УДК 517.958 : 530.145.6

© **Н.И. Плетникова**
nat_pletnikova@mail.ru

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ ТИПА ВОЗМУЩЕННОЙ СТУПЕНЬКИ

Ключевые слова: оператор Шредингера, уравнение Липпмана–Швингера, нелокальный потенциал, обратная задача рассеяния.

Abstract. We investigate the scattering problem for the Schrödinger operator with a non-local perturbed step potential. The uniqueness of the inverse problem is proved.

Введение

Рассматривается одномерное уравнение Шредингера

$$H\psi = E\psi, \tag{0.1}$$

где $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0\theta(x) + \lambda(\cdot, \varphi_0)\,\varphi_0$, а E — спектральный параметр. Здесь $V_0 = \mathrm{const} < 0$ (данное предположение не уменьшает общности), $\theta(x)$ — функция Хевисайда, ненулевое $\lambda \in \mathbb{R}$ — параметр, функция $\varphi_0(x)$ удовлетворяет оценке $|\varphi_0(x)| \leqslant Ce^{-\alpha|x|}$ ($C, \alpha = \mathrm{const} > 0$) (далее такие функции будем называть экспоненциально убывающими).

В случае $\psi \cdot \overline{\varphi_0} \in L^1(\mathbb{R})$ обозначаем $(\psi, \varphi_0) = \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(x)\overline{\varphi_0(x)}\,dx$. Одномерный оператор $\lambda(\cdot, \varphi_0)\,\varphi_0$ в физической литературе называют сепарабельным потенциалом [1].

Положим $H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0\theta(x)$. Ядро резольвенты $R_{V_0}(E) = (H_1 - E)^{-1}$ будем называть функцией Грина. Вид функции Грина $G_1(x, y, E, V_0)$ оператора H_1 приведен в работе [2].

Рассеяние микрочастиц на потенциале описывается уравнением Липпмана–Швингера

$$\psi(x)=\psi_0(x)-\lambda(\psi,\varphi_0)\int\limits_{\mathbb{R}} G_1(x,y,E+i0,V_0)\varphi_0(y)\,dy, \qquad (0.2)$$

где $\psi_0(x)$ — решение уравнения Липпмана–Швингера для оператора H_1.

Далее будем считать, что $E>0$. В записи функции Грина символ $+i0$ для краткости будет опускаться. В работе изучается задача рассеяния для оператора H. Доказана (при определенных условиях) единственность обратной задачи рассеяния.

1. Прямая задача рассеяния

Решение $\psi(x)$ уравнения (0.1), соответствующее процессу рассеяния, и коэффициенты рассеяния находим с помощью интегрального уравнения Липпмана–Швингера (0.2) (см., напр., [3]).

Согласно [4] волновая функция $\psi_0(x)$ во всей области $x>0$ имеет вид $\psi_0(x)=\frac{2k}{k+\kappa}e^{i\kappa x}$, где $k=\sqrt{E}$, $\kappa=\sqrt{E-V_0}$, а в области $x<0$ — $\psi_0(x)=e^{ikx}+\frac{k-\kappa}{k+\kappa}e^{-ikx}$.

Т е о р е м а 1.1. *При* $1+\lambda(R_{V_0}(k)\varphi_0,\varphi_0)\neq 0$ *решение уравнения Липпмана–Швингера* (0.2) *существует, единственно и имеет вид*

$$\psi(x)=A(k,\kappa)e^{i\kappa x}+\eta_1(x),\quad x>0,$$

$$\psi(x)=e^{ikx}+B(k,\kappa)e^{-ikx}+\eta_2(x),\quad x<0,$$

где

$$A(k,\kappa)=\frac{2k}{k+\kappa}+\frac{\lambda(\psi_0,\varphi_0)}{1+\lambda(R_{V_0}(k)\varphi_0,\varphi_0)}\Big(\frac{1}{2i\kappa}\int\limits_0^{+\infty}e^{-i\kappa y}\varphi_0(y)\,dy+$$

$$+\frac{-k+\kappa}{2i\kappa(k+\kappa)}\int\limits_0^{+\infty}e^{i\kappa y}\varphi_0(y)\,dy+\frac{1}{i(k+\kappa)}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-iky}\varphi_0(y)\,dy\Big),$$

$$B(k,\kappa)=\tfrac{k-\kappa}{k+\kappa}+\frac{\lambda(\psi_0,\varphi_0)}{1+\lambda(R_{V_0}(k)\varphi_0,\varphi_0)}\Big(\tfrac{1}{i(k+\kappa)}\int\limits_0^{+\infty}e^{i\kappa y}\varphi_0(y)\,dy+$$

$$+\tfrac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{iky}\varphi_0(y)\,dy-\tfrac{-k+\kappa}{2ik(k+\kappa)}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-iky}\varphi_0(y)\,dy\Big)$$

— коэффициенты прохождения и отражения соответственно, а $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ — экспоненциально убывающие функции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (0.2) имеет вид

$$\psi(x)=\psi_0(x)-\lambda(\psi,\,\varphi_0)R_{V_0}(k)\varphi_0, \tag{1.1}$$

где $R_{V_0}(k)\varphi_0=\int\limits_{\mathbb{R}}G_1(x,y,k,\kappa)\varphi_0(y)\,dy$. Если $C=-\lambda(\psi,\,\varphi_0)$, то $\psi(x)=\psi_0(x)+CR_{V_0}(k)\varphi_0$. Подставив получившееся выражение снова в (1.1), получим равенство

$$\psi_0(x)+CR_{V_0}(k)\varphi_0=\psi_0(x)-\lambda\left((\psi_0,\varphi_0)+C(R_{V_0}(k)\varphi_0,\varphi_0)\right)R_{V_0}(k)\varphi_0.$$

Следовательно, $C=-\frac{\lambda(\psi_0,\varphi_0)}{1+\lambda(R_{V_0}(k)\varphi_0,\varphi_0)}$. При $x>0$ функция Грина оператора H_1 имеет вид

$$G_1(x,y,k,\kappa)=-\theta(y)\big(\tfrac{1}{2i\kappa}\,e^{i\kappa|x-y|}+\tfrac{-k+\kappa}{2i\kappa(k+\kappa)}\,e^{i\kappa(x+y)}\big)-$$

$$-\theta(-y)\,\tfrac{1}{i(k+\kappa)}\,e^{i\kappa x-iky}.$$

Согласно лемме 1 [5] получим

$$R_{V_0}(k)\varphi_0=\big(-\tfrac{1}{2i\kappa}\int\limits_0^{+\infty}e^{-i\kappa y}\varphi_0(y)\,dy-\tfrac{-k+\kappa}{2i\kappa(k+\kappa)}\int\limits_0^{+\infty}e^{i\kappa y}\varphi_0\,dy-$$

$$-\tfrac{1}{i(k+\kappa)}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-iky}\varphi_0\,dy\big)\,e^{i\kappa x}+\eta_1(x),$$

где $\eta_1(x)$ — экспоненциально убывающая функция. Осталось записать $\psi(x)$ в виде $\psi(x)=A(k,\kappa)e^{i\kappa x}+\eta_1(x)$. Аналогично рассматривается решение $\psi(x)$ при $x<0$.

Л е м м а 1.1. *Коэффициенты прохождения* $A(k,\kappa)$ *и отражения* $B(k,\kappa)$ (*см. теорему* 1.1) *удовлетворяют равенству* $\frac{\kappa}{k}\,|A(k,\kappa)|^2+|B(k,\kappa)|^2=1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как известно, для нормированного решения $\psi(x,t)$ нестационарного уравнения Шредингера выполнено равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}}|\psi(x,t)|^2\,dx=1,\quad t\in\mathbb{R}, \tag{1.2}$$

а функция $\psi(x,t)$ представима в виде

$$\psi(x,t)=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(k)\psi(x,k)\,e^{-ik^2t}\,dk,\quad \|\varphi\|=1,$$

где $\psi(x,k)$ — решение уравнения Липпмана–Швингера. Далее считаем, что функция $\varphi(k)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и отлична от нуля в некоторой малой окрестности произвольной точки $k_0>0$. Согласно методу стационарной фазы [6] при $t\to\pm\infty$ интегралы с убывающими по x функциями обращаются в нуль. Поэтому при $x<0$ и $t\to+\infty$

$$\psi_1(x,t)\approx\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\varphi(k)B\,(k,\kappa)\,e^{-ikx}e^{-ik^2t}\,dk\approx$$

$$\approx\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,B\,(k_0,\kappa_0)\int\limits_0^{+\infty}\varphi(k)\,e^{-ikx-ik^2t}\,dk,$$

а при $x>0$ и $t\to+\infty$

$$\psi_2(x,t)\approx\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\varphi(k)A\,(k,\kappa)\,e^{-i\kappa x}e^{-ik^2t}\,dk\approx$$

$$\approx\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,A\,(k_0,\kappa_0)\int\limits_0^{+\infty}\varphi(k)\,e^{-i\kappa x-ik^2t}\,dk.$$

Так как $k^2=\kappa^2+V_0$, то

$$\psi_2(x,t)\approx e^{-iV_0t}A(k_0,\kappa_0)\,\tfrac{\kappa_0}{k_0}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{-V_0}}^{+\infty}\varphi\big(\sqrt{\kappa^2+V_0}\,\big)e^{i\kappa x-i\kappa^2t}\,d\kappa.$$

Подставим решение нестационарного уравнения в равенство (1.2)

$$\int\limits_{-\infty}^{0} |\psi_1(x,t)|^2\, dx + \int\limits_{0}^{+\infty} |\psi_2(x,t)|^2\, dx = 1.$$

Учитывая, что $\int\limits_{\sqrt{-V_0}}^{+\infty} \bigl|\varphi\bigl(\sqrt{\kappa^2+V_0}\,\bigr)\bigr|^2\, d\kappa \approx \frac{k_0}{\kappa_0} \int\limits_{0}^{+\infty} |\varphi(k)|^2\, dk = \frac{k_0}{\kappa_0}$, и рассматривая функции φ, носители которых стягиваются к точке k_0, получаем $|B(k_0,\kappa_0)|^2 + \frac{\kappa_0^2}{k_0^2}\cdot\frac{k_0}{\kappa_0}|A(k_0,\kappa_0)|^2 = 1$.

2. Обратная задача рассеяния

Обозначим через S_0 множество экспоненциально убывающих функций $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi_0 \in [\,0,+\infty)$. Положим

$$\widehat{\varphi_0}(k) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\varphi_0(x)\, dx$$

— преобразование Фурье функции $\varphi_0(x)$.

Л е м м а 2.1. *Для* $\varphi_0(x) \in S_0$ *справедливо равенство*

$$\bigl(R_{V_0}(k)\varphi_0,\varphi_0\bigr) = \frac{1}{\kappa}\Bigl(\, i\pi\, |\widehat{\varphi_0}(\kappa)|^2 + \text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\varphi_0}(p)|^2}{p-\kappa}\, dp\,\Bigr) -$$

$$- \frac{-k+\kappa}{2i\kappa(k+\kappa)}\,(\widehat{\varphi_0}(-\kappa))^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь предположением леммы и видом функции Грина $G_1(x,y,k,\kappa)$, получаем

$$(R_{V_0}(k)\varphi_0,\varphi_0) = -\int\limits_{\mathbb{R}^2} \Bigl(\frac{1}{2i\kappa}\, e^{i\kappa|x-y|} + \frac{-k+\kappa}{2i\kappa(k+\kappa)}\, e^{i\kappa(x+y)}\Bigr)\times$$

$$\times\, \varphi_0(x)\overline{\varphi_0(y)}\, dxdy.$$

Так как функция $-\frac{1}{2i\kappa}\, e^{i\kappa\,|x-y|}$ — это функция Грина оператора $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$, то можем записать

$$(R_{V_0}(k)\varphi_0,\varphi_0) = (R_0(\kappa)\varphi_0,\varphi_0) - \frac{-k+\kappa}{2i\kappa(k+\kappa)}\,(\widehat{\varphi_0}(-\kappa))^2.$$

Согласно равенству Планшереля справедливо

$$(R_0(\kappa+i0)\varphi_0,\varphi_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\big((R_0(\kappa+i\varepsilon)\varphi_0)^\wedge,\widehat{\varphi_0}\big),$$

где

$$(R_0(\kappa+i\varepsilon)\varphi_0)^\wedge=\tfrac{1}{p^2-(\kappa+i\varepsilon)^2}\widehat{\varphi_0}=\tfrac{1}{2(\kappa+i\varepsilon)}\cdot\big(\tfrac{1}{p-\kappa-i\varepsilon}-\tfrac{1}{p+\kappa+i\varepsilon}\big)\widehat{\varphi_0}\,,$$

а формулы Сохоцкого [7] завершают доказательство:

$$(R_0(\kappa)\varphi_0,\varphi_0)=\tfrac{1}{\kappa}\,\big(\,i\pi\,|\widehat{\varphi_0}(\kappa)|^2+\mathrm{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}}\tfrac{|\widehat{\varphi_0}(p)|^2}{p-\kappa}\,dp\,\big).$$

Очевидно, что $(\psi_0,\varphi_0)=\frac{2k}{k+\kappa}\,\widehat{\varphi_0}(-\kappa)$ для любого $\varphi_0(x)\in S_0$. Если $\alpha=\alpha(k,\kappa)=A(k,\kappa)-\frac{2k}{k+\kappa}$, $\beta=\beta(k,\kappa)=B(k,\kappa)-\frac{k-\kappa}{k+\kappa}$, $g(\kappa)=(\widehat{\varphi_0}(-\kappa))^2$, $f(\kappa)=|\widehat{\varphi_0}(\kappa)|^2$, то в соответствии с леммой 2.1 коэффициенты прохождения и отражения (см. теорему 1.1) неявно удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\frac{k}{k+\kappa}f(\kappa)+\frac{k(-k+\kappa)}{(k+\kappa)^2}g(\kappa)}{\frac{i\kappa}{\lambda}-\pi f(\kappa)+i\,\mathrm{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{f(p)}{p-\kappa}\,dp-\frac{-k+\kappa}{2(k+\kappa)}\,g(\kappa)}\,,\\[2ex] \beta=\dfrac{\frac{2k\kappa}{(k+\kappa)^2}\,g(\kappa)}{\frac{i\kappa}{\lambda}-\pi f(\kappa)+i\,\mathrm{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{f(p)}{p-\kappa}\,dp-\frac{-k+\kappa}{2(k+\kappa)}\,g(\kappa)}\,.\end{cases}\tag{2.1}$$

Из системы видно (см. также формулы для коэффициентов прохождения и отражения), что картина рассеяния полностью определяется функцией $|\widehat{\varphi_0}(\kappa)|^2$.

В дальнейшем исследуется обратная задача рассеяния в следующей формулировке: по заданным функциям $A(\kappa)=A(k,\kappa)$ и $B(\kappa)=B(k,\kappa)$ (k здесь выражено через κ) найти информацию о функции $|\widehat{\varphi_0}(\kappa)|^2$. Положим

$$M=M(\kappa)=\tfrac{B(\kappa)(k+\kappa)-k+\kappa}{B(\kappa)(k+\kappa)-2k}\cdot\tfrac{A(\kappa)(\kappa-k)}{B(\kappa)(\kappa-k)+\kappa+k},$$

$$a^* = a^*(\kappa) = -2 + 2M - \tfrac{k}{\alpha\pi(k+\kappa)} = -2 + 2M - \tfrac{k}{\pi(A(\kappa)(k+\kappa)-2k)} =$$

$$= \tfrac{k(-8\pi\kappa\, A(\kappa)+(4\pi-1)(B(\kappa)(\kappa-k)+\kappa+k))}{\pi(A(\kappa)(k+\kappa)-2k)(B(\kappa)(\kappa-k)+\kappa+k)},$$

$$b^* = b^*(\kappa) = -\tfrac{k}{\pi(A(\kappa)(k+\kappa)-2k)}.$$

Из второго уравнения системы (2.1) выразим $g(\kappa)$:

$$g(\kappa) = \tfrac{2\beta\,(k+\kappa)^2}{\beta(\kappa^2-k^2)+4k\kappa} \cdot \Big(\tfrac{i\kappa}{\lambda} - \pi f(\kappa) + i\,\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}} \tfrac{f(p)}{p-\kappa}\,dp \Big)\,,$$

а первое приведем к виду

$$\tfrac{i\kappa}{\lambda} - \big(\pi + \tfrac{k}{\alpha(k+\kappa)}\big) f(\kappa) + i\,\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}} \tfrac{f(p)}{p-\kappa}\,dp = \tfrac{-k+\kappa}{k+\kappa} \cdot \tfrac{\alpha(k+\kappa)+2k}{2\alpha(k+\kappa)} g(\kappa).$$

Следовательно,

$$(1-M)\,\tfrac{i\kappa}{\lambda} - \big(1-M + \tfrac{k}{\alpha\pi(k+\kappa)}\big)\,\pi f(\kappa) - \tfrac{1-M}{\pi i}\,\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}} \tfrac{\pi f(p)}{p-\kappa}\,dp = 0. \tag{2.2}$$

Это уравнение рассматривается далее в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Из (2.2) следует, что величина $1 - M$ стремится к нулю при $|\,\kappa\,| \to \infty$ быстрее любой степени $|\,\kappa\,|$.

Под $\mathrm{ind}_{\mathbb{R}}\, a^*(\kappa)$ будем понимать приращение аргумента функции $a^*(\kappa)$, деленное на 2π , когда κ пробегает $\mathbb{R}$.

Л е м м а 2.2. *Пусть выполнены условия*

$$A(\kappa)(k+\kappa) - 2k \neq 0,$$
$$B(\kappa)(\kappa - k) + \kappa + k \neq 0,$$
$$-8\pi\kappa\, A(\kappa) + (4\pi - 1)(B(\kappa)(\kappa - k) + \kappa + k) \neq 0.$$

Если $\mathrm{ind}_{\mathbb{R}}\, a^*(\kappa) = 0$ *, то уравнение* (2.2) *имеет единственное решение. Если* $\mathrm{ind}_{\mathbb{R}}\, a^*(\kappa) > 0$ *, то уравнение* (2.2) *имеет не более одного решения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем следующие обозначения: $P = \frac{1}{2}(I+S)$ и $Q = \frac{1}{2}(I-S)$, где I — единичный оператор, а S — сингулярный интегральный оператор, определяемый формулой $S\xi = \frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\xi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$. В новых обозначениях уравнение (2.2) имеет вид

$$(1-M)\,\frac{i\kappa}{\lambda} + a^*(\kappa)P(\pi f(\kappa)) + b^*(\kappa)Q(\pi f(\kappa)) = 0. \tag{2.3}$$

По теореме 6.I [8], для того чтобы оператор $F = a^*P + b^*Q$ был обратим в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ с какой-либо стороны, необходимо и достаточно, чтобы функции $a^*(\kappa)$ и $b^*(\kappa)$ удовлетворяли следующим условиям:

$$1)\ a^*(\kappa)b^*(\kappa) \neq 0;$$

$$2)\ \lim_{\kappa\to\pm\infty} a^*(\kappa)b^*(\kappa) \neq 0.$$

Если условия 1), 2) выполнены, то оператор обратим или обратим слева в зависимости от того, является ли число $\mathrm{ind}_{\mathbb{R}}\, a^*(\kappa)$ равным нулю или положительным. Утверждение леммы следует из упомянутой теоремы.

Под решением обратной задачи рассеяния для уравнения Шредингера (0.1) понимаем функцию $f(\kappa) = |\widehat{\varphi_0}(\kappa)|^2$, удовлетворяющую уравнению (2.3).

Т е о р е м а 2.1. *Пусть $\varphi_0 \in S_0$ и выполнены условия*

$$\begin{gathered} A(\kappa)(k+\kappa) - 2k \neq 0, \\ B(\kappa)(\kappa-k) + \kappa + k \neq 0, \\ -8\pi\kappa\, A(\kappa) + (4\pi-1)(B(\kappa)(\kappa-k)+\kappa+k) \neq 0, \\ \mathrm{ind}_{\mathbb{R}}\, a^*(\kappa) \geqslant 0. \end{gathered}$$

Тогда решение обратной задачи рассеяния для уравнения Шредингера (0.1) *в классе* $L^2(\mathbb{R})$ *единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из леммы 2.2.

Список литературы

1. Демков Ю.Н., Островский В.Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975. 240 с.
2. Чубурин Ю. П. Об операторе Шредингера с малым потенциалом типа возмущенной ступеньки // Теор. и мат. физика. 1999. Т. 120, Ґ 2. С. 277–290.
3. Фадеев Л.Д., Якубовский О.А. Лекции по квантовой механике для студентов математиков. М.; Ижевск: Изд-во РХД, 2001. 256 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1963. 704 с.
5. Сметанина М.С., Чубурин Ю. П. Об уравнении Шредингера для кристаллической пленки с нелокальным потенциалом // Вестн. Удм. ун-та. Сер. ґМатематикаЄ. 2003. С. 19–30.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982. 448 с.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 436 с.
8. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Изд-во Штиинца, 1973. 428 с.