothing} = \hat{0}$ — нулевой оператор.

Положим $\mathcal{P}(e)=\{\lambda e : \lambda\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^3$. Для $y\in\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{P}(e)$ будем использовать обозначение $\tilde{e}(y) = \frac{y-(y,e)e}{|y-(y,e)e|} = \frac{y_\perp}{|y_\perp|} \in S_1(e)$, где $S_1(e) \doteq \{\tilde{e}\in\mathbb{R}^3 : |\,\tilde{e}\,| = 1 \text{ и } (\tilde{e},e)=0\}$. Для любого вектора $\tilde{e}\in S_1(e)$ определим ортогональные проекторы в $\mathbb{C}^M$:

$$\hat{P}_{\tilde{e}}^{\pm} = \tfrac{1}{2}\,\Big(\,\hat{I}\mp i\,\Big(\,\sum_{j=1}^{3} e_j\hat{\alpha}_j\Big)\Big(\,\sum_{j=1}^{3}\tilde{e}_j\hat{\alpha}_j\Big)\,\Big)\,.$$

Пусть $\mathcal{N}(k;e)\doteq\{N\in\Lambda^* : k+2\pi N\in\mathcal{P}(e)\}$, $k\in\mathbb{R}^3$. Обозначим через $\hat{P}^{\,\pm} = \hat{P}^{\,\pm}(k;e)$ ортогональные проекторы в пространстве $L^2(K;\mathbb{C}^M)$, ставящие в соответствие вектор-функциям φ из $L^2(K;\mathbb{C}^M)$ вектор-функции

$$\hat{P}^{\,\pm}(k;e)\varphi = \sum_{N\,\in\,\Lambda^*\backslash\mathcal{N}(k;e)} \hat{P}^{\pm}_{\tilde{e}(k+2\pi N)}\,\varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)}\,;$$

$$\hat{P}^{\,+}(k;e)+\hat{P}^{\,-}(k;e)+\hat{P}^{\,\mathcal{N}(k;e)} = \hat{I}.$$

Т е о р е м а 1.2. *Фиксируем* $\gamma\in\Lambda\backslash\{0\}$, $e=|\gamma|^{-1}\gamma$. *Пусть* $\varepsilon\in(0,1)$, $\Omega>1$. *Предположим, что матричнозначная* *функция* $\hat{\mathcal{V}}:\mathbb{R}^3\to\mathcal{M}_M$ *удовлетворяет условиям теоремы* 0.1. *Тогда найдется такое число* $\varkappa_0>0$, *что для любого* $\varkappa_1\geqslant\varkappa_0$ *существует число* $\varkappa\in[\varkappa_1,\Omega\varkappa_1]$ *такое, что для всех векторов* $k\in\mathbb{R}^3:(k,\gamma)=\pi$ *и всех вектор-функций* $\varphi\in\tilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$ *справедлива оценка*

$$\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}(k;\varkappa)\big(\hat{P}^+(k;e)+\hat{P}^{\mathcal{N}(k;e)}\big)(\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\hat{\mathcal{V}})\varphi\|^2+ \tag{1.2}$$

$$+\|\hat{G}_+^{-\frac{1}{2}}(k;\varkappa)\hat{P}^-(k;e)(\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\hat{\mathcal{V}})\varphi\|^2\geqslant$$

$$\geqslant(1-\varepsilon)\big(\|\hat{G}_+^{\frac{1}{2}}(k;\varkappa)\big(\hat{P}^+(k;e)+\hat{P}^{\mathcal{N}(k;e)}\big)\varphi\|^2+\|\hat{G}^{\frac{1}{2}}(k;\varkappa)\hat{P}^-(k;e)\varphi\|^2\big).$$

Доказательство теоремы 1.2 приведено ниже.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть вектор γ из $\Lambda\backslash\{0\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda=0$ (в противном случае достаточно сделать замену $\hat{\mathcal{V}}-\lambda\hat{I}\to\hat{\mathcal{V}}$, $\hat{\mathcal{V}}^{(0)}-\lambda\hat{I}\to\hat{\mathcal{V}}^{(0)}$). Допустим $0<\varepsilon<1-\pi^{-2}|\gamma|^2\|\,|A|\,\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$. Так как $G_N^+(k;\varkappa)\geqslant G_N(k,\varkappa)$ для всех $N\in\Lambda^*$, то из (1.2) (при всех векторах $k\in\mathbb{R}^3$: $(k,\gamma)=\pi$ и выбираемых в теореме 1.2 числах $\varkappa$) для всех вектор-функций $\varphi\in\tilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$ вытекает оценка

$$\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}(k;\varkappa)(\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\hat{\mathcal{V}})\varphi\|^2\geqslant(1-\varepsilon)\,\|\hat{G}^{\frac{1}{2}}(k;\varkappa)\varphi\|^2\,. \tag{1.3}$$

С другой стороны, так как $G_N(k;\varkappa)\geqslant\pi|\gamma|^{-1}$ при всех $N\in\Lambda^*$, то для всех ненулевых $\varphi\in\tilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$ из (1.3) получаем

$$\|(\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\hat{\mathcal{W}})\varphi\|\geqslant\|(\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\hat{\mathcal{V}})\varphi\|-\|\big(\sum_{j=1}^3 A_j\hat{\alpha}_j\big)\varphi\|\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{\tfrac{\pi}{|\gamma|}}\;\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}(k;\varkappa)(\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\hat{\mathcal{V}})\varphi\|-\|\,|A|\,\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\,\|\varphi\|\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{1-\varepsilon}\;\sqrt{\tfrac{\pi}{|\gamma|}}\;\|\hat{G}^{\frac{1}{2}}(k;\varkappa)\varphi\|-\|\,|A|\,\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\,\|\varphi\|\geqslant$$

$$\geqslant\big(\sqrt{1-\varepsilon}\;\tfrac{\pi}{|\gamma|}-\|\,|A|\,\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\big)\,\|\varphi\|>0\,,$$

поэтому число $\lambda=0$ не является собственным значением рассматриваемых операторов $\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\hat{\mathcal{W}}$.

2. Доказательство теоремы 1.2

Будем использовать результаты и методы работ [24; 32]. Предварительно приведем некоторые необходимые для доказательства теоремы 1.2 утверждения.

Для коэффициентов Фурье $\hat{\mathcal{V}}_N^{(s)}$, $N \in \Lambda^*$, матричнозначных функций $\hat{\mathcal{V}}^{(s)}$, $s = 0, 1$, имеем $\hat{\mathcal{V}}_N^{(s)}\hat{\alpha}_j = (-1)^s \hat{\alpha}_j \hat{\mathcal{V}}_N^{(s)}$, $j = 1, 2, 3$. Следовательно, коэффициенты Фурье $\hat{\mathcal{V}}_N^{(s)}$ (как операторы в $\mathbb{C}^M$) коммутируют со всеми ортогональными проекторами $\hat{P}_{\tilde{e}}^{\pm}$, $\tilde{e} \in S_1(e)$. Так как $\hat{\mathcal{V}} = \hat{\mathcal{V}}^{(0)} + \hat{\mathcal{V}}^{(1)}$, то коэффициенты Фурье $\hat{\mathcal{V}}_N = \hat{\mathcal{V}}_N^{(0)} + \hat{\mathcal{V}}_N^{(1)}$, $N \in \Lambda^*$, также коммутируют со всеми ортогональными проекторами $\hat{P}_{\tilde{e}}^{\pm}$, $\tilde{e} \in S_1(e)$.

Для всех $\tilde{e} \in S_1(e)$ имеем $\big(\sum\limits_{j=1}^{3} e_j \hat{\alpha}_j\big)\hat{P}_{\tilde{e}}^{\pm} = \hat{P}_{\tilde{e}}^{\mp}\big(\sum\limits_{j=1}^{3} e_j \hat{\alpha}_j\big)$, поэтому для всех $\tilde{e}', \tilde{e}'' \in S_1(e)$ получаем равенство

$$\hat{P}_{\tilde{e}'}^{\pm}\hat{P}_{\tilde{e}''}^{\mp} = \pm\,\tfrac{i}{2}\,\hat{P}_{\tilde{e}'}^{\pm}\,\Big(\sum_{j=1}^{3} e_j \hat{\alpha}_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{3} (\tilde{e}_j'' - \tilde{e}_j')\hat{\alpha}_j\Big)$$

и, следовательно,

$$\|\hat{P}_{\tilde{e}'}^{\pm}\hat{P}_{\tilde{e}''}^{\mp}\| = \tfrac{1}{2}\,|\tilde{e}'' - \tilde{e}'|\,. \tag{2.1}$$

Если $k \in \mathbb{R}^3$, $N \in \Lambda^*$ и $k + 2\pi N \in \mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{P}(e)$, то

$$\hat{P}_{\tilde{e}(k+2\pi N)}^{\pm}\hat{\mathcal{D}}_N(k;\varkappa)\hat{P}_{\tilde{e}(k+2\pi N)}^{\pm} = \hat{0} \tag{2.2}$$

и для любого вектора $u \in \mathbb{C}^M$

$$\|\hat{\mathcal{D}}_N(k;\varkappa)\hat{P}_{\tilde{e}(k+2\pi N)}^{\pm}u\| = G_N^{\pm}(k;\varkappa)\|\hat{P}_{\tilde{e}(k+2\pi N)}^{\pm}u\|\,. \tag{2.3}$$

Если $k + 2\pi N \in \mathcal{P}(e)$, то

$$G_N^{+}(k;\varkappa) = G_N(k;\varkappa)\,. \tag{2.4}$$

На линейном пространстве $\mathcal{M}_M$ введем норму Гильберта–Шмидта $\|\hat{B}\|_{HS} = \big(\sum\limits_{p,q=1}^{M} |B_{pq}|^2\big)^{\frac{1}{2}}$, где $\hat{B} = (B_{pq})_{p,q=1,\dots,M} \in \mathcal{M}_M$.

Справедливо $\|\hat{B}\| \leqslant \|\hat{B}\|_{HS} \leqslant \big(M \max\limits_q \sum\limits_p |B_{pq}|^2\big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{M}\,\|\hat{B}\|$.
Если $\hat{\mathcal{W}} \in L^2(K;\mathcal{M}_M)$, то

$$\sum_{N\,\in\,\Lambda^*} \|\hat{\mathcal{W}}_N\|^2 \leqslant \sum_{N\,\in\,\Lambda^*} \|\hat{\mathcal{W}}_N\|^2_{HS} = \tag{2.5}$$

$$= v^{-1}(K)\int\limits_K \|\hat{\mathcal{W}}(x)\|^2_{HS}\, d^3x \leqslant M\, v^{-1}(K)\int\limits_K \|\hat{\mathcal{W}}(x)\|^2\, d^3x\,.$$

Количество векторов конечного множества $\mathcal{O} \subset \Lambda^*$ будем обозначать через $\#\,\mathcal{O}$. Для (измеримой) матричнозначной функции $\hat{\mathcal{W}} : K \to \mathcal{M}_M$ и любого $a \geqslant 0$ используем обозначение

$$\hat{\mathcal{W}}_a(x) = \begin{cases} \hat{\mathcal{W}}(x)\,, & \text{если } \|\hat{\mathcal{W}}(x)\| \geqslant a\,, \\ \hat{0} & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.2. Выберем число $h \geqslant 64$ так, что $h > 2\pi d(K^*)$. От числа h зависит выбор числа $\varkappa_0 > 0$, условия на которое будут уточняться по ходу доказательства. Вначале предполагаем, что $\varkappa_0 > 2h$. Пусть $\varkappa_0 \leqslant \varkappa_1 \leqslant \varkappa \leqslant \Omega\varkappa_1$, $l = l(h,\varkappa_1) \in \mathbb{N}$ — наибольшее число, для которого $2h^{\,l} \leqslant \varkappa_1$ (тогда $\varkappa_1 < 2h^{\,l+1}$ и, следовательно, $2h^{\,l} \leqslant \varkappa < 2\Omega h^{\,l+1}$).

В дальнейшем вектор $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ фиксируется, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$, а вектор $k \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяет равенству $(k,\gamma) = \pi$. Получаемые ниже оценки будут равномерны по выбираемым подобным образом векторам k . Для любого $b \in [0,\varkappa)$ обозначим $\mathcal{K}(b) = \{N \in \Lambda^* : G_N(k;\varkappa) \leqslant b\}$. Множества $\mathcal{K}(b)$ зависят также от k и $\varkappa$. При $b > 2\pi d(K^*)$ (и $b < \varkappa$) имеем $\#\,\mathcal{K}(b) \leqslant c_1\varkappa b^2$, где $c_1 = c_1(\Lambda) > 0$. Если $N \in \mathcal{K}(b)$, то $k + 2\pi N \notin \mathcal{P}(e)$. Если $N \in \mathcal{K}(h^{\,l})$, то $|\varkappa - |k_\perp + 2\pi N_\perp|| \leqslant h^{\,l} \leqslant \frac{\varkappa}{2}$, поэтому $|k_\perp + 2\pi N_\perp| \geqslant \frac{\varkappa}{2} > 1$. Следовательно, для любых $N, N' \in \mathcal{K}(h^{\,l})$

$$|\tilde{e}(k+2\pi N) - \tilde{e}(k+2\pi N')| \leqslant \tfrac{4\pi}{\varkappa}\,|N_\perp - N'_\perp|\,. \tag{2.6}$$

Пусть $\mathcal{K}_1 \doteq \mathcal{K}(h)$, $\mathcal{K}_\mu \doteq \{N \in \Lambda^* : h^{\mu-1} < G_N(k;\varkappa) \leqslant h^\mu\}$ при $\mu = 2,\dots,l$. Для любой вектор-функции $\varphi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)$

$$\sqrt{\tfrac{\pi}{|\gamma|}}\ \|\hat{P}^{\mathcal{K}_1}\varphi\| \leqslant \|\hat{G}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{\mathcal{K}_1}\varphi\| \leqslant h^{\frac{1}{2}}\,\|\hat{P}^{\mathcal{K}_1}\varphi\|\,, \tag{2.7}$$

$$h^{\frac{\mu-1}{2}}\,\|\hat{P}^{\mathcal{K}_\mu}\varphi\| \leqslant \|\hat{G}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{\mathcal{K}_\mu}\varphi\| \leqslant h^{\frac{\mu}{2}}\,\|\hat{P}^{\mathcal{K}_\mu}\varphi\|, \quad \mu = 2,\dots,l\,. \quad (2.8)$$

Обозначим $\hat{P}^{(\pm)}_\mu \doteq \hat{P}^{\pm}(k;e)\,\hat{P}^{\mathcal{K}_\mu}$ при $\mu = 1,\dots,l$ и $\hat{P}^{(\pm)} \doteq$ $\doteq \hat{P}^{\pm}(k;e)\,\hat{P}^{\mathcal{K}(h^l)} = \sum\limits_{\mu=1}^{l}\hat{P}^{(\pm)}_\mu$. Равенство $\hat{P}^{(+)} + \hat{P}^{(-)} = \hat{P}^{\mathcal{K}(h^l)}$ очевидно. В дальнейшем будем применять краткое обозначение $\hat{P}^{(\circ)} \doteq \hat{P}^{\Lambda^*\setminus\mathcal{K}(h^l)}$ (при этом $\mathcal{N}(k;e)\subset\Lambda^*\setminus\mathcal{K}(h^l)$).

При $\varkappa > 0$ для всех $N\in\Lambda^*$ имеем

$$G^+_N(k;\varkappa) > |k+2\pi N| \geqslant |k_\| + 2\pi N_\|| \geqslant \pi|\gamma|^{-1}\,.$$

Так как $\varkappa < 2\Omega h^{l+1}$, то для всех $N\in\Lambda^*\setminus\mathcal{K}(h^l)$ получаем

$$G_N(k;\varkappa) > h^l(2\varkappa + h^l)^{-1}G^+_N(k;\varkappa) > (4\Omega h+1)^{-1}G^+_N(k;\varkappa)\,, \quad (2.9)$$

$$G_N(k;\varkappa) > h^l(\varkappa + h^l)^{-1}|k+2\pi N| > (2\Omega h+1)^{-1}|k+2\pi N|\,. \quad (2.10)$$

Для любых векторов $u,v\in\mathbb{C}^M$ (и любого $\varepsilon\in(0,1)$) имеем $\|u+v\|^2 \geqslant \bigl(1-\frac{\varepsilon}{2}\bigr)\|u\|^2 - \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\,\|v\|^2$. Поэтому (см. также (2.2), (2.3) и (2.4)) для всех вектор-функций $\varphi\in\tilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$ выполняется оценка

$$\begin{gathered}
\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\bigl(\hat{P}^{+} + \hat{P}^{\mathcal{N}(k;e)}\bigr)(\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\hat{\mathcal{V}})\varphi\|^2 + \qquad (2.11)\\
+\|\hat{G}_+^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{-}(\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\hat{\mathcal{V}})\varphi\|^2 \geqslant\\
\geqslant \bigl(1-\tfrac{\varepsilon}{2}\bigr)\bigl(\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{+}\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)\hat{P}^{-}\varphi\|^2 +\\
+\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{\mathcal{N}(k;e)}\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)\hat{P}^{\mathcal{N}(k;e)}\varphi\|^2 + \|\hat{G}_+^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{-}\hat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)\hat{P}^{+}\varphi\|^2\bigr) -\\
-\tfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\,\bigl(\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\bigl(\hat{P}^{+}+\hat{P}^{\mathcal{N}(k;e)}\bigr)\hat{\mathcal{V}}\varphi\|^2 + \|\hat{G}_+^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{-}\hat{\mathcal{V}}\varphi\|^2\bigr) =\\
= \bigl(1-\tfrac{\varepsilon}{2}\bigr)\bigl(\|\hat{G}_+^{\frac{1}{2}}\bigl(\hat{P}^{+}+\hat{P}^{\mathcal{N}(k;e)}\bigr)\varphi\|^2 + \|\hat{G}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{-}\varphi\|^2\bigr) -\\
-\tfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\,\bigl(\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\bigl(\hat{P}^{+}+\hat{P}^{\mathcal{N}(k;e)}\bigr)\hat{\mathcal{V}}\varphi\|^2 + \|\hat{G}_+^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{-}\hat{\mathcal{V}}\varphi\|^2\bigr)\,.
\end{gathered}$$

При этом (так как $G^+_N(k;\varkappa)\geqslant G_N(k;\varkappa)$ для всех $N\in\Lambda^*$)

$$\|\hat{G}_+^{\frac{1}{2}}\bigl(\hat{P}^{+}+\hat{P}^{\mathcal{N}(k;e)}\bigr)\varphi\|^2 + \|\hat{G}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{-}\varphi\|^2 \geqslant \qquad (2.12)$$

$$\geqslant \|\hat{G}_+^{\frac12} P^{(+)}\varphi\|^2 + \|\hat{G}^{\frac12} P^{(-)}\varphi\|^2 + \|\hat{G}^{\frac12} P^{(\circ)}\varphi\|^2 ,$$

$$\|\hat{G}^{-\frac12}\big(\hat{P}^{+} + \hat{P}^{\mathcal{N}(k;e)}\big)\hat{\mathcal{V}}\varphi\|^2 + \|\hat{G}_+^{-\frac12}\hat{P}^{-}\hat{\mathcal{V}}\varphi\|^2 \leqslant \tag{2.13}$$

$$\leqslant \|\hat{G}^{-\frac12} P^{(+)}\hat{\mathcal{V}}\varphi\|^2 + \|\hat{G}_+^{-\frac12} P^{(-)}\hat{\mathcal{V}}\varphi\|^2 + \|\hat{G}^{-\frac12} P^{(\circ)}\hat{\mathcal{V}}\varphi\|^2 .$$

Далее будем оценивать слагаемые в правой части неравенства (2.13) через слагаемые в правой части неравенства (2.12). До теоремы 2.1 можно выбирать любое число $\varkappa \in [\varkappa_1 , \Omega\varkappa_1]$.

Л е м м а 2.1. *Пусть* $\hat{\mathcal{W}} \in L^2(K;\mathcal{M}_M)$. *Тогда для любого конечного множества* $\mathcal{O} \subset \Lambda^*$ *и любой вектор-функции* $\varphi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)$ *справедливо неравенство*

$$\|\hat{\mathcal{W}}\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| \leqslant v^{-\frac12}(K)\,(\#\,\mathcal{O})^{\frac12}\,\|\hat{\mathcal{W}}\|_{L^2(K;\mathcal{M}_M)}\,\|\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно,

$$\|\hat{\mathcal{W}}\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| \leqslant \|\hat{\mathcal{W}}\|_{L^2(K;\mathcal{M}_M)}\,\|\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\|_{L^\infty(K;\mathbb{C}^M)} \leqslant$$

$$\leqslant \|\hat{\mathcal{W}}\|_{L^2(K;\mathcal{M}_M)}\Big(\sum_{N\in\mathcal{O}}\|\varphi_N\|\Big) \leqslant$$

$$\leqslant (\#\,\mathcal{O})^{\frac12}\,\|\hat{\mathcal{W}}\|_{L^2(K;\mathcal{M}_M)}\Big(\sum_{N\in\mathcal{O}}\|\varphi_N\|^2\Big)^{\frac12} =$$

$$= v^{-\frac12}(K)\,(\#\,\mathcal{O})^{\frac12}\,\|\hat{\mathcal{W}}\|_{L^2(K;\mathcal{M}_M)}\,\|\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| .$$

Л е м м а 2.2. *Для произвольной матричнозначной функции* $\hat{\mathcal{W}} \in L^3(K;\mathcal{M}_M)$ *существует невозрастающая функция* $[0,+\infty) \ni t \to f_{\hat{\mathcal{W}}}(t) \in [0,1]$, *для которой* $f_{\hat{\mathcal{W}}}(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$, *такая, что для любого конечного множества* $\mathcal{O} \subset \Lambda^*$ *и любой вектор-функции* $\varphi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)$ *справедлива оценка*

$$\|\hat{\mathcal{W}}\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| \leqslant 2v^{-\frac13}(K)\,(\#\,\mathcal{O})^{\frac13}\,f_{\hat{\mathcal{W}}}(\#\,\mathcal{O})\,\|\hat{\mathcal{W}}\|_{L^3(K;\mathcal{M}_M)}\,\|\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| .$$

Доказательство. Считаем $\|\hat{\mathcal{W}}\|_{L^3(K;\mathcal{M}_M)} \neq 0$ (в противном случае выберем, например, функцию $f_{\hat{\mathcal{W}}}(t) \equiv 0$, $t \in [0, +\infty)$). Для любых $a > 0$ и $\varphi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)$ (см. лемму 2.1) имеет место цепочка неравенств

$$\|\hat{\mathcal{W}}\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| \leqslant \|(\hat{\mathcal{W}} - \hat{\mathcal{W}}_a)\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| + \|\hat{\mathcal{W}}_a\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| \leqslant \tag{2.14}$$
$$\leqslant (a + v^{-\frac{1}{2}}(K)\,(\#\,\mathcal{O})^{\frac{1}{2}}\,\|\hat{\mathcal{W}}_a\|_{L^2(K;\mathcal{M}_M)})\,\|\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| \leqslant$$
$$\leqslant (a + v^{-\frac{1}{2}}(K)\,(\#\,\mathcal{O})^{\frac{1}{2}}\,a^{-\frac{1}{2}}\,\|\hat{\mathcal{W}}_a\|^{\frac{3}{2}}_{L^3(K;\mathcal{M}_M)})\,\|\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| \leqslant$$
$$\leqslant (a + v^{-\frac{1}{2}}(K)\,(\#\,\mathcal{O})^{\frac{1}{2}}\,a^{-\frac{1}{2}}\,\|\hat{\mathcal{W}}\|^{\frac{3}{2}}_{L^3(K;\mathcal{M}_M)})\,\|\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\|\,.$$

Если положить $a = v^{-\frac{1}{3}}(K)\,(\#\,\mathcal{O})^{\frac{1}{3}}\,\|\hat{\mathcal{W}}\|_{L^3(K;\mathcal{M}_M)}$ (при $\mathcal{O} \neq \varnothing$), то из (2.14) следует оценка

$$\|\hat{\mathcal{W}}\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| \leqslant 2v^{-\frac{1}{3}}(K)\,(\#\,\mathcal{O})^{\frac{1}{3}}\,\|\hat{\mathcal{W}}\|_{L^3(K;\mathcal{M}_M)}\,\|\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\|\,, \tag{2.15}$$

которая справедлива и при $\mathcal{O} = \varnothing$. С другой стороны, для любого числа $\theta \in (0,1)$ найдется такое число $a_0 = a_0(\theta, \hat{\mathcal{W}}) > 0$, что $\|\hat{\mathcal{W}}_{a_0}\|_{L^3(K;\mathcal{M}_M)} \leqslant \theta\,\|\hat{\mathcal{W}}\|_{L^3(K;\mathcal{M}_M)}$. Если

$$\#\,\mathcal{O} \geqslant v(K)\,\theta^{-3}\,a_0^3\,\|\hat{\mathcal{W}}\|^{-3}_{L^3(K;\mathcal{M}_M)}\,,$$

то положим $a = v^{-\frac{1}{3}}(K)\,\theta\,(\#\,\mathcal{O})^{\frac{1}{3}}\,\|\hat{\mathcal{W}}\|_{L^3(K;\mathcal{M}_M)}$. Тогда $a \geqslant a_0$ и для любой вектор-функции $\varphi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)$ из (2.14) следует

$$\|\hat{\mathcal{W}}\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| \leqslant (a + v^{-\frac{1}{2}}(K)\,(\#\,\mathcal{O})^{\frac{1}{2}}\,a^{-\frac{1}{2}}\,\|\hat{\mathcal{W}}_a\|^{\frac{3}{2}}_{L^3(K;\mathcal{M}_M)})\,\|\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\| \leqslant$$
$$\leqslant 2v^{-\frac{1}{3}}(K)\,\theta\,(\#\,\mathcal{O})^{\frac{1}{3}}\,\|\hat{\mathcal{W}}\|_{L^3(K;\mathcal{M}_M)}\,\|\hat{P}^{\mathcal{O}}\varphi\|\,.$$

В силу произвольности выбора числа $\theta \in (0,1)$ из полученной оценки и из (2.15) следует утверждение леммы.

Лемма 2.3. *Для любого $\varepsilon' > 0$ существует число $\varkappa_0'(\varepsilon') = \varkappa_0'(\varepsilon'; \Lambda, \gamma, \hat{\mathcal{V}}, h) > 2h$ такое, что для всех $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_0'(\varepsilon')$, $\varkappa \in [\varkappa_1\,, \Omega\varkappa_1]$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^3 : (k, \gamma) = \pi$ и всех вектор-функций $\varphi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)$ справедливо неравенство*

$$\|\hat{G}_+^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathcal{V}}(\hat{I} - \hat{P}^{(\circ)})\varphi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\hat{G}^{\frac{1}{2}}(\hat{I} - \hat{P}^{(\circ)})\varphi\|\,. \tag{2.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любой вектор-функции $\varphi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)$, учитывая оценки $\#\,\mathcal{K}_\mu \leqslant c_1\varkappa h^{2\mu}$, $\mu = 1,\dots,l$, с помощью леммы 2.2 получаем

$$\|\hat{G}_+^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathcal{V}}(\hat{I}-\hat{P}^{(\circ)})\varphi\| \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa^{-\frac{1}{2}}\sum_{\mu=1}^{l}\|\hat{\mathcal{V}}(\hat{P}_\mu^{(+)}+\hat{P}_\mu^{(-)})\varphi\| = \varkappa^{-\frac{1}{2}}\sum_{\mu=1}^{l}\|\hat{\mathcal{V}}\hat{P}^{\mathcal{K}_\mu}\varphi\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\varkappa^{-\frac{1}{2}}\,v^{-\frac{1}{3}}(K)\,\|\hat{\mathcal{V}}\|_{L^3(K;\mathcal{M}_M)}\sum_{\mu=1}^{l}(c_1\varkappa h^{2\mu})^{\frac{1}{3}}f_{\hat{\mathcal{V}}}(c_1\varkappa h^{2\mu})\,\|\hat{P}^{\mathcal{K}_\mu}\varphi\| \leqslant$$

$$\leqslant 2c_1^{\frac{1}{3}}\,v^{-\frac{1}{3}}(K)\,\|\hat{\mathcal{V}}\|_{L^3(K;\mathcal{M}_M)}\,f_{\hat{\mathcal{V}}}(c_1\varkappa h^2)\,\varkappa^{-\frac{1}{6}}\sum_{\mu=1}^{l}h^{\frac{\mu}{6}}\,(h^{\frac{\mu}{2}}\,\|\hat{P}^{\mathcal{K}_\mu}\varphi\|).$$

Отсюда при соответствующем выборе числа $\varkappa_0'(\varepsilon')$ непосредственно следует неравенство (2.16), так как (см. (2.7) и (2.8))

$$h^{\frac{1}{2}}\,\|\hat{P}^{\mathcal{K}_1}\varphi\| \leqslant \sqrt{\tfrac{|\gamma|h}{\pi}}\;\|\hat{G}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{\mathcal{K}_1}\varphi\|\,,$$

$$h^{\frac{\mu}{2}}\,\|\hat{P}^{\mathcal{K}_\mu}\varphi\| \leqslant h^{\frac{1}{2}}\,\|\hat{G}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{\mathcal{K}_\mu}\varphi\|, \quad \mu = 2,\dots,l\,,$$

$$\|\hat{G}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{\mathcal{K}_\mu}\varphi\| \leqslant \|\hat{G}^{\frac{1}{2}}(\hat{I}-\hat{P}^{(\circ)})\varphi\|, \quad \mu = 1,\dots,l\,,$$

$$\varkappa^{-\frac{1}{6}}\sum_{\mu=1}^{l}h^{\frac{\mu}{6}} = (\varkappa^{-1}h^l)^{\frac{1}{6}}\sum_{\nu=0}^{l-1}h^{-\frac{\nu}{6}} < 2^{\frac{5}{6}}$$

и $f_{\hat{\mathcal{V}}}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. □

Далее полагаем $\varepsilon' = \varepsilon\,(3\sqrt{2(2-\varepsilon)})^{-1}$, $\varkappa_0 \geqslant \varkappa_0'(\varepsilon')$. Из (2.16) следуют оценки

$$\|\hat{G}_+^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{(-)}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}^{(-)}\varphi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\hat{G}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{(-)}\varphi\|\,, \tag{$*1$}$$

$$\|\hat{G}_+^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{(-)}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}^{(+)}\varphi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\hat{G}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{(+)}\varphi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\hat{G}_+^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{(+)}\varphi\|\,. \tag{$*2$}$$

Предположим также, что $\varkappa_0 \geqslant \varkappa_0'((4\Omega h+1)^{-\frac{1}{2}}\,\varepsilon')$. Тогда из (2.16) и (2.9) получаем

$$\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{(\circ)}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}^{(-)}\varphi\| \leqslant \tag{$*3$}$$

$$\leqslant (4\Omega h+1)^{\frac{1}{2}}\,\|\hat{G}_{+}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}^{(-)}\varphi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\hat{G}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{(-)}\varphi\|\,,$$

$$\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{(\circ)}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}^{(+)}\varphi\| \leqslant \tag{$*4$}$$

$$\leqslant (4\Omega h{+}1)^{\frac{1}{2}}\,\|\hat{G}_{+}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{(\circ)}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}^{(+)}\varphi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\hat{G}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{(+)}\varphi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\hat{G}_{+}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{(+)}\varphi\|\,.$$

Если в (2.16) сделать замену $\varphi = \hat{G}^{-\frac{1}{2}}\,\psi$, где $\psi \in \tilde{H}^{\,\frac{1}{2}}(K;\mathbb{C}^M)$, то получаем оценку

$$\|\hat{G}_{+}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathcal{V}}(\hat{I}-\hat{P}^{(\circ)})\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\psi\| \leqslant \varepsilon'\,\|(\hat{I}-\hat{P}^{(\circ)})\psi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\psi\|\,.$$

Оператор $\hat{G}_{+}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathcal{V}}(\hat{I}-\hat{P}^{(\circ)})\hat{G}^{-\frac{1}{2}}$, действующий в $\tilde{H}^{\,\frac{1}{2}}(K;\mathbb{C}^M)$, непрерывным образом продолжается до ограниченного оператора $\hat{G}_{+}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathcal{V}}\hat{G}^{-\frac{1}{2}}(\hat{I}-\hat{P}^{(\circ)})$, действующего на всем пространстве $L^2(K;\mathbb{C}^M)$. Поэтому для сопряженного оператора, который на $\psi \in \tilde{H}^{\,\frac{1}{2}}(K;\mathbb{C}^M)$ действует как $\psi \to \hat{G}^{-\frac{1}{2}}(\hat{I}-\hat{P}^{(\circ)})\hat{\mathcal{V}}\hat{G}_{+}^{-\frac{1}{2}}\psi$, также справедлива оценка

$$\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}(\hat{I}-\hat{P}^{(\circ)})\hat{\mathcal{V}}\hat{G}_{+}^{-\frac{1}{2}}\psi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\psi\|\,,\ \psi \in \tilde{H}^{\,\frac{1}{2}}(K;\mathbb{C}^M)\,. \tag{2.17}$$

Если положить $\psi = \hat{G}_{+}^{\frac{1}{2}}\varphi$, где $\varphi \in \tilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$, то из (2.17) получаем

$$\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}(\hat{I}-\hat{P}^{(\circ)})\hat{\mathcal{V}}\varphi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\hat{G}_{+}^{\frac{1}{2}}\varphi\|\,. \tag{2.18}$$

В частности, для любой вектор-функции $\varphi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)$

$$\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{(+)}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}^{(+)}\varphi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\hat{G}_{+}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{(+)}\varphi\|\,. \tag{$*5$}$$

Так как предполагается, что $\varkappa_0 \geqslant \varkappa_0'\,((4\Omega h{+}1)^{-\frac{1}{2}}\,\varepsilon')$, то справедливо также неравенство (2.18) с заменой ε' на $(4\Omega h{+}1)^{-\frac{1}{2}}\,\varepsilon'$. Поэтому (см. (2.9)) для любой вектор-функции $\varphi \in \tilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$ выполняются оценки

$$\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{(+)}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}^{(\circ)}\varphi\| \leqslant (4\Omega h+1)^{-\frac{1}{2}}\,\varepsilon'\,\|\hat{G}_{+}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{(\circ)}\varphi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\hat{G}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{(\circ)}\varphi\|\,, \tag{$*6$}$$

$$\|\hat{G}_+^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{(-)}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}^{(\circ)}\varphi\| \leqslant \tag{$*7$}$$

$$\leqslant \|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{(-)}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}^{(\circ)}\varphi\| \leqslant (4\Omega h+1)^{-\frac{1}{2}}\,\varepsilon'\,\|\hat{G}_+^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{(\circ)}\varphi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\hat{G}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{(\circ)}\varphi\|.$$

Из (1.1) и (2.10) следует, что при выборе достаточно большого числа $\varkappa_0'' > 2h$ (зависящего от ε', Λ, γ, $\hat{\mathcal{V}}$, Ω и h) для всех $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_0''$, $\varkappa \in [\varkappa_1, \Omega\varkappa_1]$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^3 : (k,\gamma) = \pi$ и всех вектор-функций $\psi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)$ (для них $\hat{G}^{-1}\psi \in \tilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$) справедлива оценка

$$\|\hat{\mathcal{V}}\hat{G}^{-1}\hat{P}^{(\circ)}\psi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\hat{P}^{(\circ)}\psi\|\,. \tag{2.19}$$

При этом $(\hat{\mathcal{V}}\hat{G}^{-1}\hat{P}^{(\circ)})^*\hat{P}^{(\circ)}\psi = \hat{G}^{-1}\hat{P}^{(\circ)}\,\hat{\mathcal{V}}\hat{P}^{(\circ)}\psi$ для сопряженного оператора $(\hat{\mathcal{V}}\hat{G}^{-1}\hat{P}^{(\circ)})^*$ и любой функции $\psi \in \tilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$, поэтому

$$\|\hat{G}^{-1}\hat{P}^{(\circ)}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}^{(\circ)}\psi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\hat{P}^{(\circ)}\psi\|\,. \tag{2.20}$$

Используя интерполяцию [37; 38] (см. также [15]), из (2.19) и (2.20) для всех вектор-функций $\psi \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(K;\mathbb{C}^M)$ (для них справедливо включение $\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\psi \in \tilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$) получаем

$$\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{(\circ)}\hat{\mathcal{V}}\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{(\circ)}\psi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\hat{P}^{(\circ)}\psi\|\,.$$

Делая замену $\varphi = \hat{G}^{-\frac{1}{2}}\psi \in \tilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$, получаем оценку

$$\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{(\circ)}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}^{(\circ)}\varphi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\hat{G}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{(\circ)}\varphi\|, \qquad \varphi \in \tilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)\,. \tag{$*8$}$$

Т е о р е м а 2.1. *Существует число $\tilde{\varkappa}_0 > 2h$ такое, что для каждого $\varkappa_1 \geqslant \tilde{\varkappa}_0$ найдется число $\varkappa \in [\varkappa_1, \Omega\varkappa_1]$ такое, что для всех векторов $k \in \mathbb{R}^3 : (k,\gamma) = \pi$ и всех вектор-функций $\varphi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)$ справедливо неравенство*

$$\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{(+)}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}^{(-)}\varphi\| \leqslant \varepsilon'\,\|\hat{G}^{\frac{1}{2}}\hat{P}^{(-)}\varphi\|\,. \tag{$*9$}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всех $\mu,\nu = 1,\dots,l$ и $\psi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)$ оценим норму $\|\hat{P}_\mu^{(+)}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}_\nu^{(-)}\psi\|$. Пусть $S_{\mu\nu}(n)$, где $\mu,\nu \in \{1,\dots,l\}$, $n \in \Lambda^*$, обозначает количество векторов

$N \in \mathcal{K}_\mu$, для которых $N-n \in \mathcal{K}_\nu$. Положим $h_{\mu\nu} = h^\mu + h^\nu$, $\mu,\nu = 1,\dots,l$. Если $\pi|n_\perp| > \varkappa + \frac{1}{2}h_{\mu\nu}$ или $\pi|n_\parallel| > \frac{1}{2}h_{\mu\nu}$, то $S_{\mu\nu}(n) = 0$. Так как $h > 2\pi d(K^*)$, то $h^l + 2\pi d(K^*) < 2h^l \leqslant \varkappa_1 \leqslant \varkappa$, поэтому $h^l < \varkappa - 2\pi d(K^*)$. При этих условиях существует константа $c_2 = c_2(\Lambda) > 0$ (см. [24]) такая, что для всех $\mu,\nu = 1,\dots,l$ и всех векторов $n \in \Lambda^*$, для которых $\pi|n_\perp| \leqslant \varkappa + \frac{1}{2}h_{\mu\nu}$ (и $\pi|n_\parallel| \leqslant \frac{1}{2}h_{\mu\nu}$), выполняется оценка

$$S_{\mu\nu}(n) \leqslant c_2 \, \frac{h^{\mu+\nu+\min\{\mu,\nu\}}\varkappa^{\frac{3}{2}}}{(2\pi|n_\perp| + h_{\mu\nu})\sqrt{\varkappa + h_{\mu\nu} - \pi|n_\perp|}} \, .$$

Следовательно (см. также (2.1) и (2.6)), для всех матричнозначных функций $\hat{\mathcal{W}} \in L^2(K;\mathcal{M}_M)$, коэффициенты Фурье $\hat{\mathcal{W}}_n$, $n \in \Lambda^*$, которых коммутируют со всеми ортогональными проекторами $\hat{P}^{\pm}_{\tilde e}$, $\tilde e \in S_1(e)$, и всех вектор-функций $\psi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)$ имеет место цепочка неравенств

$$\|\hat{P}^{(+)}_\mu \hat{\mathcal{W}} \hat{P}^{(-)}_\nu \psi\|^2 = \tag{2.21}$$

$$= v(K) \sum_{N\in\mathcal{K}_\mu} \Big\| \sum_{\substack{n\in\Lambda^*:\\ N-n\in\mathcal{K}_\nu}} \hat{P}^{+}_{\tilde e(k+2\pi N)} \hat{\mathcal{W}}_n \hat{P}^{-}_{\tilde e(k+2\pi(N-n))} \psi_{N-n} \Big\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant v(K) \sum_{N\in\mathcal{K}_\mu} \Big(\sum_{\substack{n\in\Lambda^*:\\ N-n\in\mathcal{K}_\nu}} |\,\tilde e(k+2\pi N) - \tilde e(k+2\pi(N-n))\,| \times$$

$$\times \|\hat{\mathcal{W}}_n\| \, \|(\hat{P}^{-}\psi)_{N-n}\| \Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant v(K)\, \varkappa^{-2} \sum_{N\in\mathcal{K}_\mu} \Big(\sum_{\substack{n\in\Lambda^*:\\ N-n\in\mathcal{K}_\nu}} 2\pi|n_\perp| \, \|\hat{\mathcal{W}}_n\| \, \|(\hat{P}^{-}\psi)_{N-n}\| \Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant v(K)\, \varkappa^{-2} \sum_{N\in\mathcal{K}_\mu} \Big(\sum_{\substack{n\in\Lambda^*:\\ N-n\in\mathcal{K}_\nu}} (2\pi|n_\perp|)^2 \|\hat{\mathcal{W}}_n\|^2 \Big) \times$$

$$\times \Big(\sum_{\substack{n\in\Lambda^*:\\ N-n\in\mathcal{K}_\nu}} \|(\hat{P}^{-}\psi)_{N-n}\|^2 \Big) =$$

$$= \varkappa^{-2} \Big(\sum_{n \in \Lambda^*} \Big(\sum_{\substack{N \in \mathcal{K}_\mu : \\ N - n \in \mathcal{K}_\nu}} 1 \Big) (2\pi |n_\perp|)^2 \|\hat{\mathcal{W}}_n\|^2 \Big) \cdot \|\hat{P}_\nu^{(-)} \psi\|^2 =$$

$$= \varkappa^{-2} \Big(\sum_{n \in \Lambda^*} S_{\mu\nu}(n) \, (2\pi |n_\perp|)^2 \|\hat{\mathcal{W}}_n\|^2 \Big) \cdot \|\hat{P}_\nu^{(-)} \psi\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \, h^{\mu+\nu+\min\{\mu,\nu\}} \times$$

$$\times \Big\{ \sum_{\substack{n \in \Lambda^* : \\ \pi|n_\perp| \leqslant \varkappa + \frac12 h_{\mu\nu} , \\ \pi |n_\parallel| \leqslant \frac12 h_{\mu\nu}}} \frac{(2\pi|n_\perp|)^2 \|\hat{\mathcal{W}}_n\|^2}{(2\pi|n_\perp| + h_{\mu\nu}) \sqrt{\varkappa(\varkappa + h_{\mu\nu} - \pi|n_\perp|)}} \Big\} \cdot \|\hat{P}_\nu^{(-)} \psi\|^2 .$$

Для любого $a \geqslant 0$ коэффициенты Фурье $(\hat{\mathcal{V}}_a)_n$, $n \in \Lambda^*$, матричнозначной функции $\hat{\mathcal{V}}_a \in L^3(K; \mathcal{M}_M) \subset L^2(K; \mathcal{M}_M)$ коммутируют со всеми ортогональными проекторами $\hat{P}_{\tilde{e}}^{\pm}$, $\tilde{e} \in S_1(e)$. Поэтому (так как $2\varkappa + h_{\mu\nu} < 3\varkappa$ и $\varkappa \leqslant \Omega \varkappa_1$) из (2.21) получаем, в частности, неравенства

$$\|\hat{P}_\mu^{(+)} \hat{\mathcal{V}}_a \hat{P}_\nu^{(-)} \psi\| \leqslant h^{\frac12 (\mu+\nu+\min\{\mu,\nu\})} \times \tag{2.22}$$

$$\times \Big(3 c_2 \sqrt{\Omega \varkappa_1} \sum_{\substack{n \in \Lambda^* : \\ \pi|n_\perp| \leqslant \varkappa + \frac12 h_{\mu\nu}}} \frac{\|(\hat{\mathcal{V}}_a)_n\|^2}{\sqrt{\varkappa + h_{\mu\nu} - \pi |n_\perp|}} \Big)^{\frac12} \cdot \|\hat{P}_\nu^{(-)} \psi\| .$$

Пусть $a \geqslant 2$. Обозначим

$$Y_\delta(\hat{\mathcal{V}}; a) \doteq \int_{x \in K : \|\hat{\mathcal{V}}(x)\| \geqslant a} \|\hat{\mathcal{V}}(x)\|^3 \ln^{2+\delta} \|\hat{\mathcal{V}}(x)\| \, d^3 x ;$$

$Y_\delta(\hat{\mathcal{V}}; a) \downarrow 0$ при $a \to +\infty$. Справедливо

$$\|\hat{\mathcal{V}}_a\|^2_{L^2(K; \mathcal{M}_M)} \leqslant \tag{2.23}$$

$$\leqslant (a \ln^{2+\delta} a)^{-1} \int_{x \in K : \|\hat{\mathcal{V}}(x)\| \geqslant a} \|\hat{\mathcal{V}}(x)\|^3 \ln^{2+\delta} \|\hat{\mathcal{V}}(x)\| \, d^3 x =$$

$$= (a \ln^{2+\delta} a)^{-1} \, Y_\delta(\hat{\mathcal{V}}; a) .$$

Всем упорядоченным парам чисел $\mu, \nu \in \{1, \dots, l\}$ поставим в соответствие числа $j = j(\mu, \nu) = \mu + \nu + \min\{\mu, \nu\} \in \{1, \dots, 3l\}$.

Пусть $\mathcal{L}(j)$, $j = 1, \ldots, 3l$, — множество упорядоченных пар (μ, ν) (возможно, пустое), для которых $j(\mu,\nu) = j$. Положим $X(\varkappa_1\,; \hat{\mathcal{V}}) \doteq \sum\limits_{n\,\in\,\Lambda^*\,:\,2\pi|n_\perp|\,>\,\varkappa_1} \|\hat{\mathcal{V}}_n\|^2$. Выберем числа $f_j \in (0,1]$, $j \in \mathbb{N}$, так, что $f_1 = 1$, $f_j \downarrow 0$, $a_j \doteq h^{\frac{1}{3}j} f_j \uparrow +\infty$, $f_j^{-1} Y_\delta(\hat{\mathcal{V}}; a_j) \downarrow 0$ при $j \to +\infty$ и $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} j (\ln a_j)^{-2-\delta} < +\infty$. Имеем (при суммировании пропускается первая сумма, если $X(\varkappa_1\,; \hat{\mathcal{V}}) = 0$, и слагаемые во второй сумме, для которых $Y_\delta(\hat{\mathcal{V}}; a_j) = 0$)

$$\frac{1}{(\Omega-1)\sqrt{\varkappa_1}}\ \Big(X^{-1}(\varkappa_1\,; \hat{\mathcal{V}})\ \sum_{j=1}^{3l} 2^{-j}\ \times$$

$$\times \sum_{(\mu,\nu)\,\in\,\mathcal{L}(j)} \int\limits_{\varkappa_1}^{\Omega\varkappa_1} \Big(\sum_{\substack{n\,\in\,\Lambda^*\,: \\ \frac{1}{2}\,\varkappa_1\,<\,\pi|n_\perp|\,\leqslant\,\varkappa + \frac{1}{2}\,h_{\mu\nu}}} \frac{\|\hat{\mathcal{V}}_n\|^2}{\sqrt{\varkappa + h_{\mu\nu} - \pi|n_\perp|}} \Big)\, d\varkappa \,+$$

$$+ \sum_{j=1}^{3l} a_j Y_\delta^{-1}(\hat{\mathcal{V}}; a_j)\ \times$$

$$\times \sum_{(\mu,\nu)\,\in\,\mathcal{L}(j)} \int\limits_{\varkappa_1}^{\Omega\varkappa_1} \Big(\sum_{\substack{n\,\in\,\Lambda^*\,: \\ \pi|n_\perp|\,\leqslant\,\varkappa + \frac{1}{2}\,h_{\mu\nu}}} \frac{\|(\hat{\mathcal{V}}_{a_j})_n\|^2}{\sqrt{\varkappa + h_{\mu\nu} - \pi|n_\perp|}} \Big)\, d\varkappa \Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(\Omega-1)\sqrt{\varkappa_1}}\ \Big(\int\limits_{\varkappa_1}^{\Omega\varkappa_1} \frac{d\varkappa}{\sqrt{\varkappa - \varkappa_1}}\ \Big) \times$$

$$\times \big(X^{-1}(\varkappa_1\,; \hat{\mathcal{V}}) \big(\sum_{j=1}^{3l} j 2^{-j} \big) \Big(\sum_{\substack{n\,\in\,\Lambda^*\,: \\ \varkappa_1\,<\,2\pi|n_\perp|\,<\,3\Omega\varkappa_1}} \|\hat{\mathcal{V}}_n\|^2 \Big) \,+$$

$$+ \sum_{j=1}^{3l} j a_j Y_\delta^{-1}(\hat{\mathcal{V}}; a_j) \big(\sum_{n\,\in\,\Lambda^*} \|(\hat{\mathcal{V}}_{a_j})_n\|^2 \big) \big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\sqrt{\Omega-1}}\ \big(2 + M v^{-1}(K) \sum_{j=1}^{3l} j a_j Y_\delta^{-1}(\hat{\mathcal{V}}; a_j)\, \|\hat{\mathcal{V}}_{a_j}\|^2_{L^2(K;\mathcal{M}_M)} \big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\sqrt{\Omega-1}}\ \big(2 + M v^{-1}(K) \sum_{j=1}^{+\infty} j (\ln a_j)^{-2-\delta} \big) \doteq$$

$$\doteq c_3 = c_3(M,\Lambda,\Omega,h;\hat{\mathcal{V}},\{f_j\}) < +\infty$$

(использованы оценки (2.5) и (2.23)). Поэтому существует число $\varkappa \in [\varkappa_1\,,\Omega\varkappa_1]$ (которое в дальнейшем будет выбираться именно таким образом) такое, что для всех $\mu,\nu = 1,\dots,l$

$$\sum_{\substack{n\,\in\,\Lambda^*:\\ \frac{1}{2}\,\varkappa_1\,<\,\pi|n_\perp|\,\leqslant\,\varkappa+\frac{1}{2}\,h_{\mu\nu}}} \frac{\|\hat{\mathcal{V}}_n\|^2}{\sqrt{\varkappa+h_{\mu\nu}-\pi|n_\perp|}} \leqslant 2^j c_3\,\varkappa_1^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{n\,\in\,\Lambda^*:\\ 2\pi|n_\perp|\,>\,\varkappa_1}} \|\hat{\mathcal{V}}_n\|^2\,, \tag{2.24}$$

$$\sum_{\substack{n\,\in\,\Lambda^*:\\ \pi|n_\perp|\,\leqslant\,\varkappa+\frac{1}{2}\,h_{\mu\nu}}} \frac{\|(\hat{\mathcal{V}}_{a_j})_n\|^2}{\sqrt{\varkappa+h_{\mu\nu}-\pi|n_\perp|}} \leqslant c_3\,\varkappa_1^{-\frac{1}{2}}\,a_j^{-1} Y_\delta(\hat{\mathcal{V}};a_j)\,, \tag{2.25}$$

где $a_j = h^{\frac{1}{3}j} f_j$, $j = j(\mu,\nu)$. Неравенства (2.24) справедливы также при $X(\varkappa_1\,;\hat{\mathcal{V}}) = 0$, а неравенства (2.25) — в случае, когда $Y_\delta(\hat{\mathcal{V}};a_j) = 0$ при некоторых $j \in \{1,\dots,3l\}$. Для каждого числа $j \in \{1,\dots,3l\}$ (если фиксировано число $\varkappa_1$) из (2.21) и (2.24) следует, что для всех пар чисел $(\mu,\nu) \in \mathcal{L}(j)$, всех вектор-функций $\psi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)$ и для выбранного выше числа $\varkappa \in [\varkappa_1\,,\Omega\varkappa_1]$ справедлива оценка

$$\|\hat{P}_\mu^{(+)}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}_\nu^{(-)}\psi\| \leqslant \tag{2.26}$$

$$\leqslant c_2^{\frac{1}{2}}\,h^{\frac{1}{2}j}\,\Big(\Big(3\sqrt{\Omega\varkappa_1} \sum_{\substack{n\,\in\,\Lambda^*:\\ \frac{1}{2}\,\varkappa_1\,<\,\pi|n_\perp|\,\leqslant\,\varkappa+\frac{1}{2}\,h_{\mu\nu}}} \frac{\|\hat{\mathcal{V}}_n\|^2}{\sqrt{\varkappa+h_{\mu\nu}-\pi|n_\perp|}}\Big)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\Big(\sqrt{\varkappa_1} \sum_{\substack{n\,\in\,\Lambda^*:\\ 2\pi|n_\perp|\,\leqslant\,\varkappa_1}} \frac{2\pi|n_\perp|\cdot\|\hat{\mathcal{V}}_n\|^2}{\varkappa_1\sqrt{\varkappa+h_{\mu\nu}-\pi|n_\perp|}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)\cdot\|\hat{P}_\nu^{(-)}\psi\| \leqslant$$

$$\leqslant c_2^{\frac{1}{2}}\,h^{\frac{1}{2}j}\,\Big(\Big(3\sqrt{\Omega}\;2^j c_3 \sum_{\substack{n\,\in\,\Lambda^*:\\ 2\pi|n_\perp|\,>\,\varkappa_1}} \|\hat{\mathcal{V}}_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\Big(\sqrt{2} \sum_{\substack{n\,\in\,\Lambda^*:\\ 2\pi|n_\perp|\,\leqslant\,\varkappa_1}} \frac{2\pi|n_\perp|}{\varkappa_1}\,\|\hat{\mathcal{V}}_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)\cdot\|\hat{P}_\nu^{(-)}\psi\|\,.$$

Пусть $\varepsilon'' \doteq \frac{1}{3}\varepsilon' h^{-1}\min\{1,\pi|\gamma|^{-1}\}$. Выберем $j_0 = j_0(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ (зависящее также от c_2, c_3, Ω, $\hat{\mathcal{V}}$, h и $\{f_j\}$) так, что $f_j \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon''$ и $(3\sqrt{\Omega}\, c_2\, c_3)^{\frac{1}{2}}\, (f_j^{-1} Y_\delta(\hat{\mathcal{V}}; a_j))^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\varepsilon''}{2}$ для всех $j > j_0$. Из (2.26) следует, что найдется $\tilde{\varkappa}_0 = \tilde{\varkappa}_0(M,\Lambda,\Omega,h,\hat{\mathcal{V}},\{f_j\};j_0,\varepsilon'') > 2h$ такое, что для всех $\varkappa_1 \geqslant \tilde{\varkappa}_0$ и выбираемых выше $\varkappa \in [\varkappa_1, \Omega\varkappa_1]$, всех чисел $\mu,\nu = 1,\dots,l$ (где $l = l(h,\varkappa_1) \in \mathbb{N}$), для которых $j(\mu,\nu) \leqslant j_0$, и всех вектор-функций $\psi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)$ имеем

$$\|\hat{P}_\mu^{(+)}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}_\nu^{(-)}\psi\| \leqslant \varepsilon''\, h^{\frac{1}{3}j(\mu,\nu)}\, \|\hat{P}_\nu^{(-)}\psi\|\,. \tag{2.27}$$

С другой стороны, если $\varkappa_1 \geqslant \tilde{\varkappa}_0 > 2h$ и $[\varkappa_1, \Omega\varkappa_1] \ni \varkappa$ — выбираемые выше числа, то для всех чисел $\mu,\nu = 1,\dots,l$, для которых $j = j(\mu,\nu) > j_0$, и всех вектор-функций $\psi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)$ с помощью оценок (2.22) и (2.25) (и принимая во внимание определение числа j_0) получаем

$$\|\hat{P}_\mu^{(+)}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}_\nu^{(-)}\psi\| \leqslant \|\hat{P}_\mu^{(+)}(\hat{\mathcal{V}} - \hat{\mathcal{V}}_{a_j})\hat{P}_\nu^{(-)}\psi\| + \|\hat{P}_\mu^{(+)}\hat{\mathcal{V}}_{a_j}\hat{P}_\nu^{(-)}\psi\| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(a_j + h^{\frac{1}{2}j}\Big(3c_2\sqrt{\Omega\varkappa_1} \sum_{\substack{n\in\Lambda^*:\\ \pi|n_\perp|\leqslant \varkappa+\frac{1}{2}h_{\mu\nu}}} \frac{\|(\hat{\mathcal{V}}_{a_j})_n\|^2}{\sqrt{\varkappa+h_{\mu\nu}-\pi|n_\perp|}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)\times$$

$$\times\|\hat{P}_\nu^{(-)}\psi\| \leqslant h^{\frac{1}{3}j}\big(f_j + (3\sqrt{\Omega}\,c_2\,c_3)^{\frac{1}{2}}\,(f_j^{-1}Y_\delta(\hat{\mathcal{V}};a_j))^{\frac{1}{2}}\big)\,\|\hat{P}_\nu^{(-)}\psi\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon''\, h^{\frac{1}{3}j}\,\|\hat{P}_\nu^{(-)}\psi\|\,,$$

то есть оценка (2.27) справедлива при всех $\mu,\nu = 1,\dots,l$.

Из оценок (2.7), (2.8) и (2.27) (для всех $\mu,\nu = 1,\dots,l$ и всех вектор-функций $\psi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)$) вытекает оценка

$$\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}_\mu^{(+)}\hat{\mathcal{V}}\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}_\nu^{(-)}\psi\| \leqslant h^{-\frac{\mu+\nu}{2}}\Big(h\,\max\Big\{1,\frac{|\gamma|}{\pi}\Big\}\Big)\,\|\hat{P}_\mu^{(+)}\hat{\mathcal{V}}\hat{P}_\nu^{(-)}\psi\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon'}{3}\, h^{\frac{1}{3}\min\{\mu,\nu\}}\, h^{-\frac{\mu+\nu}{6}}\,\|\hat{P}_\nu^{(-)}\psi\| = \frac{\varepsilon'}{3}\, h^{-\frac{1}{6}|\mu-\nu|}\,\|\hat{P}_\nu^{(-)}\psi\|\,.$$

Следовательно,

$$\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{(+)}\hat{\mathcal{V}}\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^{(-)}\psi\|^2 = \sum_{\mu=1}^{l}\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}_\mu^{(+)}\hat{\mathcal{V}}\hat{G}^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{\nu=1}^{l}\hat{P}_\nu^{(-)}\Big)\psi\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mu=1}^{l} \Big(\sum_{\nu=1}^{l} \|\hat{G}^{-\frac{1}{2}} \hat{P}_\mu^{(+)} \hat{\mathcal{V}} \hat{G}^{-\frac{1}{2}} \hat{P}_\nu^{(-)} \psi\| \Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \big(\tfrac{\varepsilon'}{3}\big)^2 \sum_{\mu=1}^{l} \Big(\sum_{\nu=1}^{l} h^{-\frac{1}{6}|\mu-\nu|} \|\hat{P}_\nu^{(-)} \psi\| \Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \big(\tfrac{\varepsilon'}{3}\big)^2 \sum_{\mu=1}^{l} \Big(\sum_{\nu=1}^{l} h^{-\frac{1}{6}|\mu-\nu|} \Big) \Big(\sum_{\nu=1}^{l} h^{-\frac{1}{6}|\mu-\nu|} \|\hat{P}_\nu^{(-)} \psi\|^2 \Big) \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\tfrac{1+h^{-\frac{1}{6}}}{1-h^{-\frac{1}{6}}} \Big) \big(\tfrac{\varepsilon'}{3}\big)^2 \sum_{\nu=1}^{l} \Big(\sum_{\mu=1}^{l} h^{-\frac{1}{6}|\mu-\nu|} \Big) \|\hat{P}_\nu^{(-)} \psi\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\tfrac{1+h^{-\frac{1}{6}}}{1-h^{-\frac{1}{6}}} \Big)^2 \big(\tfrac{\varepsilon'}{3}\big)^2 \sum_{\nu=1}^{l} \|\hat{P}_\nu^{(-)} \psi\|^2 \leqslant (\varepsilon')^2 \|\hat{P}^{(-)} \psi\|^2 .$$

Осталось сделать замену $\psi = \hat{G}^{\frac{1}{2}} \hat{P}^{(-)} \varphi$, $\varphi \in L^2(K; \mathbb{C}^M)$. Теорема 2.1 доказана.

Для завершения доказательства теоремы 1.2 воспользуемся полученными оценками (2.12), (2.13), $(*1) - (*9)$. Определим число $\varkappa_0 \doteq \max\{\varkappa_0'(\varepsilon'), \varkappa_0'(\tilde{\varepsilon}'), \varkappa_0'', \tilde{\varkappa}_0\} > 2h$, где $\tilde{\varepsilon}' = (4\Omega h + 1)^{-\frac{1}{2}} \varepsilon'$. Тогда для любого $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_0$ и выбираемого в теореме 2.1 числа $\varkappa \in [\varkappa_1, \Omega \varkappa_1]$, любого вектора $k \in \mathbb{R}^3 : (k, \gamma) = \pi$ и любой вектор-функции $\varphi \in \tilde{H}^1(K; \mathbb{C}^M)$ имеем

$$\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}} \big(\hat{P}^{+} + \hat{P}^{\mathcal{N}(k;e)}\big) \hat{\mathcal{V}} \varphi\|^2 + \|\hat{G}_+^{-\frac{1}{2}} \hat{P}^{-} \hat{\mathcal{V}} \varphi\|^2 \leqslant \tag{2.28}$$

$$\leqslant 3 \big(\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}} P^{(+)} \hat{\mathcal{V}} P^{(+)} \varphi\|^2 + \|\hat{G}^{-\frac{1}{2}} P^{(+)} \hat{\mathcal{V}} P^{(-)} \varphi\|^2 +$$

$$\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}} P^{(+)} \hat{\mathcal{V}} P^{(\circ)} \varphi\|^2 \big) +$$

$$+ 3 \big(\|\hat{G}_+^{-\frac{1}{2}} P^{(-)} \hat{\mathcal{V}} P^{(+)} \varphi\|^2 + \|\hat{G}_+^{-\frac{1}{2}} P^{(-)} \hat{\mathcal{V}} P^{(-)} \varphi\|^2 +$$

$$\|\hat{G}_+^{-\frac{1}{2}} P^{(-)} \hat{\mathcal{V}} P^{(\circ)} \varphi\|^2 \big) +$$

$$+ 3 \big(\|\hat{G}^{-\frac{1}{2}} P^{(\circ)} \hat{\mathcal{V}} P^{(+)} \varphi\|^2 + \|\hat{G}^{-\frac{1}{2}} P^{(\circ)} \hat{\mathcal{V}} P^{(-)} \varphi\|^2 +$$

$$+ \|\hat{G}^{-\frac{1}{2}} P^{(\circ)} \hat{\mathcal{V}} P^{(\circ)} \varphi\|^2 \big) \leqslant$$

$$\leqslant 9\,(\varepsilon')^2 \left(\|\hat{G}_+^{\frac{1}{2}} P^{(+)}\varphi\|^2 + \|\hat{G}^{\frac{1}{2}} P^{(-)}\varphi\|^2 + \|\hat{G}^{\frac{1}{2}} P^{(\circ)}\varphi\|^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant 9\,(\varepsilon')^2 \left(\|\hat{G}_+^{\frac{1}{2}} (\hat{P}^{+} + \hat{P}^{\mathcal{N}(k;e)})\varphi\|^2 + \|\hat{G}^{\frac{1}{2}} \hat{P}^{-}\varphi\|^2 \right).$$

Так как $(2-\varepsilon)\varepsilon^{-1}\,9(\varepsilon')^2 = \frac{1}{2}\varepsilon$, то доказываемая в теореме 1.2 оценка теперь следует из (2.11) и (2.28). Теорема 1.2 доказана.

Список литературы

1. Данилов Л.И. Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. VI. М.: ВИНИТИ, 1996. 45 с. Деп. в ВИНИТИ 31.12.96. № 3855–В96.
2. Gruber M.J. Measures of Fermi surfaces and absence of singular continuous spectrum for magnetic Schrödinger operators. E-print arXiv: math-ph/9908026, 1999.
3. Filonov N., Sobolev A.V. Absence of the singular continuous component in the spectrum of analytic direct integrals // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2004. Т. 318. С. 298–307.
4. Kuchment P., Levendorskii S. On the spectra of periodic elliptic operators // Trans. Amer. Math. Soc. 2001. V. 354, № 2. P. 537–569.
5. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 2. С. 1–40.
6. Sobolev A.V. Absolute continuity of the periodic magnetic Schrödinger operator // Invent. Math. 1999. V. 137. P. 85–112.
7. Morame A. Absence of singular spectrum for a perturbation of a two-dimensional Laplace-Beltrami operator with periodic electro-magnetic potential // J. Phys. A: Math. Gen. 1998. V. 31. P. 7593–7601.
8. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного магнитного периодического оператора Шредингера с положительным электрическим потенциалом // Труды С.-Петерб. матем. об-ва. 2001. Т. 9. С. 199–233.
9. Суслина Т.А., Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность оператора Шредингера с потенциалом, сосредоточенным на периодической системе гиперповерхностей // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, № 5. С. 197–240.
10. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шредингера с сильно подчиненным маг-

нитным потенциалом // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2003. Т. 303. С. 279–320.
11. Shen Z. On absolute continuity of the periodic Schrödinger operators // Int. Math. Res. Notices. 2001. Ґ 1. P. 1–31.
12. Shen Z. Absolute continuity of periodic Schrödinger operators with potentials in the Kato class //Illinois J. Math. 2001. V. 45, Ґ 3. P. 873–893.
13. Shen Z. The periodic Schrödinger operators with potentials in the Morrey class // J. Funct. Anal. 2002. V. 193, Ґ 2. P. 314–345.
14. Friedlander L. On the spectrum of a class of second order periodic elliptic differential operators // Commun. Math. Phys. 2002. V. 229. P. 49–55.
15. Данилов Л.И. Об абсолютной непрерывности спектра периодического оператора Шредингера // Матем. заметки. 2003. Т. 73, Ґ 1. С. 49–62.
16. Данилов Л.И. О спектре двумерного периодического оператора Шредингера // Теор. и матем. физика. 2003. Т. 134, Ґ 3. С. 447–459.
17. Данилов Л.И. Об отсутствии собственных значений в спектре двумерных периодических операторов Дирака и Шредингера // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2004. Вып. 1 (29). С. 49–84.
18. Тихомиров М., Филонов Н. Абсолютная непрерывность ґчетногоЄ периодического оператора Шредингера с негладкими коэффициентами // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16, Ґ 3. С. 201–210.
19. Данилов Л.И. О спектре оператора Дирака с периодическим потенциалом. Препринт ФТИ УрО АН СССР. Свердловск, 1987. 31 с.
20. Данилов Л.И. Одно свойство целочисленной решетки в $\mathbb{R}^3$ и спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. Препринт ФТИ УрО АН СССР. Свердловск, 1988. 33 с.
21. Данилов Л.И. О спектре оператора Дирака в $\mathbb{R}^n$ с периодическим потенциалом // Теор. и матем. физика. 1990. Т. 85, Ґ 1. С. 41–53.
22. Данилов Л.И. Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. I. М.: ВИНИТИ, 1991. 35 с. Деп. в ВИНИТИ 12.12.91. Ґ 4588–В91.
23. Данилов Л.И. Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. III. М.: ВИНИТИ, 1992. 33 с. Деп. в ВИНИТИ 10.07.92. Ґ 2252–В92.
24. Данилов Л.И. Оценки резольвенты и спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом // Теор. и матем. физика. 1995. Т. 103, Ґ 1. С. 3–22.

25. Данилов Л.И. Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Дирака // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, Ґ 2. С. 233–240.
26. Данилов Л.И. О спектре двумерного периодического оператора Дирака // Теор. и матем. физика. 1999. Т. 118, Ґ 1. С. 3–14.
27. Birman M.Sh., Suslina T.A. The periodic Dirac operator is absolutely continuous // Integr. Equat. and Operator Theory. 1999. V. 34. P. 377–395.
28. Лапин И.С. Абсолютная непрерывность спектра двумерных периодических магнитных операторов Шредингера и Дирака с потенциалами из классов Зигмунда // Пробл. матем. анализа СПбГУ. СПб., 2001. Вып. 22. С. 74–105.
29. Данилов Л.И. Об отсутствии собственных значений в спектре обобщенного двумерного периодического оператора Дирака // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17, Ґ 3. С. 47–80.
30. Данилов Л.И. Об абсолютной непрерывности спектра периодических операторов Шредингера и Дирака. II. М.: ВИНИТИ, 2001. 60 с. Деп. в ВИНИТИ 09.04.01. Ґ 916–В2001.
31. Данилов Л.И. О спектре двумерных периодических операторов Шредингера и Дирака // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2002. Вып. 3 (26). С. 3–98.
32. Данилов Л.И. О спектре периодического оператора Дирака // Теор. и матем. физика. 2000. Т. 124, Ґ 1. С. 3–17.
33. Данилов Л.И. Об абсолютной непрерывности спектра периодических операторов Шредингера и Дирака. I. М.: ВИНИТИ, 2000. 76 с. Деп. в ВИНИТИ 15.06.00. Ґ 1683–В00.
34. Гельфанд И.М. Разложение по собственным функциям уравнений с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73, Ґ 6. С. 1117–1120.
35. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
36. Kuchment P. Floquet theory for partial differential equations // Oper. Theory Adv. Appl. V. 60. Basel: Birkhäuser Verlag, 1993.
37. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
38. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.