Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. Ѓ1(35)

УДК 517.958 : 530.145.6

© **Ю.П.Чубурин**
chuburin@otf.pti.udm.ru

О ДВУМЕРНОМ МАГНИТНОМ ОПЕРАТОРЕ ШРЕДИНГЕРА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Ключевые слова: магнитный оператор Шредингера, периодический потенциал.

Abstract. We consider the two-dimensional magnetic Schrödinger operator with a periodic potential. The analitic properties of eigenvalues of this operator as functions in quasimomentum are investigated.

Введение

Обозначим через

$$H_0 = \tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - iBx_2\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \tag{1}$$

оператор Шредингера с однородным магнитным полем $B = = \mathrm{const} > 0$ в калибровке Ландау, действующий в $L^2(\mathbb{R}^2)$. Обозначим далее через $R_0(E) = (H_0 - E)^{-1}$ резольвенту оператора H_0, а через $G_0(x,y,E)$ — ядро резольвенты. Вид ядра G_0^{sim} в симметрической калибровке приведен, например, в [1]:

$$G_0^{\mathrm{sim}}(x,y,E) = \tfrac{1}{2\pi}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{E}{B}\right) e^{-iB(x_1y_2 - x_2y_1)/2} \cdot e^{-B(x-y)^2/4} \times \tag{2}$$
$$\times\, \Psi\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{E}{B}, 1, B(x-y)^2/2\right).$$

Здесь Γ — гамма-функция, Ψ — вырожденная гипергеометрическая функция 2-го рода. Согласно [2]

$$G_0(x,y,E) = e^{i\gamma}\, G_0^{\mathrm{sim}}(x,y,E), \tag{3}$$

где γ — некоторая вещественная функция.

В $L^2(\mathbb{R}^2)$ введем оператор магнитной трансляции τ_a, где $a \in \mathbb{R}^2$, действующий по формуле $\tau_a(\psi)(x) = e^{iBa_2x_1}\psi(x-a)$. Известно (непосредственно проверяемое) равенство $H_0\tau_a = \tau_a H_0$ на $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, а поскольку $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ — это существенная область самосопряженнности оператора H_0 [2], то

$$\tau_a R_0(E) = R_0(E)\,\tau_a. \tag{4}$$

Предположим, что выполнено условие рациональности потока $Ba_1a_2 \in 2\pi\mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Тогда из (2) вытекает, что

$$e^{iBa_2x_1}G_0(x-a,y,E) = e^{iBa_2y_1}\,G_0(x,y+a,E). \tag{5}$$

В дальнейшем рассматривается оператор $H = H_0 + V(x)$, где $V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ — вещественная периодическая функция по переменным x_j с периодами $T_j > 0$, $j = 1,2$. Как известно, в случае $B > 0$ спектр оператора H_0 совпадает с набором собственных значений бесконечной кратности $E_n = (n+\frac{1}{2})\,B$, $n = 0,1,\ldots$ (уровней Ландау). Через $\sigma(A)$ обозначается спектр A.

Разложение в прямой интеграл

Положим $\Omega = [0,T_1)\times[0,T_2)$, $\Omega^* = [-\pi/T_1,\pi/T_1)\times[-\pi/T_2,\pi/T_2)$ (ячейки в прямой и обратной решетке) и введем в рассмотрение унитарный оператор $U : L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\Omega\times\Omega^*)$,

$$\psi(x) \longmapsto \psi(x,k) = \tfrac{\sqrt{T_1T_2}}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}^2} e^{i(T_1n_1k_1+T_2n_2k_2)}\,\tau_{(T_1n_1,T_2n_2)}(\psi)(x). \tag{6}$$

Как обычно, предполагается, что $BT_1T_2 \in 2\pi\mathbb{N}$. Функции $\psi(x,k)$, рассматриваемые для $x \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяют очевидному равенству $\tau_{(T_1n_1,T_2n_2)}(\psi(x,k)) = e^{-i(T_1n_1k_1+T_2n_2k_2)}\psi(x,k)$, то есть являются магнитно-блоховскими [3].

Легко видеть, что оператор UHU^{-1} ґрасслаиваетсяЄ в семейство операторов $H(k)$, $k \in \Omega^*$, формально того же вида, что и оператор H (см. ниже теорему 0.1). Операторы $H(k)$ определены в $L^2(\Omega)$ на (достаточно гладких) магнитно-блоховских функциях.

Т е о р е м а 0.1. *Оператор H разлагается в прямом интеграле пространств*

$$\int_{\Omega^*}^{\oplus} L^2(\Omega)dk = L^2(\Omega \times \Omega^*) \simeq L^2(\Omega^*, L^2(\Omega)) \tag{6}$$

в семейство (самосопряженных) операторов $H(k)$. При этом спектр $H(k)$ является чисто дискретным и в окрестности любой точки $(E_0, k_0) \in (\sigma(H(k_0)), \Omega^*)$ задается уравнением вида $\Delta(E,k) = 0$, где $\Delta(E,k)$ — некоторая аналитическая функция в (комплексной) окрестности точки (E_0, k_0).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем разложимость в прямом интеграле (6) оператора H_0 или, что эквивалентно, его резольвенты. Легко видеть, что оператор $UR_0(E)U^{-1}$ расслаивается в семейство операторов $R_0(E,k)$ с ядром

$$G_0(x,y,k,E) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} e^{(T_1n_1k_1+T_2n_2k_2)}\,\tau_{(T_1n_1,T_2n_2)}\,(G_0(\cdot,y,E))(x). \tag{7}$$

Из (3), (4) с использованием известных оценок функции $\Psi(\alpha,\gamma,z)$ для малых и для больших значений $|z|$ (см., например, [4]) легко вывести неравенства

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial^j G_0(x,y,E)}{\partial E^j} \right|^2 dy \leqslant Ce^{-a|x|^2}, \quad j = 0, 1,$$

где $a > 0$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, а константа C зависит лишь от

$$\rho(E, \sigma(H_0)) = \inf_{n=0,1,\dots} |E - E_n| > 0.$$

Из данной оценки и (векторнозначной) теоремы Вейерштрасса об аналитичности равномерно сходящегося на компактах ряда из аналитических функций вытекает, что $G_0(x,y,k,E)$ является аналитической $L^2(\Omega\times\Omega)$-значной функцией переменных $(k,E)\in\mathbb{C}^3$ для $E\neq E_n$, $n=0,1,\ldots$, а потому $R_0(k,E)$ — компактный оператор, аналитически зависящий от k и $E\neq E_n$.

В силу резольвентного тождества

$$R(k,E)=R_0(k,E)-R_0(k,E)VR(k,E) \tag{8}$$

оператор $R(k,E)$ также компактен и разложим в прямом интеграле пространств (6). Оператор $H(k)$ имеет чисто дискретный спектр $\sigma_d(H(k))=\{E_n(k)\}_{n=1}^{\infty}$ как оператор с компактной резольвентой. Собственные значения $E_n(k)$ находятся из уравнения $\psi=-R_0(k,E)V\psi$ для ненулевых ψ. Последнее утверждение теоремы вытекает теперь из доказательства аналитической теоремы Фредгольма [5].

З а м е ч а н и е 0.1. Функция $\Delta(k,E)$ с точностью до умножения на ненулевую аналитическую функцию представляет собой регуляризованный определитель Фредгольма $D(k,E)=\det_2(1+R_0(k,E)V)$ (по поводу доказательства см. [6]). Таким образом, уравнение на нахождение собственных значений в окрестности любой точки $(k,E)\in\mathbb{R}^3$ имеет вид $D(k,E)=0$.

З а м е ч а н и е 0.2. Уравнение $D(k,E)=0$ можно локально заменить уравнением $P(k,E)=0$, где $P(k,E)$ — многочлен Вейерштрасса (см. [7]). Вещественные корни $E=E_j(k)$ данного многочлена, будучи занумерованы по возрастанию, являются непрерывными функциями. Отсюда, ввиду компактности множества Ω^*, понимаемого как тор, вытекает, что спектр

$$\sigma(H)=\bigcup_{k\in\Omega^*}\sigma(H(k))$$

(см. [8]) оператора H является локально конечным объединением зон — замкнутых промежутков, которые при $B>0$ могут вырождаться (например, при $V=0$).

Обозначим через $E_n(k)$, $n = 1, 2, \dots$, (геометрически различные) нули функции $D(k, E)$, занумерованные в порядке возрастания. Вследствие замечания 0.2 — это непрерывные функции, аналитические вне точек пересечения. Числа $E_n(k)$ являются собственными значениями оператора $H(k)$.

Т е о р е м а 0.2. *Пусть* $A < B$. *Множество*

$$\bigcup_{n \neq m} \left\{ k \in \Omega^* : \, E_n(k) = E_m(k) \in [A, B] \right\} \tag{7}$$

представляет собой конечное число аналитических кривых.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу компактности множества $\Omega^* \times [A, B]$ достаточно доказать утверждение в окрестности произвольной точки (k_0, E_0) , в которой функции $E = E_n(k)$ удовлетворяют равенству $E_0 = E_n(k_0)$. Эти функции согласно теореме 0.1 неявно определяются уравнением $\Delta(k, E) = 0$. При этом $\Delta(k, E)$ не равно тождественно нулю по E , иначе спектр $H(k)$ заполнял бы некоторый промежуток. Вследствие [7] пересечение различных $E_n(k)$ происходит в точках, для которых

$$\Delta_1(k) = 0, \tag{8}$$

где функция $\Delta_1(k)$ не равна нулю тождественно и представляет собой аналитическую функцию в окрестности точки k_0 (результант). В свою очередь, кривые, определяемые уравнением (8), теряют, вообще говоря, аналитичность и сливаются в точках, для которых (возможно, после линейной замены переменных) $\Delta_2(k_1) = 0$, где функция $\Delta_2(k_1)$ не равна нулю тождественно и аналитична. Итак, число точек, в которых может нарушаться аналитичность кривых (7), локально конечно, а значит, конечно.

Т е о р е м а 0.3. *Пусть* γ — *аналитическая кривая в* Ω^* , *тогда сужения функций* $E_n(k)$ *на эту кривую представляют собой аналитические функции от параметра кривой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из теории возмущений [8].

Список литературы

1. Чубурин Ю.П. О спектре и собственных функциях двумерного оператора Шредингера с магнитным полем//Теор. и матем. физика. 2003. Т. 134, Ѓ 2. С. 243–253.
2. Цикон Х., Фрезе Р., Кирш В., Саймон Б. Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990. 408 с.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Основные состояния двумерного электрона в периодическом магнитном поле // ЖЭТФ. 1980. Т. 79, вып. 3. С. 1006–1016.
4. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 360 с.
6. Чубурин Ю.П. О кратности резонансов возмущенного периодического оператора Шредингера // Теор. и матем. физика. 1998. Т. 116, Ѓ 1. С. 134–145.
7. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.II. М.: Наука, 1976. 400 с.
8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 432 с.