Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. Ґ1(35)

УДК 517.958 : 530.145.6

© **М.С. Сметанина**
chuburin@otf.pti.udm.ru

ОБ УРОВНЯХ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ВОЗМУЩЕННЫМ НЕЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Ключевые слова: уравнение Шредингера, нелокальный потенциал, собственное значение, резонанс, асимптотика.

Abstract. We investigate the one-dimensional Schrödinger operator with a potential that is a sum of a local potential and a two-rank operator. We prove that this Schrödinger operator has the unique level in the neighborhood of zero. The asimptotic behaviour of this level is investigated.

1. Введение

Рассматривается одномерное уравнение Шредингера

$$-\tfrac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \tag{1.1}$$

с нелокальным потенциалом

$$V = \varepsilon\, W(x) + \lambda_1(\cdot,\varphi_1)\,\varphi_1 + \lambda_2(\cdot,\varphi_2)\,\varphi_2, \tag{1.2}$$

где $\varepsilon, \lambda_1, \lambda_2$ — вещественные параметры, $W(x)$ — вещественная функция, удовлетворяющая оценке вида $\mid W(x) \mid \leqslant Ce^{-\alpha|x|}$, где $\alpha > 0$ — некоторая константа. Предполагаем, что $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно независимы и для них выполнены аналогичные неравенства $|\varphi_j(x)| \leqslant Ce^{-a_j|x|}$, $a_j > 0$. В дальнейшем функции, удовлетворяющие неравенству такого вида, мы будем называть экспоненциально убывающими. Потенциалы вида (1.2) возникают, например, в теории псевдопотенциала [1].

Введем обозначения $H_0 = -d^2/dx^2$, $H_s = H_0 + V_s$, $H = H_0 + \varepsilon W(x) + V_s$, где $V_s = \lambda_1(\cdot, \varphi_1)\,\varphi_1 + \lambda_2(\cdot, \varphi_2)\,\varphi_2$. Обозначим через $R_0(E) = (H_0 - E)^{-1}$ и $R_s(E) = (H_s - E)^{-1}$ резольвенты операторов H_0 и H_s . Ядро резольвенты $R_0(E)$, как известно, имеет вид $G_0(x,y,k) = -(2ik)^{-1}\, e^{ik\,|x-y|}$, где $k = \sqrt{E}$ (разрез выбираем вдоль полуоси $[\,0,\infty)$). Через $\sigma(A)$ [через $\sigma_{ess}(A)$] обозначается спектр [существенный спектр] оператора A . В дальнейшем ядра резольвент $R_0(k)$ и $R_s(k)$, вообще говоря, продолжаем по параметру k в комплексную окрестность нуля, сохраняя для соответствующих интегральных операторов те же обозначения. Зафиксируем

$$\varepsilon_0 \in (\,0,\ \min\{\,\tfrac{\alpha}{2}, a_1, a_2\,\}). \tag{1.3}$$

Уровнем оператора будем называть его собственное значение или резонанс; при этом под резонансом $k \in \mathbb{C}$ будем понимать такие k с $\operatorname{Im} k \in [-\varepsilon_0, 0)$ (или соответствующие $E = k^2$) , для которых в классе функций $\psi(x)$ таких, что $|\psi(x)| \leqslant Ce^{\varepsilon_0\,|x|}$, существует ненулевое решение уравнения $\psi(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}} G_0(x,y,k)\,V\psi(y)\,dy$. Заметим, что резонансы отвечают второму (нефизическому) листу римановой поверхности для функции $k = \sqrt{E}$. Условие (1.3) обеспечивает существование рассматриваемых интегралов. (Условие малости ε_0 физически допустимо, поскольку время жизни состояний микрочастиц, пропорциональное ε_0^{-1} , должно быть достаточно велико.)

Случай одного слагаемого в выражении для V_s (то есть случай сепарабельного потенциала) исследован в работе [2]. Случай n слагаемых для $\varepsilon = 0$ рассматривался в недавней работе [3]. В настоящей работе исследуется асимптотика уровней при малом ε и фиксированных λ_1 и λ_2 .

2. Исследование уровней оператора Шредингера

В дальнейшем пишем R_0 вместо $R_0(E)$. Ниже приведено утверждение, сформулированное, но не доказанное в [4].

Л е м м а 2.1. *Предположим, что*

$$\Delta = \big(1 + \lambda_1 \left(R_0(E)\varphi_1, \varphi_1\right) \big) \big(1 + \lambda_2 \left(R_0(E)\varphi_2, \varphi_2\right) \big) -$$

$$-\lambda_1 \lambda_2 \big(R_0(E)\varphi_1, \varphi_2\big) \big(R_0(E)\varphi_2, \varphi_1\big) \neq 0.$$

Тогда для резольвенты $R_s(E)$ *справедлива формула*

$$\psi(x) = R_s(E)\,\varphi(x) = R_0(x) -$$

$$-\lambda_1 \frac{(R_0\varphi,\varphi_1)\,(1+\lambda_2(R_0\varphi_2,\varphi_2))+\lambda_2(R_0\varphi,\varphi_2)\,(R_0\varphi_2,\varphi_1)}{(1+\lambda_1(R_0\varphi_1,\varphi_1))\,(1+\lambda_2(R_0\varphi_2,\varphi_2))-\lambda_1\lambda_2(R_0\varphi_1,\varphi_2)\,(R_0\varphi_2,\varphi_1)}\, R_0\varphi_1 -$$

$$-\lambda_2 \frac{(R_0\varphi,\varphi_2)\,(1+\lambda_1(R_0\varphi_1,\varphi_1))+\lambda_1(R_0\varphi,\varphi_1)\,(R_0\varphi_1,\varphi_2)}{(1+\lambda_1(R_0\varphi_1,\varphi_1))\,(1+\lambda_2(R_0\varphi_2,\varphi_2))-\lambda_1\lambda_2(R_0\varphi_1,\varphi_2)\,(R_0\varphi_2,\varphi_1)}\, R_0\varphi_2. \quad (2.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение $(H_s - E)\,\psi = \varphi$ представимо в виде

$$(H_0 - E)\,\psi = \varphi - \lambda_1(\psi,\varphi_1)\,\varphi_1 - \lambda_2(\psi,\varphi_2)\,\varphi_2\,. \qquad (2.2)$$

Применяя к уравнению (2.2) оператор $R_0(E)$ там, где он существует (то есть при $E \notin [0,\infty)$), получаем эквивалентное интегральное уравнение

$$\psi(x) = R_0(E)\,\varphi - \lambda_1\,(\psi,\varphi_1) R_0(E)\,\varphi_1 - \lambda_2\,(\psi,\varphi_2)\,R_0(E)\,\varphi_2\,. \quad (2.3)$$

Заметим, что в (2.3)

$$\psi(x) = \widetilde{\varphi}(x) - C_1\widetilde{\varphi}_1(x) - C_2\widetilde{\varphi}_2(x), \qquad (2.4)$$

где $C_i = (\psi,\varphi_i)$, $\tilde{\varphi}_i = \lambda_i\, R_0(E)\,\varphi_i$, $\tilde{\varphi} = R_0(E)\,\varphi$. Найдем неизвестные C_1 и C_2 . Подставляя выражение (2.4) для $\psi(x)$ в (2.3), получаем линейную систему

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C_1 & = & (\tilde{\varphi},\varphi_1) - C_1(\tilde{\varphi}_1,\varphi_1) - C_2(\tilde{\varphi}_2,\varphi_1) \\ C_2 & = & (\tilde{\varphi},\varphi_2) - C_1(\tilde{\varphi}_1,\varphi_2) - C_2(\tilde{\varphi}_2,\varphi_2) \end{array} \right. , \qquad (2.5)$$

следовательно, $C_i = \frac{\Delta_i(\varphi)}{\Delta}$, где

$$\Delta = \left| \begin{array}{cc} 1 + \lambda_1\,(R_0(E)\varphi_1,\varphi_1) & \lambda_2\,(R_0(E)\varphi_2,\varphi_1) \\ \lambda_1\,(R_0(E)\varphi_1,\varphi_2) & 1 + \lambda_2\,(R_0(E)\varphi_2,\varphi_2) \end{array} \right|,$$

$$\Delta_1(\varphi) = \begin{vmatrix} (\varphi,\varphi_1) & \lambda_2\,(R_0(E)\varphi_2,\varphi_1) \\ (\varphi,\varphi_2) & 1+\lambda_2\,(R_0(E)\varphi_2,\varphi_2) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2(\varphi) = \begin{vmatrix} 1+\lambda_1\,(R_0(E)\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi,\varphi_1) \\ \lambda_1\,(R_0(E)\varphi_1,\varphi_2) & (\varphi,\varphi_2) \end{vmatrix}.$$

Лемма доказана.

Введем обозначения $b_j = (\varphi_j, \sqrt{W})$, $j = 1, 2$,

$$d_1 = \frac{1}{2i} \int\limits_{\mathbb{R}} W(x)dx, \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered} a_{11} = \frac{1}{2i} \Big[-\int\limits_{\mathbb{R}^2} \sqrt{W}\varphi\overline{\varphi_1}\, dxdy + \\ +\frac{\lambda_2}{2} \Big(\Big| \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_2\, dx \Big|^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} |x-y|\sqrt{W}\varphi\overline{\varphi_1}\, dxdy + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \sqrt{W}\varphi\overline{\varphi_1}\, dxdy \int\limits_{\mathbb{R}^2} |x-y|\, \varphi_2\overline{\varphi_2}\, dxdy - \\ - \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi_2\overline{\varphi_1}\, dxdy \int\limits_{\mathbb{R}^2} |x-y|\sqrt{W}\varphi\overline{\varphi_2}\, dxdy - \\ - \int\limits_{\mathbb{R}^2} \sqrt{W}\varphi\overline{\varphi_2}\, dxdy \int\limits_{\mathbb{R}^2} |x-y|\, \varphi_2\overline{\varphi_1}\, dxdy \Big) \Big], \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} a_{12} = \frac{1}{2i} \Big[-\int\limits_{\mathbb{R}^2} \sqrt{W}\varphi\overline{\varphi_2}\, dxdy + \\ +\frac{\lambda_1}{2} \Big(\Big| \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_1\, dx \Big|^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} |x-y|\sqrt{W}\varphi\overline{\varphi_2}\, dxdy + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \sqrt{W}\varphi\overline{\varphi_2}\, dxdy \int\limits_{\mathbb{R}^2} |x-y|\, \varphi_1\overline{\varphi_1}\, dxdy - \\ - \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi_1\overline{\varphi_2}\, dxdy \int\limits_{\mathbb{R}^2} |x-y|\sqrt{W}\varphi\overline{\varphi_1}\, dxdy - \\ - \int\limits_{\mathbb{R}^2} \sqrt{W}\varphi\overline{\varphi_1}\, dxdy \int\limits_{\mathbb{R}^2} |x-y|\, \varphi_1\overline{\varphi_2}\, dxdy \Big) \Big], \end{gathered} \tag{2.8}$$

$$c_1 = -\frac{\lambda_1}{2i} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\sqrt{W}}\varphi_1\, dx \Big|^2 - \frac{\lambda_2}{2i} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\sqrt{W}}\varphi_2\, dx \Big|^2 +$$

$$+\tfrac{\lambda_1\lambda_2}{4i}\int\limits_{\mathbb{R}^2}|x-y|\,\varphi_1\sqrt{W}\,\overline{\varphi_1}\overline{\sqrt{W}}\,dxdy\,\Big|\int\limits_{\mathbb{R}}\overline{\sqrt{W}}\varphi_2\,dx\,\Big|^2+$$

$$+\tfrac{\lambda_1\lambda_2}{4i}\int\limits_{\mathbb{R}^2}|x-y|\,\varphi_2\sqrt{W}\,\overline{\varphi_2}\overline{\sqrt{W}}\,dxdy\,\Big|\int\limits_{\mathbb{R}}\overline{\sqrt{W}}\varphi_1\,dx\,\Big|^2-$$

$$-\tfrac{\lambda_1\lambda_2}{4i}\int\limits_{\mathbb{R}^2}|x-y|\,\varphi_2\sqrt{W}\,\overline{\varphi_1}\overline{\sqrt{W}}\,dxdy\int\limits_{\mathbb{R}^2}\varphi_1\sqrt{W}\,\overline{\varphi_2}\overline{\sqrt{W}}\,dxdy-$$

$$-\tfrac{\lambda_1\lambda_2}{4i}\int\limits_{\mathbb{R}^2}|x-y|\,\varphi_1\sqrt{W}\,\overline{\varphi_2}\overline{\sqrt{W}}\,dxdy\int\limits_{\mathbb{R}^2}\varphi_2\sqrt{W}\,\overline{\varphi_1}\overline{\sqrt{W}}\,dxdy. \tag{2.9}$$

Т е о р е м а 2.1. *Пусть* $\Delta \neq 0$. *Для всех достаточно малых* ε *существует единственный уровень оператора* H *в окрестности нуля, для которого справедлива формула*

$$k=\varepsilon\left(d_1+\frac{\lambda_1 a_{11}b_1+\lambda_2 a_{12}b_2}{2ic_1}\right)+O(\varepsilon^2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование уровня оператора H эквивалентно существованию ненулевого решения интегрального уравнения:

$$\psi(x)=-\varepsilon\,R_0\,W(x)\psi(x)+$$

$$+\frac{\lambda_1\varepsilon\left((R_0W\psi,\varphi_1)(1+\lambda_2(R_0\varphi_2,\varphi_2))-\lambda_2(R_0W\psi,\varphi_2)(R_0\varphi_2,\varphi_1)\right)R_0\varphi_1}{(1+\lambda_1(R_0\varphi_1,\varphi_1))(1+\lambda_2(R_0\varphi_2,\varphi_2))-\lambda_1\lambda_2(R_0\varphi_1,\varphi_2)(R_0\varphi_2,\varphi_1)}+$$

$$+\frac{\lambda_2\varepsilon\left((R_0W\psi,\varphi_2)(1+\lambda_1(R_0\varphi_1,\varphi_1))-\lambda_1(R_0W\psi,\varphi_1)(R_0\varphi_1,\varphi_2)\right)R_0\varphi_2}{(1+\lambda_1(R_0\varphi_1,\varphi_1))(1+\lambda_2(R_0\varphi_2,\varphi_2))-\lambda_1\lambda_2(R_0\varphi_1,\varphi_2)(R_0\varphi_2,\varphi_1)}. \tag{2.10}$$

Умножим (2.10) на $\sqrt{W(x)}$ и перейдем к функциям $\varphi(x) = \sqrt{W(x)}\psi(x)$ и $\varphi_i(x)=\overline{\sqrt{W(x)}}\varphi_i(x)$, тогда уравнение (2.10) примет вид

$$\varphi(x)=-\varepsilon\sqrt{W(x)}R_0(E)\sqrt{W(y)}\varphi(y)+$$

$$+\lambda_1\varepsilon\,\tfrac{\Delta_1(\varphi)}{\Delta}\sqrt{W(x)}R_0(E)\overline{\sqrt{W(y)}}\varphi_1(y)+$$

$$+\lambda_2\varepsilon\,\tfrac{\Delta_2(\varphi)}{\Delta}\sqrt{W(x)}R_0(E)\overline{\sqrt{W(y)}}\varphi_2(y). \tag{2.11}$$

Справедливы равенства

$$\sqrt{W(x)}R_0(E)\sqrt{W(y)}\varphi(y) = -\tfrac{\sqrt{W}}{2ik}(\varphi, \overline{\sqrt{W}}) + K(k)\varphi,$$

$$\sqrt{W(x)}R_0(E)\overline{\sqrt{W(y)}}\varphi(y) = -\tfrac{\sqrt{W}}{2ik}(\varphi, \sqrt{W}) + K_1(k)\varphi, \qquad (2.12)$$

где $K(k)$ и $K_1(k)$ — операторы, аналитически зависящие от k в окрестности нуля (подробное доказательство см. в [1]).

Выражение (2.11) с учетом (2.12) примет вид

$$\varphi(x) = \tfrac{\varepsilon\sqrt{W}}{2ik}(\varphi, \overline{\sqrt{W}}) - \varepsilon K(k)\varphi +$$
$$+\lambda_1\varepsilon\,\tfrac{\Delta_1(\varphi)}{\Delta}\left(-\tfrac{\sqrt{W}}{2ik}(\varphi_1, \sqrt{W}) + K_1(k)\varphi_1\right) +$$
$$+\lambda_2\varepsilon\,\tfrac{\Delta_2(\varphi)}{\Delta}\left(-\tfrac{\sqrt{W}}{2ik}(\varphi_2, \sqrt{W}) + K_1(k)\varphi_2\right). \qquad (2.13)$$

Операторнозначная функция

$$L(k) = \lambda_1\tfrac{\Delta_1(\cdot)}{\Delta}K_1(k)\varphi_1 + \lambda_2\tfrac{\Delta_2(\cdot)}{\Delta}K_1(k)\varphi_2 - K(k) \qquad (2.14)$$

является аналитической после умножения числителя и знаменателя на k^2. Введем новую неизвестную функцию $\Theta(x) = (1-\varepsilon L(k))\varphi(x)$. При условии $|\,\varepsilon\,| < 1/\|L(k)\|$ существует обратный оператор $(1-\varepsilon L(k))^{-1}$. Используя (2.14), запишем уравнение (2.13) в виде

$$\Theta(x) = \tfrac{\varepsilon\sqrt{W}}{2ik}((1-\varepsilon L(k))^{-1}\Theta, \overline{\sqrt{W}}) - \tfrac{\lambda_1\varepsilon}{2ik}\frac{\Delta_1((1-\varepsilon L(k))^{-1}\Theta}{\Delta}\sqrt{W}(\varphi_1, \sqrt{W}) -$$
$$-\tfrac{\lambda_2\varepsilon}{2ik}\,\frac{\Delta_2((1-\varepsilon L(k))^{-1}\Theta}{\Delta}\,\sqrt{W}(\varphi_2, \sqrt{W}). \qquad (2.15)$$

Из этого уравнения видно, что $\Theta(x) = C\sqrt{W(x)}$, где C — некоторая константа, не зависящая от k. Подставив в (2.15) выражение для $\Theta(x)$, получим после сокращения

$$k = \tfrac{\varepsilon}{2i}\left((1-\varepsilon L(k))^{-1}\sqrt{W}, \overline{\sqrt{W}}\right) -$$
$$-\tfrac{\lambda_1\varepsilon}{2i}\,\frac{\Delta_1((1-\varepsilon L(k))^{-1}\Theta}{\Delta}(\varphi_1, \sqrt{W}) - \tfrac{\lambda_2\varepsilon}{2i}\,\frac{\Delta_2((1-\varepsilon L(k))^{-1}\Theta}{\Delta}(\varphi_2, \sqrt{W}).$$

Разложив оператор $(1-\varepsilon L(k))^{-1}$ по степеням ε, получим

$$k=\tfrac{\varepsilon}{2i}\,(\sqrt{W},\overline{\sqrt{W}})-\tfrac{\lambda_1\varepsilon}{2i}\;\tfrac{\Delta_1(\sqrt{W})}{\Delta}(\varphi_1,\sqrt{W})-$$
$$-\tfrac{\lambda_2\varepsilon}{2i}\;\tfrac{\Delta_2(\sqrt{W})}{\Delta}(\varphi_2,\sqrt{W})+O(\varepsilon^2), \qquad (2.16)$$

Для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ в правой части (2.16) представим функцию $G_0(x,y,k)$ в виде

$$G_0(x,y,k)=-\tfrac{1}{2ik}\,e^{ik|x-y|}=-\tfrac{|x-y|}{2}-\tfrac{1}{2ik}+O(k).$$

В дальнейшем используем обозначения (2.6)–(2.9). Имеем $k^2\Delta=$ $=kc_1+O(k^2)$, $k^2\Delta_1(\varphi)=ka_{11}+O(k^2)$, $k^2\Delta_2(\varphi)=ka_{12}+O(k^2)$. В итоге уравнение (2.16) принимает вид

$$k=\varepsilon d_1+\frac{\lambda_1\varepsilon(a_{11}+O(k))b_1}{2i(c_1+O(k))}+\frac{\lambda_2\varepsilon(a_{12}+O(k))b_2}{2i(c_1+O(k))}+O(\varepsilon^2).$$

Положим $A=d_1+\dfrac{\lambda_1a_{11}b_1+\lambda_2a_{12}b_2}{2ic_1}$, тогда $k=A\varepsilon+O(\varepsilon)+\varepsilon O(k)$. Таким образом, если $F(k)=A+O(\varepsilon)$, то $k=A\varepsilon+O(\varepsilon^2)=\varepsilon F(k)$. Существование и единственность решения этого уравнения в окрестности нуля вытекает из принципа сжимающих отображений, так как в силу малости ε отображение $\varepsilon F(k)$ переводит круг $S=\{|\,k\,|\leqslant\delta\}$ в себя, а вследствие аналитичности $F(k)$ в круге S имеем $|\,\varepsilon F'(k)\,|\leqslant q<1$. Таким образом, к отображению $F(k)$ применим принцип сжимающих отображений.

Список литературы

1. Хейне В., Коэн М., Уэйр Д. Теория псевдопотенциала. М.: Мир, 1973. 560 с.
2. Сметанина М. С. Об уравнении Шредингера с нелокальным потенциалом // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2002. Вып. 3 (26). С. 99–114.
3. Сметанина М. С. Асимптотика уровней одномерного оператора Шредингера с нелокальным потенциалом // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2005. Вып. 1 (31). С. 99–106.
4. Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991. 568 с.