Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2005. Ѓ1(31)

УДК 517.5 + 517.9

© **В.И. Родионов**
rodionov@uni.udm.ru

ПРИСОЕДИНЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА–СТИЛТЬЕСА В АЛГЕБРЕ ПРЕРЫВИСТЫХ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: интеграл Римана–Стилтьеса, прерывистая функция, банахова алгебра, обобщенная функция, импульсное уравнение

Abstract. The concept of adjoint Riemann–Stieltjes integral are defined. The concept of adjoint distribution are defined. Solvability of impulse system with adjoint distribution are proved.

Введение

Непрерывные функции $x : K \to \mathbb{C}$, где K – это отрезок или интервал, обладают достаточно высокой степенью регулярности (ґпорядкаЄ), заключающейся в том, что близость аргументов влечет близость значений непрерывной функции. ґНе слишком разрывныеЄ прерывистые функции тоже обладают хорошей регулярностью (в англоязычной литературе они так и называются – regulated functions, т.е. упорядоченные функции), причем прерывистые функции одной переменной обладают тем свойством, что в каждой точке $t \in K$ определены три значения $x(t-0)$, $x(t)$ и $x(t+0)$, что позволяет конструировать другие сопутствующие атрибуты функции и получать новые результаты.

Исследования прерывистых функций нескольких переменных анонсированы в [1] и представлены в другой работе (в печати).

В настоящей работе вводится понятие присоединенного интеграла – объекта, двойственного в некотором смысле классическому интегралу Римана–Стилтьеса. На его основе определяется понятие производной присоединенной обобщенной функции (присоединенного распределения) и исследуются вопросы разрешимости различных типов дифференциальных уравнений с такой производной. К классам уравнений относятся: импульсные уравнения, сингулярные уравнения, функционально-дифференциальные уравнения, уравнения с разрывной правой частью и др.

1. Алгебра $\mathrm{G}[a,b]$ прерывистых функций

Зафиксируем отрезок $K \doteq [a,b]$ и через $\mathrm{G} \doteq \mathrm{G}(K) \doteq \mathrm{G}[a,b]$ обозначим пространство *прерывистых* (см. [2, с. 16]) функций, т.е. функций $x : K \to \mathbb{C}$, обладающих конечными пределами $x(t-0) \doteq \lim\limits_{\tau\to t-0} x(\tau)$ при всех $t \in (a,b]$ и $x(t+0) \doteq \lim\limits_{\tau\to t+0} x(\tau)$ при всех $t \in [a,b)$. Пространство G, наделенное естественной операцией умножения функций, является алгеброй над полем $\mathbb{C}$, и в дальнейшем мы будем называть G как пространством, так и алгеброй. Через G_L обозначим подпространство (подалгебру) в G, состоящее из тех функций, что $x(t-0) = x(t)$ при $t \in (a,b]$ и $x(a+0) = x(a)$. Симметричное подпространство (подалгебра) G_R состоит из тех функций, что $x(t+0) = x(t)$ при $t \in [a,b)$ и $x(b-0) = x(b)$. Функции из G_L будем называть непрерывными слева, а функции из G_R – непрерывными справа прерывистыми функциями. Через G_0 обозначим пространство (алгебру) таких функций $x : K \to \mathbb{C}$, что при любом $\varepsilon > 0$ множество $\{t \in K : |x(t)| \geqslant \varepsilon\}$ конечно. Нет никаких ограничений для того, чтобы считать, что функции x вещественнозначны, т.е. $x : K \to \mathbb{R}$, – читатель может так и поступать, однако мы будем вести изложение для комплекснозначных функций, отступая от этого принципа лишь в исключительных случаях. Отметим еще, что в [2] дается определение прерывистых функций, действующих из K в произвольное банахово пространство.

Функция $x : K \to \mathbb{C}$ называется *ступенчатой*, если существует конечное разбиение $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$ такое, что на каждом интервале (τ_{k-1}, τ_k), $k = 1, \ldots, n,$ функция x тождественно равна константе $c_k \in \mathbb{C}$. Очевидно, всякая ступенчатая функция является прерывистой. Более того, справедлива

Т е о р е м а 1.1. ([2, с. 16]). *Для функции* $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ *следующие утверждения эквивалентны:*

1) $x \in \mathrm{G}[a,b]$ *;*

2) x *является равномерным* (*на* $[a,b]$) *пределом последовательности ступенчатых функций;*

3) для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое конечное разбиение* $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$ *, что при всех* $k = 1, \ldots, n$ *справедливо*

$$\sup_{\tau, s \,\in\, (\tau_{k-1}, \tau_k)} |x(s) - x(\tau)| < \varepsilon.$$

Третье утверждение теоремы означает, что колебание функции x на каждом интервале (τ_{k-1}, τ_k) не превышает ε.

С л е д с т в и е 1.1. *Равномерный предел последовательности прерывистых функций есть функция прерывистая.*

С л е д с т в и е 1.2. *Если* $x \in \mathrm{G}[a,b]$ *, то* x *ограничена и измерима, а само пространство* $\mathrm{G}[a,b]$ *банахово по норме* $\|x\| \doteq \sup\limits_{t \,\in\, [a,b]} |x(t)|$ (*более того,* $\mathrm{G}[a,b]$ *является банаховой алгеброй*) *и является замыканием пространства ступенчатых функций относительно* sup *-нормы.*

Так как $x \in \mathrm{G}(K)$, то в топологии равномерной сходимости существует сколь угодно близкая к x ступенчатая функция $y : K \to \mathbb{C}$, которая, очевидно, ограничена, поэтому и x ограничена. Поскольку всякая ступенчатая функция измерима, то и x измерима (как предел последовательности измеримых функций). Наконец, если последовательность $\{x_n\},\ x_n \in \mathrm{G}(K)$, фундаментальна по sup -норме, то она равномерно (на K) сходится в себе и, следовательно, равномерно сходится к некоторой функции $x : K \to \mathbb{C}$, причем в силу следствия 1.1 справедливо $x \in \mathrm{G}(K)$.

Л е м м а 1.1. ([2, с. 17]). *Если* $x \in \mathrm{G}[a,b]$ *и* $\varepsilon > 0$ *, то каждое из множеств*

$$\bigl\{t \in (a,b] :\ |x(t-0)-x(t)| \geqslant \varepsilon\bigr\} \quad \text{и} \quad \bigl\{t \in [a,b) :\ |x(t+0)-x(t)| \geqslant \varepsilon\bigr\}$$

состоит из конечного числа точек.

С л е д с т в и е 1.3. *Множество* $T(x)$ *, состоящее из всех точек разрыва функции* $x \in \mathrm{G}$ *, не более чем счетно.*

В силу леммы 1.1 точки множества $T(x)$ (это обозначение применяем на протяжении всей работы) пересчитываются следующим образом: сначала мы нумеруем все точки множеств

$$\bigl\{t \in (a,b] :\ |x(t-0)-x(t)| \geqslant 1\bigr\} \quad \text{и} \quad \bigl\{t \in [a,b) :\ |x(t+0)-x(t)| \geqslant 1\bigr\},$$

а затем, двигаясь по натуральному ряду $n = 1, 2, \dots$, нумеруем точки множеств

$$\bigl\{t \in (a,b] :\ \tfrac{1}{n+1} \leqslant |x(t-0) - x(t)| < \tfrac{1}{n}\bigr\} \quad \text{и}$$

$$\bigl\{t \in [a,b) :\ \tfrac{1}{n+1} \leqslant |x(t+0) - x(t)| < \tfrac{1}{n}\bigr\}.$$

У т в е р ж д е н и е 1.1. *Если* $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ – *кусочно непрерывная функция, то* $x \in \mathrm{G}[a,b]$.

Мы называем функцию x кусочно непрерывной на отрезке (и пишем $x \in \mathrm{KC}[a,b]$), если она имеет на нем только конечное множество точек разрыва и притом все они первого рода. Тем самым $x \in \mathrm{G}[a,b]$.

У т в е р ж д е н и е 1.2. *Если* $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ *имеет ограниченное изменение, т.е.* $x \in \mathrm{BV}[a,b]$ *, то* $x \in \mathrm{G}[a,b]$.

В соответствии с [3, с. 206] у функции ограниченной вариации множество точек разрыва не более чем счетно, причем все разрывы первого рода. Следовательно, $\mathrm{BV}[a,b] \subset \mathrm{G}[a,b]$.

У т в е р ж д е н и е 1.3. *Если* $x \in \mathrm{G}[a,b]$, *то* x *интегрируема по Риману и, следовательно, интегрируема по Лебегу.*

Действительно, поскольку всякая функция $x \in \mathrm{G}[a,b]$ ограничена и имеет не более чем счетное множество точек разрыва, то x интегрируема по Риману.

Если $x \in \mathrm{G}[a,b]$, то согласно [4] первообразная $y(t) \doteq \int\limits_a^t x(s)ds$ есть функция регулярно дифференцируемая, т.е. $y \in \mathrm{RD}[a,b]$. Более того, в работе показано, что $\mathrm{RD} \approx \mathbb{R} \times \mathrm{G}_L \approx \mathbb{R} \times \mathrm{G}_R$ и $\mathrm{KC}^{(1)} \subset \mathrm{RD} \subset \mathrm{Lip}$, т.е. пространство регулярно дифференцируемых функций заключено между пространством кусочно гладких и липшицевых функций. Следует еще отметить, что модуль любой непрерывно дифференцируемой функции также является регулярно дифференцируемой функцией. Наконец, RD является замыканием пространства кусочно линейных функций по липшицевой норме (одномерной норме Гёльдера).

Таким образом, имеет место диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathrm{AC} \arrow[r] & \mathrm{CBV} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{C} \arrow[r] & \mathrm{KC} \arrow[dr] & & & \\ & & \mathrm{BV} \arrow[rr] & & \mathrm{G} \arrow[r] & \mathrm{R} \arrow[r] & \mathrm{L} \end{tikzcd}, \qquad (1.1)$$

где $\mathrm{C}, \mathrm{AC}, \mathrm{CBV}, \mathrm{R}$ и L – пространства непрерывных функций, абсолютно непрерывных функций, непрерывных функций ограниченной вариации, интегрируемых по Риману и интегрируемых по Лебегу функций соответственно. Стрелки означают отношение включения пространств. Все включения в диаграмме (1.1) строгие. Приведем подтверждающие примеры.

П р и м е р 1.1. Пусть функция $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ такова, что $x(0) = 0$, $x(t) = t\{\frac{1}{t}\}$ при $t \neq 0$ (выражение $\{\sigma\}$ обозначает дробную часть числа σ). На каждом полуинтервале $t \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$, $k = 1, 2, \dots$, имеем $x(t) = 1 - kt$, следовательно, x непрерывна слева, разрывна справа в точках $\tau_k = \frac{1}{k+1}$, т.е. $T(x) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$, и имеет неограниченное изменение (т.к.

скачки функции образуют гармонический ряд). Таким образом, $x \in \mathrm{G}[0,1]$, однако $x \notin \mathrm{BV}[0,1]$. Кроме того, $x \notin \mathrm{KC}[0,1]$.

П р и м е р 1.2. Пусть функция $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ такова, что $x(0) = 0$, $x(t) = (-1)^{[1/t]}$ при $t \neq 0$ (выражение $[\sigma]$ обозначает целую часть числа σ). На каждом полуинтервале $t \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$, $k = 1, 2, \ldots$, имеем $x(t) = (-1)^k$, следовательно, функция x разрывна в нуле и в точках $\tau_k = \frac{1}{k+1}$. Таким образом, $x \in \mathrm{R}[0,1]$, однако $x \notin \mathrm{G}[0,1]$ (т.к. нет предела $x(0+0)$).

Прерывистые функции можно интегрировать не только в смысле Римана, но и в более расширительном смысле: в смысле Римана–Стилтьеса, в смысле Перрона–Стилтьеса [5], в квазиинтегральном смысле [6; 7]. Приведем формулировку для интеграла Римана–Стилтьеса [8].

Т е о р е м а 1.2. *Для любых* $x \in \mathrm{G}[a,b]$ *и* $y \in \mathrm{CBV}[a,b]$ *интегралы Римана–Стилтьеса* $\int\limits_a^b x dy$ *и* $\int\limits_a^b y\, dx$ *существуют и справедливы оценки*

$$\Big| \int\limits_a^b x dy \Big| \leqslant \|x\| \cdot \operatorname*{Var}_K y \quad \text{и} \quad \Big| \int\limits_a^b x dy \Big| \leqslant \sup_{t \in (a,b)} |x(t)| \cdot \operatorname*{Var}_K y.$$

С л е д с т в и е 1.4. *Если последовательность прерывистых функций* $\{x_n\}$, $x_n \in \mathrm{G}[a,b]$, *сходится по* $\sup$*-норме к (прерывистой) функции* $x \in \mathrm{G}[a,b]$, *а функция* $y \in \mathrm{CBV}[a,b]$, *то* $\lim\limits_n \int\limits_a^b x_n dy = \int\limits_a^b x dy$.

С л е д с т в и е 1.5. *Если* $x \in \mathrm{G}[a,b]$, *а последовательность* $\{y_n\}$ *и функция* y *таковы, что* $y_n, y \in \mathrm{CBV}[a,b]$ *и* $\operatorname*{Var}_K (y_n - y) \underset{n}{\to} 0$, *то* $\lim\limits_n \int\limits_a^b x dy_n = \int\limits_a^b x dy$.

С л е д с т в и е 1.6. *Если* $x \in \mathrm{G}[a,b]$, $y \in \mathrm{CBV}[a,b]$, $z(t) \doteq \int\limits_\alpha^t x dy$, *то* $z \in \mathrm{CBV}[a,b]$ (*точка* α *из* $[a,b]$ *фиксирована*). *В частности, если* $y \in \mathrm{AC}[a,b]$, *то* $z \in \mathrm{AC}[a,b]$.

Напомним, что функции x, y, z действуют из $[a,b]$ в $\mathbb{C}$. Для произвольного разбиения $a=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_n=b$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\bigl|z(\tau_k)-z(\tau_{k-1})\bigr|=\sum_{k=1}^{n}\Bigl|\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}xdy\Bigr|\leqslant\|x\|\cdot\operatorname*{Var}_K y\,.$$

Если $t, t+\Delta t\in[a,b]$ (можно считать, что $\Delta t>0$), то

$$\bigl|z(t+\Delta t)-z(t)\bigr|=\Bigl|\int\limits_{t}^{t+\Delta t}xdy\Bigr|\leqslant\|x\|\cdot\operatorname*{Var}_{[t,t+\Delta t]} y\underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow}0\,.$$

Наконец, если $y\in\mathrm{AC}[a,b]$, то вещественнозначная неубывающая функция $v(t)=\operatorname*{Var}\limits_{s\in[a,t]}y(s)$ также абсолютно непрерывна на $[a,b]$ (аналогичное утверждение для вещественнозначных функций y можно найти в [9, с. 344]), поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что какова бы ни была конечная система попарно непересекающихся интервалов (a_k,b_k), $k=1,\ldots,n$, такая, что $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$, выполнено $\sum\limits_{k=1}^{n}\bigl(v(b_k)-v(a_k)\bigr)<\varepsilon$. Для этой же системы интервалов справедлива цепочка

$$\sum_{k=1}^{n}\bigl|z(b_k)-z(a_k)\bigr|=\sum_{k=1}^{n}\Bigl|\int\limits_{a_k}^{b_k}xdy\Bigr|\leqslant\|x\|\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Var}_{[a_k,b_k]}y=$$

$$=\|x\|\cdot\sum_{k=1}^{n}\bigl(v(b_k)-v(a_k)\bigr)<\varepsilon\,\|x\|.$$

Утверждение 1.4. *Пусть A – квадратная матрица порядка n с элементами $A_{ij}\in\mathbb{C}$, $q\in\mathrm{CBV}[a,b]$. Для $\alpha\in[a,b]$ и вектор-функций $x,y\in\mathrm{G}^n[a,b]$ справедливо*

$$y(t)=x(t)-\int\limits_{\alpha}^{t}Ax\,dq\quad\Longleftrightarrow\quad x(t)=y(t)-\int\limits_{\alpha}^{t}\bigl[\,d\,e^{A(q(t)-q(s))}\,\bigr]\,y(s)$$

$$\Longleftrightarrow\; x(t)=e^{Aq(t)}\bigl[\,e^{-Aq(\alpha)}\,y(\alpha)+\int\limits_{\alpha}^{t}e^{-Aq(\cdot)}\,dy\,\bigr].\qquad(1.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $z \doteq e^{-Aq(\cdot)}\, x$, то

$$y(t) = e^{Aq(t)}\, z(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} A e^{Aq(\cdot)} z\, dq = e^{Aq(t)}\, z(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} \left[\, d\, e^{Aq(\cdot)}\,\right] z =$$

$$= e^{Aq(\alpha)}\, z(\alpha) + \int\limits_{\alpha}^{t} e^{Aq(\cdot)}\, dz\,,$$

$$z(t) - z(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{t} dz = \int\limits_{\alpha}^{t} e^{-Aq(s)}\, d\Big(\int\limits_{\alpha}^{s} e^{Aq(\cdot)}\, dz \Big) = \int\limits_{\alpha}^{t} e^{-Aq(\cdot)}\, dy\,.$$

Возвращаясь к исходной переменной x (с учетом $x(\alpha) = y(\alpha)$), получаем третье равенство, а второе получается из него интегрированием по частям.

2. Алгебры $\mathrm{G}_0[a,b]$, $\mathrm{G}_L[a,b]$ и $\mathrm{G}_R[a,b]$

Л е м м а 2.1. *Для функции* $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ *следующие утверждения эквивалентны:*

a) $x \in \mathrm{G}_0$;

b) $x \in \mathrm{G}$ *и* $x(t-0) = 0$ *для всех* $t \in (a,b]$;

c) $x \in \mathrm{G}$ *и* $x(t+0) = 0$ *для всех* $t \in [a,b)$;

d) $x \in \mathrm{G}$ *и* $\int\limits_{\tau}^{t} x(s)ds = 0$ *для всех* $\tau, t \in [a,b]$;

e) $x \in \mathrm{G}$ *и* $\int\limits_{\tau}^{t} xdy = 0$ *для всех* $\tau, t \in [a,b]$ *и любых* $y \in \mathrm{CBV}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равносильность утверждений $a) - d)$ показана в [2, с. 19], а импликация $e) \Rightarrow d)$ тривиальна.

$a) \Rightarrow e)$. Зафиксируем точки $\tau, t \in [a,b]$ (считаем $\tau < t$), функцию $y \in \mathrm{CBV}$ и $\varepsilon > 0$. Точки τ и t и все точки конечного множества $\big\{ s \in [\tau,t] \,:\, |x(s)| \geqslant \varepsilon \big\}$ порождают такое разбиение $\tau = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = t$, что $|x(s)| < \varepsilon$ для всех $s \in (s_{k-1}, s_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Следовательно,

$$\Big|\int\limits_{\tau}^{t} xdy\,\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \Big| \int\limits_{s_{k-1}}^{s_k} xdy\,\Big| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Var}_{[s_{k-1},s_k]} y = \varepsilon \operatorname*{Var}_{[\tau,t]} y\,,$$

поэтому в силу произвольности $\varepsilon > 0$ справедливо $\int\limits_{\tau}^{t} x dy = 0$.

П р и м е р 2.1. Примером прерывистой функции из G_0 служит функция Римана, т.е. функция $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ такая, что $x = \frac{1}{n}$ в каждой не равной нулю рациональной точке $r = \frac{m}{n}$ $(m \neq 0)$, где $\frac{m}{n}$ – несократимая рациональная дробь, и $x = 0$ во всех остальных точках отрезка $[0,1]$. Эта функция разрывна во всех нетривиальных рациональных точках, а в иррациональных точках она непрерывна.

Л е м м а 2.2. *Пространства* G_0, G_L *и* G_R *замкнуты в* G *относительно* $\sup$*-нормы и, следовательно, банаховы.*

Формулировка леммы совпадает с утверждениями из [2, с. 20], однако там через G_L обозначено несколько иное подпространство: оно состоит из тех функций, что $x(t-0) = x(t)$ при $t \in (a,b]$ и $x(a) = 0$ (аналогично определяется пространство G_R). Это же замечание относится к приводимой ниже лемме.

Л е м м а 2.3. *Функция* $x \in \mathrm{G}$ *единственным образом представима в виде суммы* $x = x_L + x_0$ *двух функций* $x_L \in \mathrm{G}_L$ *и* $x_0 \in \mathrm{G}_0$. *Симметричное представление* $x = x_R + x_0$, *где* $x_R \in \mathrm{G}_R$, $x_0 \in \mathrm{G}_0$, *также имеет место.*

З а м е ч а н и е 2.1. В процессе доказательства леммы 2.3 устанавливается, что $\mathrm{G}_L \cap \mathrm{G}_0 = \{0\}$. Таким образом, леммы 2.2 и 2.3 позволяют представить пространство G в виде прямой суммы двух замкнутых подпространств: $\mathrm{G} = \mathrm{G}_L \oplus \mathrm{G}_0$ (используем определение прямой суммы линейных пространств из [10, с. 120]) или $\mathrm{G} = \mathrm{G}_R \oplus \mathrm{G}_0$. При этом операторы $\mathrm{P}, \mathrm{Q} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$,

$$\mathrm{P} : x(t) \to x_L(t) \doteq \begin{cases} x(a+0), & t = a \\ x(t-0), & t \in (a,b] \end{cases},$$

$$\mathrm{Q} : x(t) \to x_R(t) \doteq \begin{cases} x(t+0), & t \in [a,b) \\ x(b-0), & t = b \end{cases},$$

обладают следующими свойствами:

$$\operatorname{Im}\mathrm{P} = \mathrm{G}_{L},\ \operatorname{Ker}\mathrm{P} = \mathrm{G}_{0},\ \operatorname{Im}\mathrm{Q} = \mathrm{G}_{R},\ \operatorname{Ker}\mathrm{Q} = \mathrm{G}_{0},$$

$$\mathrm{P}^2 = \mathrm{P},\ \mathrm{PQ} = \mathrm{P},\ \mathrm{QP} = \mathrm{Q},\ \mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q}. \tag{2.1}$$

Проекторы P и Q непрерывны по sup-норме, что следует из очевидных неравенств

$$\|\mathrm{P}x\| \leqslant \|x\| \quad \text{и} \quad \|\mathrm{Q}x\| \leqslant \|x\| \qquad \forall x \in \mathrm{G}. \tag{2.2}$$

В частности, $\|\mathrm{P}x\| = \|\mathrm{Q}x\|$ для всех $x \in \mathrm{G}$. Действительно, в соответствии с (2.1) и (2.2) справедливо $\|\mathrm{P}x\| = \|\mathrm{PQ}x\| \leqslant \|\mathrm{Q}x\|$ и аналогично $\|\mathrm{Q}x\| \leqslant \|\mathrm{P}x\|$.

З а м е ч а н и е 2.2. Если $x \in \mathrm{G}_0$, а $y \in \mathrm{G}$, то $xy = yx \in \mathrm{G}_0$. Действительно, если $y(t) \equiv 0$, то утверждение очевидно, если же $y(t) \not\equiv 0$, то $\|y\| > 0$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{t \in K : |x(t)\ y(t)| \geqslant \varepsilon\} \subseteq \{t \in K : |x(t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{\|y\|}\}$ конечно, т.е. $xy \in \mathrm{G}_0$. Таким образом, G_0 является двусторонним идеалом в G, причем если функции $x, y \in \mathrm{G}$ считать эквивалентными $(x \sim y)$ при $x - y \in \mathrm{G}_0$, то в соответствии с замечанием 2.1 справедливо $\mathrm{G}_L \approx \mathrm{G}/\mathrm{G}_0 \approx \mathrm{G}_R$. Другими словами, в каждом классе эквивалентности имеются ровно одна непрерывная слева и ровно одна непрерывная справа прерывистые функции ($x \sim \mathrm{P}x \sim \mathrm{Q}x$). Заметим также, что операторы P и Q являются эндоморфизмами алгебры G, а их ядро $\operatorname{Ker}\mathrm{P} = \operatorname{Ker}\mathrm{Q} = \mathrm{G}_0$ является двусторонним идеалом этой алгебры.

З а м е ч а н и е 2.3. Произвольный линейный непрерывный функционал $\Phi : \mathrm{G}_L \to \mathbb{C}$ допускает представление в виде интеграла Душника–Стилтьеса [2, с. 38], т.е. существует такая функция Q ограниченной вариации, что $\Phi(x) = \int_K x dQ$ для любой $x \in \mathrm{G}_L$. Там же приводится общий вид линейного непрерывного функционала в пространстве G. Заметим, что такое представление отнюдь не единственно возможное, в частности, существует представление функционала Φ через интеграл Перрона–Стилтьеса (см., например, [11]).

3. Алгебры $\mathrm{G}^T[a,b]$, $\Gamma[a,b]$ и $\mathrm{BV}[a,b]$

Произвольное конечное или счетное множество $T \doteq \{\tau_1, \tau_2, \dots\}$ попарно различных точек $\tau_k \in K$ будем называть *разбиением* отрезка K, а совокупность всех разбиений K обозначим через $\mathbb{T}(K)$. Пустое множество мы также включаем в $\mathbb{T}(K)$ – оно является наименьшим элементом частичного порядка на $\mathbb{T}(K)$, заданного естественным образом: разбиение T предшествует разбиению S, если $T \subseteq S$.

Элементы из $\mathbb{T}(K)$ следовало бы называть σ-разбиениями, подчеркивая их счетность, однако в этом нет надобности.

Зафиксируем $T \in \mathbb{T}(K)$ и для любой функции $x \in \mathrm{G}$ введем обозначения:

$$x_k^- \doteq x(\tau_k - 0) - x(\tau_k), \quad x_k^+ \doteq x(\tau_k + 0) - x(\tau_k) \quad \forall\, \tau_k \in T. \tag{3.1}$$

Мы полагаем $x_k^- = 0$ при $\tau_k = a$ и $x_k^+ = 0$ при $\tau_k = b$.

Через $\lceil x \rceil_T$ обозначим ряд (и его сумму, если ряд сходится)

$$\lceil x \rceil_T \doteq \sum_{\tau_k \in T} (|x_k^-| + |x_k^+|), \tag{3.2}$$

а через $\mathrm{G}^T \doteq \mathrm{G}^T[a,b]$ обозначим совокупность всех тех функций $x \in \mathrm{G}$, что ряд $\lceil x \rceil_T$ сходится. Поскольку T – не более чем счетное множество, то ряд $\lceil x \rceil_T$ трактуется естественным образом: $|x_1^-| + |x_1^+| + |x_2^-| + |x_2^+| + \dots$. Относительно естественных операций сложения и умножения G^T является алгеброй над $\mathbb{C}$. Действительно, если $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathrm{G}^T$, $u = \lambda x$, $v = x + y$, $w = xy$, то справедливы равенства

$$u_k^- = \lambda x_k^-, \quad u_k^+ = \lambda x_k^+, \quad v_k^- = x_k^- + y_k^-, \quad v_k^+ = x_k^+ + y_k^+,$$

$$w_k^- = x(\tau_k - 0)\, y(\tau_k - 0) - x(\tau_k)\, y(\tau_k), \tag{3.3}$$

$$w_k^+ = x(\tau_k + 0)\, y(\tau_k + 0) - x(\tau_k)\, y(\tau_k),$$

поэтому $w_k^- = x(\tau_k - 0)\, y_k^- + x_k^-\, y(\tau_k)$, $w_k^+ = x(\tau_k + 0)\, y_k^+ + x_k^+\, y(\tau_k)$, $\lceil u \rceil_T = |\lambda| \cdot \lceil x \rceil_T < \infty$, $\lceil v \rceil_T \leqslant \lceil x \rceil_T + \lceil y \rceil_T < \infty$, $\lceil w \rceil_T \leqslant \|x\| \cdot \lceil y \rceil_T + \lceil x \rceil_T \cdot \|y\| < \infty$. Таким образом, $u, v, w \in \mathrm{G}^T$.

Если T – конечное множество, то справедливо равенство $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}$, в частности, $\mathrm{G}^{\varnothing} = \mathrm{G}$. Всякая функция ограниченной вариации принадлежит G^T, каково бы ни было $T \in \mathbb{T}(K)$. Действительно, если $x \in \mathrm{BV}$ и $S \doteq T \cap T(x)$, то $x_k^- = x_k^+ = 0$ для любого $\tau_k \in T \backslash S$, поэтому $\lceil x \rceil_T = \lceil x \rceil_S \leqslant \lceil x \rceil_{T(x)} < \infty$, следовательно, $x \in \mathrm{G}^T$. Таким образом, для любого T справедливы включения $\mathrm{BV} \subset \mathrm{G}^T \subseteq \mathrm{G}$, а поскольку любая непрерывная функция, имеющая неограниченное изменение, принадлежит G^T, то первое включение – строгое. Более того, между BV и G^T заключено пространство $\Gamma \doteq \Gamma[a,b]$, состоящее из тех функций $x \in \mathrm{G}$, что ряд $\lceil x \rceil_{T(x)}$ сходится. Примером функции из G, не принадлежащей Γ, служит функция из примера 1.1. Так же, как это сделано для пространств G^T (см. (3.3)), доказывается, что Γ – это алгебра. Действительно, если $T \doteq T(x) \cup T(y)$, то $T(u) \subseteq T(x)$, $T(v) \subseteq T$, $T(w) \subseteq T$, $\lceil u \rceil_{T(u)} = |\lambda| \lceil x \rceil_{T(x)} < \infty$,

$$\lceil v \rceil_{T(v)} = \lceil v \rceil_T \leqslant \lceil x \rceil_T + \lceil y \rceil_T = \lceil x \rceil_{T(x)} + \lceil y \rceil_{T(y)} < \infty,$$

$$\lceil w \rceil_{T(w)} = \lceil w \rceil_T \leqslant \|x\| \lceil y \rceil_T + \lceil x \rceil_T \|y\| = \|x\| \lceil y \rceil_{T(y)} + \lceil x \rceil_{T(x)} \|y\| < \infty.$$

Заметим, что $\mathrm{KC} \subset \Gamma$, т.е. имеет место диаграмма включения подалгебр алгебры G прерывистых функций:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{CBV} & \to & \mathrm{C} \to \mathrm{KC} & & & & & & \\ & \searrow & & \searrow & & & & & \\ & & \mathrm{BV} & \to & \Gamma & \to & \left\{ \mathrm{G}^T \right\}_{T \in \mathbb{T}(K)} & \to & \mathrm{G} \end{array} . \qquad (3.4)$$

Относительно решетки пространств $\{ \mathrm{G}^T \}$ в зависимости от параметра $T \in \mathbb{T}(K)$ можно сказать следующее. Назовем разбиения T и S *эквивалентными* $(T \sim S)$, если их симметрическая разность конечна, т.е. $\mathrm{card}\,(T \Delta S) < \infty$. Рефлексивность и симметричность очевидны, а транзитивность следует из легко проверяемого тождества $T \Delta S = (T \Delta R)\, \Delta\, (R \Delta S)$. Очевидно, все конечные разбиения эквивалентны между собой.

Л е м м а 3.1. *Пусть* $T, S \in \mathbb{T}(K)$.

1. Если $S \subseteq T$ *, то* $\mathrm{G}^T \subseteq \mathrm{G}^S$.

2. $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}^S$ *тогда и только тогда, когда* $T \sim S$.

3. Если $U = T \cup S$ *, то* $\mathrm{G}^T \cap \mathrm{G}^S = \mathrm{G}^U$.

4. Если $V = T \cap S$ *, то* $\mathrm{G}^T \cup \mathrm{G}^S \subseteq \mathrm{G}^V$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Если $x \in \mathrm{G}^T$ и $S \subseteq T$, то $x \in \mathrm{G}^S$, поскольку $\lceil x \rceil_S \leqslant \lceil x \rceil_T < \infty$.

2. Пусть разбиение $T \Delta S$ конечно. Справедливо тождество $T \Delta S = Q \cup R$, где $Q \doteq T \backslash S$, $R \doteq S \backslash T$, следовательно, очевидное равенство $\lceil x \rceil_T + \lceil x \rceil_R = \lceil x \rceil_S + \lceil x \rceil_Q$ и конечность множеств Q и R означают, что ряды $\lceil x \rceil_T$ и $\lceil x \rceil_S$ сходятся или расходятся одновременно.

Обратно. Если T и S не эквивалентны, то, по крайней мере, одно из разбиений Q или R бесконечно. Допустим, что это Q . Тогда функция x , у которой $x(\tau_k) = \frac{1}{k}$ при $\tau_k \in Q$ и $x(t) = 0$ при $t \in K \backslash Q$, принадлежит G^S , но не принадлежит G^T . Действительно, включение $x \in \mathrm{G}_0$ очевидно, поэтому в силу леммы 2.1 справедливо $x(\tau_k - 0) = 0$ при $\tau_k \in S \cap (a, b]$ и $x(\tau_k + 0) = 0$ при $\tau_k \in S \cap [a, b)$. Кроме того, $x(\tau_k) = 0$ для всех $\tau_k \in S$, следовательно, $x_k^- = x_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in S$, поэтому $x \in \mathrm{G}^S$. С другой стороны, $\lceil x \rceil_T \geqslant \lceil x \rceil_Q = 2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, поэтому $x \notin \mathrm{G}^T$.

3. Включения $T \subseteq U$ и $S \subseteq U$ влекут включения $\mathrm{G}^U \subseteq \mathrm{G}^T$ и $\mathrm{G}^U \subseteq \mathrm{G}^S$, следовательно, $\mathrm{G}^U \subseteq \mathrm{G}^T \cap \mathrm{G}^S$.

Если же $x \in \mathrm{G}^T \cap \mathrm{G}^S$, то $x \in \mathrm{G}^T$ и $x \in \mathrm{G}^S$, поэтому $\lceil x \rceil_T < \infty$ и $\lceil x \rceil_S < \infty$, а поскольку $\lceil x \rceil_U \leqslant \lceil x \rceil_T + \lceil x \rceil_S < \infty$, то $x \in \mathrm{G}^U$.

4. Поскольку $V \subseteq T$ и $V \subseteq S$, то $\mathrm{G}^T \subseteq \mathrm{G}^V$ и $\mathrm{G}^S \subseteq \mathrm{G}^V$, поэтому $\mathrm{G}^T \cup \mathrm{G}^S \subseteq \mathrm{G}^V$. Лемма доказана.

Функция Хевисайда $\theta(t) \doteq \begin{cases} 0 & , \quad t \leqslant 0 \\ 1 & , \quad t > 0 \end{cases}$ и произвольная точка $\tau \in K$ порождают ступенчатые функции $\xi_\tau(t) \doteq -\theta(\tau - t)$ и $\eta_\tau(t) \doteq \theta(t - \tau)$. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: если $\tau = 0 \in K$, то $\xi(\cdot) \doteq \xi_0(\cdot)$ и $\eta(\cdot) \doteq \eta_0(\cdot)$, а если $\tau = \tau_k \in T$, то $\xi_k(\cdot) \doteq \xi_{\tau_k}(\cdot)$ и $\eta_k(\cdot) \doteq \eta_{\tau_k}(\cdot)$. Другими словами,

$$\xi_k(t) = \begin{cases} -1 & , \quad t < \tau_k \\ 0 & , \quad t \geqslant \tau_k \end{cases}, \qquad \eta_k(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leqslant \tau_k \\ 1 & , \quad t > \tau_k \end{cases}.$$

Легко проверить, что для всякой функции $x : K \to \mathbb{C}$, непрерывной в точке $\tau \in K$, и для любых $\alpha, \beta \in K$ существуют интегралы Римана–Стилтьеса $\int\limits_\alpha^\beta x d\xi_\tau$ и $\int\limits_\alpha^\beta x d\eta_\tau$, причем

$$\int\limits_\alpha^\beta x d\xi_\tau = x(\tau) \int\limits_\alpha^\beta d\xi_\tau \quad \text{и} \quad \int\limits_\alpha^\beta x d\eta_\tau = x(\tau) \int\limits_\alpha^\beta d\eta_\tau. \tag{3.5}$$

В дальнейшем мы будем иметь дело в основном с интегралами Римана–Стилтьеса и оговаривать название интеграла будем лишь в исключительных случаях.

Замечание 3.1. Для любого $\alpha \in K$ и для любой функции $x \in \mathrm{G}^T$ функциональный ряд

$$x_{_T}(t) \doteq x_{_T}(t, \alpha) \doteq -\sum_{\tau_k \in T} x_k^- \int\limits_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} x_k^+ \int\limits_\alpha^t d\eta_k \tag{3.6}$$

абсолютно и равномерно на K сходится, поскольку

$$\sum_{\tau_k \in T} \Big| x_k^- \int\limits_\alpha^t d\xi_k \Big| + \sum_{\tau_k \in T} \Big| x_k^+ \int\limits_\alpha^t d\eta_k \Big| \leqslant \lceil x \rceil_{_T} < \infty.$$

Сумму ряда будем обозначать так же, как и сам ряд, – через $x_{_T}(t)$. В случае $T = \varnothing$ полагаем $x_{_T}(t) \equiv 0$. В соответствии с [9, с. 336] функции вида (3.6) будем называть *функциями скачков.* Там же отмечается, что $x_{_T} \in \mathrm{BV}$ и

$$\operatorname{Var} x_{_T} = \lceil x \rceil_{_T}. \tag{3.7}$$

Здесь и в дальнейшем через $\operatorname{Var} y$ обозначаем полную вариацию функции y на отрезке K. Наряду с (3.6) определена функция

$$x^{_T}(t) \doteq x^{_T}(t, \alpha) \doteq x(t) - x_{_T}(t), \tag{3.8}$$

также зависящая от параметра α. В дальнейшем мы считаем, что точка $\alpha \in K$ фиксирована, поэтому зависимость от α в обозначении функций x_T и x^T чаще всего будет отсутствовать. Заметим также, что ряд (3.6) следовало бы писать

$$- \sum_{\tau_k \in T \cap (a,b]} x_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T \cap [a,b)} x_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k,$$

подчеркивая его независимость от левого скачка функции x в точке a и от правого скачка в точке b, однако в соответствии с соглашением в (3.1) мы полагаем $x_k^- = 0$ при $\tau_k = a$ и $x_k^+ = 0$ при $\tau_k = b$ и в дальнейшем используем запись (3.6).

З а м е ч а н и е 3.2. Поскольку $x_T \in \mathrm{BV} \subset \mathrm{G}^T$, то и $x^T \in \mathrm{G}^T$. Более того, в соответствии с [9, с. 336] справедливы равенства $(x_T)_k^- = x_k^-$ и $(x_T)_k^+ = x_k^+$, поэтому $(x^T)_k^- = (x^T)_k^+ = 0$. Последнее равенство означает, в частности, что x^T непрерывна в каждой точке разбиения T. Таким образом,

$$\begin{gathered} \lceil x_T \rceil_T = \lceil x \rceil_T < \infty, \;\; \lceil x^T \rceil_T = 0, \\ (x_T)_T = x_T, \;\; (x_T)^T = 0, \;\; (x^T)_T = 0, \;\; (x^T)^T = x^T. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Кроме того, легко показать, что если $x, y \in \mathrm{G}^T$ и $x, y \in \mathrm{G}^S$, то

$$(x_T)_S = x_{T\cap S}, \;\; (x_T)^S = x_{T\setminus S}, \;\; (x^T)_S = x_{S\setminus T}, \;\; (x^T)^S = x^{T\cup S}. \tag{3.10}$$

Действительно, согласно лемме 3.1 справедливо $x, y \in \mathrm{G}^{T\cup S}$, поэтому все функции в формулах определены. Если $z \doteq x_T$, $Q \doteq T\setminus S$, $P \doteq T \cap S$, $R \doteq S\setminus T$, то $x_T = x_Q + x_P$ и $(x_T)_S = z_S = z_P + z_R = (x_Q + x_P)_P + (x_T)_R = (x_P)_P = x_P = x_{T\cap S}$. Остальные формулы (3.10) легко выводятся из первой.

З а м е ч а н и е 3.3. Одновременно мы выяснили, что каждый из операторов $P_T : x \to x_T$ и $P^T : x \to x^T$ является проектором в G^T. Изучению свойств этих операторов посвящены последующие параграфы работы, здесь же отметим лишь, что образ $\operatorname{Im} P^{T}$ состоит из функций, непрерывных в каждой точке $\tau_k \in T$, а ядро $\operatorname{Ker} P^{T}$ состоит из функций скачков вида

$$z(t) \doteq -\sum_{\tau_k \in T} g_k \int_{\alpha}^{t} d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} h_k \int_{\alpha}^{t} d\eta_k, \qquad \sum_{\tau_k \in T} (|g_k| + |h_k|) < \infty,$$

причем если $\tau_k = a$, то $g_k = 0$, а если $\tau_k = b$, то $h_k = 0$. Эти же пространства являются соответственно ядром и образом другого оператора, т.е. $\operatorname{Ker} P_{T} = \operatorname{Im} P^{T}$ и $\operatorname{Im} P_{T} = \operatorname{Ker} P^{T}$.

З а м е ч а н и е 3.4. Если $x \in \Gamma$ [или если $x \in \mathrm{BV}$], то для всех T, таких, что $T \supseteq T(x)$, справедливо $x_{T} = x_{T(x)}$ и $x^{T} = x^{T(x)}$, причем $x^{T} \in \mathrm{C}$ [соответственно $x^{T} \in \mathrm{CBV}$]. Введя обозначения $x_c \doteq x_{T(x)}$ и $x^c \doteq x^{T(x)}$, обнаруживаем, что представление (3.8) при $x \in \mathrm{BV}$ совпадает с известным разложением Лебега функции ограниченной вариации на сумму непрерывной функции ограниченной вариации и функции скачков: $x = x^c + x_c$. Здесь функция скачков понимается в смысле [3, с. 206]. Таким образом, в пространстве Γ [или в BV] также определены проекторы $P_{\mathrm{c}} : x \to x_{\mathrm{c}}$ и $P^{\mathrm{c}} : x \to x^{\mathrm{c}}$, и их свойства идентичны свойствам операторов P_{T} и P^{T}. Кроме того, в BV имеет место равенство $\operatorname{Var} x = \operatorname{Var} x^c + \operatorname{Var} x_c$.

Формулы (3.3) порождают равенства $u_{T} = \lambda x_{T}$, $v_{T} = x_{T} + y_{T}$, $u^{T} = \lambda x^{T}$, $v^{T} = x^{T} + y^{T}$, а для того чтобы найти формулы для w_{T} и w^{T}, следует доказать ряд вспомогательных утверждений.

Л е м м а 3.2. *При $k \neq m$ справедливы формулы*

$$\int_{\alpha}^{t} d\xi_k \int_{\alpha}^{t} d\xi_m = \int_{\alpha}^{\tau_k} d\xi_m \int_{\alpha}^{t} d\xi_k + \int_{\alpha}^{\tau_m} d\xi_k \int_{\alpha}^{t} d\xi_m,$$

$$\int_{\alpha}^{t} d\xi_k \int_{\alpha}^{t} d\eta_m = \int_{\alpha}^{\tau_k} d\eta_m \int_{\alpha}^{t} d\xi_k + \int_{\alpha}^{\tau_m} d\xi_k \int_{\alpha}^{t} d\eta_m,$$

$$\int_{\alpha}^{t} d\eta_k \int_{\alpha}^{t} d\eta_m = \int_{\alpha}^{\tau_k} d\eta_m \int_{\alpha}^{t} d\eta_k + \int_{\alpha}^{\tau_m} d\eta_k \int_{\alpha}^{t} d\eta_m$$

и при всех k

$$\Big[\int_\alpha^t d\xi_k\Big]^2 = -\big(1+2\xi_k(\alpha)\big)\int_\alpha^t d\xi_k, \quad \Big[\int_\alpha^t d\eta_k\Big]^2 = \big(1-2\eta_k(\alpha)\big)\int_\alpha^t d\eta_k,$$

$$\int_\alpha^t d\xi_k \int_\alpha^t d\eta_k = -\eta_k(\alpha)\int_\alpha^t d\xi_k - \xi_k(\alpha)\int_\alpha^t d\eta_k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Левая часть первой формулы равна

$$\int_\alpha^t \Big[\int_\alpha^t d\xi_k\Big] d\xi_m = \int_\alpha^t \Big[\int_s^t d\xi_k + \int_\alpha^s d\xi_k\Big] d\xi_m(s) =$$

$$= \int_\alpha^t \Big[\int_\alpha^s d\xi_m\Big] d\xi_k(s) + \int_\alpha^t \Big[\int_\alpha^s d\xi_k\Big] d\xi_m(s).$$

В последнем равенстве мы поменяли порядок интегрирования у первого слагаемого. Обе подынтегральные функции непрерывны в точках τ_k и τ_m соответственно, и нам остается лишь сослаться на формулы (3.5).

Вторая и третья формулы доказываются аналогично. Последние три формулы проверяются непосредственно, опираясь на тождества $\xi_k^2 = -\xi_k$, $\eta_k^2 = \eta_k$ и $\xi_k\eta_k = 0$ соответственно.

Л е м м а 3.3. *Пусть $T \in \mathbb{T}(K)$, $\alpha \in K$ и ограниченная функция $x : K \to \mathbb{C}$ непрерывна в каждой точке $\tau_k \in T$. Для любой функции скачков*

$$y(\tau) \doteq -\sum_{\tau_k\in T} y_k^- \int_\alpha^\tau d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T} y_k^+ \int_\alpha^\tau d\eta_k, \quad \sum_{\tau_k\in T}(|y_k^-| + |y_k^+|) < \infty,$$

существует интеграл $\int_\alpha^t x dy$ (при всех $t \in K$), и он равен функции скачков

$$z(t) \doteq -\sum_{\tau_k\in T} x(\tau_k)\, y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T} x(\tau_k)\, y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k. \tag{3.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\operatorname{card} T < \infty$ или если x тождественно равна нулю, то утверждение очевидно, в противном случае справедливо неравенство $M \doteq \sup\limits_{t \in K} |x(t)| > 0$. Для любого $r \geqslant 1$ через T_r обозначим конечное разбиение $\{\tau_1, \ldots, \tau_r\}$, состоящее из первых r точек разбиения T , а через y_r – ступенчатую функцию y_{T_r} . Согласно формуле (3.7) справедливо $\operatorname{Var}(y_r - y) = \lceil y \rceil_{T \setminus T_r} \underset{r}{\to} 0$, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует N_1 такое, что $r > N_1$ влечет $\operatorname{Var}(y_r - y) < \frac{\varepsilon}{3M}$.

В силу равенств (3.5) для любого r существуют интегралы $z_r(t) \doteq \int\limits_{\alpha}^{t} x dy_r$, причем $z_r = z_{T_r}$, следовательно, последовательность $\{z_r\}$ является последовательностью частичных сумм равномерно сходящегося ряда (3.11) (сумма которого равна z). Тем самым существует N_2 , что для любых $r > N_2$ и любых $t \in K$ справедлива оценка $\left| z(t) - z_r(t) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ или $\left| z(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} x dy_r \right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Пусть $r \doteq 1 + \max\{N_1, N_2\}$, и зафиксируем $t \in K$ (без ограничения общности считаем, что $t \geqslant \alpha$). Поскольку существует интеграл $\int\limits_{\alpha}^{t} x dy_r$, то существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $\alpha = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = t$, в котором $\max\limits_i (s_i - s_{i-1}) < \delta$, и для любого набора чисел $\gamma_i \in [s_{i-1}, s_i],\ i = 1, \ldots, n$, выполнено

$$\Big| \int\limits_{\alpha}^{t} x dy_r - \sum_{i=1}^{n} x(\gamma_i) \left[y_r(s_i) - y_r(s_{i-1}) \right] \Big| < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, справедлива цепочка неравенств

$$\Big| z(t) - \sum_{i=1}^{n} x(\gamma_i) \left[y(s_i) - y(s_{i-1}) \right] \Big| \leqslant \Big| z(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} x dy_r \Big| +$$

$$+ \Big| \int\limits_{\alpha}^{t} x dy_r - \sum_{i=1}^{n} x(\gamma_i) \left[y_r(s_i) - y_r(s_{i-1}) \right] \Big| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} |x(\gamma_i)| \cdot \Big| \left[y_r(s_i) - y(s_i) \right] - \left[y_r(s_{i-1}) - y(s_{i-1}) \right] \Big| <$$

$$< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + M \cdot \mathrm{Var}\,(y_r - y) < \varepsilon,$$

поэтому существует интеграл $\int\limits_{\alpha}^{t} x dy$ и он равен $z(t)$, т.е. сумме сходящегося ряда (3.11). Случай $t < \alpha$ симметричен.

С л е д с т в и е 3.1. *Если* $x \in \mathrm{G}$ *и* $y \in \mathrm{BV}$ *таковы, что* $T(x) \cap T(y) = \varnothing$, *то существует интеграл* $\int\limits_{\alpha}^{t} x dy$ *и*

$$\int\limits_{\alpha}^{t} x dy = \int\limits_{\alpha}^{t} x dy^c - \sum_{\tau_k \in T(y)} x(\tau_k)\, y_k^- \int\limits_{\alpha}^{t} d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T(y)} x(\tau_k)\, y_k^+ \int\limits_{\alpha}^{t} d\eta_k.$$

Утверждение справедливо в силу теоремы 1.2.

Л е м м а 3.4. *Каковы бы ни были функции* $x, y \in \mathrm{G}^T$, *интегралы* $\int\limits_{\alpha}^{t} x^T dy_T$, $\int\limits_{\alpha}^{t} y^T dx_T$, $\int\limits_{\alpha}^{t} x_T dy^T$ *и* $\int\limits_{\alpha}^{t} y_T dx^T$ *существуют и справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \big(xy\big)_T(t) &= x_T(t)\, y_T(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} x^T dy_T + \int\limits_{\alpha}^{t} y^T dx_T\,, \\ \big(xy\big)^T(t) &= x^T(t)\, y^T(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} x_T dy^T + \int\limits_{\alpha}^{t} y_T dx^T. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формулы из леммы 3.2 имеют более компактный вид (δ_{km} – символ Кронекера):

$$\int\limits_{\alpha}^{t} d\xi_k \int\limits_{\alpha}^{t} d\xi_m = -\delta_{km} \int\limits_{\alpha}^{t} d\xi_k + \int\limits_{\alpha}^{\tau_k} d\xi_m \int\limits_{\alpha}^{t} d\xi_k + \int\limits_{\alpha}^{\tau_m} d\xi_k \int\limits_{\alpha}^{t} d\xi_m,$$

$$\int\limits_{\alpha}^{t} d\xi_k \int\limits_{\alpha}^{t} d\eta_m = \int\limits_{\alpha}^{\tau_k} d\eta_m \int\limits_{\alpha}^{t} d\xi_k + \int\limits_{\alpha}^{\tau_m} d\xi_k \int\limits_{\alpha}^{t} d\eta_m,$$

$$\int\limits_{\alpha}^{t} d\eta_k \int\limits_{\alpha}^{t} d\eta_m = \delta_{km} \int\limits_{\alpha}^{t} d\eta_k + \int\limits_{\alpha}^{\tau_k} d\eta_m \int\limits_{\alpha}^{t} d\eta_k + \int\limits_{\alpha}^{\tau_m} d\eta_k \int\limits_{\alpha}^{t} d\eta_m.$$

В следующей цепочке равенств фигурируют абсолютно и равномерно на K сходящиеся функциональные ряды, поэтому все операции корректны, а суммирование ведется по разбиению T (и мы будем писать $\sum\limits_k$ вместо $\sum\limits_{\tau_k\in T}$):

$$\sigma \doteq x_T(t)\, y_T(t) =$$

$$= \Big[-\sum_k x_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_k x_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k\Big]\Big[-\sum_m y_m^- \int_\alpha^t d\xi_m + \sum_m y_m^+ \int_\alpha^t d\eta_m\Big] =$$

$$= \sum_{k,m} x_k^- y_m^- \Big[\int_\alpha^{\tau_k} d\xi_m \int_\alpha^t d\xi_k \ + \int_\alpha^{\tau_m} d\xi_k \int_\alpha^t d\xi_m\Big] - \sum_k x_k^- y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k -$$

$$- \sum_{k,m} x_k^- y_m^+ \Big[\int_\alpha^{\tau_k} d\eta_m \int_\alpha^t d\xi_k \ + \int_\alpha^{\tau_m} d\xi_k \int_\alpha^t d\eta_m\Big] -$$

$$- \sum_{k,m} x_k^+ y_m^- \Big[\int_\alpha^{\tau_k} d\xi_m \int_\alpha^t d\eta_k \ + \int_\alpha^{\tau_m} d\eta_k \int_\alpha^t d\xi_m\Big] +$$

$$+ \sum_{k,m} x_k^+ y_m^+ \Big[\int_\alpha^{\tau_k} d\eta_m \int_\alpha^t d\eta_k \ + \int_\alpha^{\tau_m} d\eta_k \int_\alpha^t d\eta_m\Big] + \sum_k x_k^+ y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k.$$

Приведя подобные члены, имеем равенства

$$\sigma = -\sum_k x_k^- \,[y(\tau_k) - y^T(\tau_k)] \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_k x_k^+ \,[y(\tau_k) - y^T(\tau_k)] \int_\alpha^t d\eta_k -$$

$$- \sum_k x_k^- y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_k x_k^+ y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k -$$

$$- \sum_m y_m^- \,[x(\tau_m) - x^T(\tau_m)] \int_\alpha^t d\xi_m + \sum_m y_m^+ \,[x(\tau_m) - x^T(\tau_m)] \int_\alpha^t d\eta_m =$$

$$= \sigma_1 - \sum_k \big[\, x_k^- y_k^- + x_k^- y(\tau_k) + x(\tau_k) y_k^- \big] \int_\alpha^t d\xi_k +$$

$$+\sum_k [\,x_k^+ y_k^+ + x_k^+ y(\tau_k) + x(\tau_k) y_k^+]\int\limits_\alpha^t d\eta_k = \sigma_1 + \bigl(xy\bigr)_{T}(t),$$

где через σ_1 обозначена функция

$$\sigma_1 \doteq \sum_k x_k^- y^T(\tau_k)\int\limits_\alpha^t d\xi_k - \sum_k x_k^+ y^T(\tau_k)\int\limits_\alpha^t d\eta_k +$$

$$+\sum_k y_k^- x^T(\tau_k)\int\limits_\alpha^t d\xi_k - \sum_k y_k^+ x^T(\tau_k)\int\limits_\alpha^t d\eta_k.$$

Приведя еще раз подобные члены (в силу непрерывности функций x^T и y^T в точках $\tau_k \in T$ справедлива лемма 3.3), получаем

$$\sigma_1 = \int\limits_\alpha^t y^T d\Bigl[\sum_k x_k^- \xi_k - \sum_k x_k^+ \eta_k\Bigr] + \int\limits_\alpha^t x^T d\Bigl[\sum_k y_k^- \xi_k - \sum_k y_k^+ \eta_k\Bigr] =$$

$$= -\int\limits_\alpha^t y^T dx_{T} - \int\limits_\alpha^t x^T dy_{T}.$$

Одновременно мы доказали существование интегралов.

Сравнивая начало и конец цепочки для σ, получаем первое равенство (3.12). Что касается второго, то в силу формулы интегрирования по частям и очевидных равенств $x_{T}(\alpha) = y_{T}(\alpha) = 0$ для его доказательства достаточно сложить левые и правые части формул (3.12) и получить тождество.

З а м е ч а н и е 3.5. Возвращаясь к формулам (3.3), мы можем теперь сказать, что если $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathrm{G}^T$, $u = \lambda x$, $v = x + y$, $w = xy$, то $u, v, w \in \mathrm{G}^T$ и

$$u_{T} = \lambda x_{T},\;\; u^T = \lambda x^T,\;\; v_{T} = x_{T} + y_{T},\;\; v^T = x^T + y^T,$$

$$w_{T}(t) = x_{T}(t)\, y_{T}(t) + \int\limits_\alpha^t x^T dy_{T} + \int\limits_\alpha^t y^T dx_{T},$$

$$w^T(t) = x^T(t)\, y^T(t) + \int\limits_\alpha^t x_{T} dy^T + \int\limits_\alpha^t y_{T} dx^T.$$

З а м е ч а н и е 3.6. Пусть $x, y \in \Gamma$ [или $x, y \in \mathrm{BV}$], $w = xy$ и T таково, что $T \supseteq T(x) \cup T(y)$, тогда $x^T, y^T, w^T \in \mathrm{C}$ [соответственно $x^T, y^T, w^T \in \mathrm{CBV}$], поэтому непрерывные составляющие x^c, y^c, w^c этих функций (см. замечание 3.4) связаны соотношением

$$w^c(t) = (xy)^c(t) = x^c(t)\, y^c(t) + \int\limits_\alpha^t x_c dy^c + \int\limits_\alpha^t y_c dx^c,$$

а для функций скачков x_c, y_c, w_c справедливо тождество

$$w_c(t) = (xy)_c(t) = x_c(t)\, y_c(t) + \int\limits_\alpha^t x^c dy_c + \int\limits_\alpha^t y^c dx_c.$$

С л е д с т в и е 3.2. *Пусть* $T \in \mathbb{T}(K)$ *и* $x, y \in \mathrm{G}^T$. *Если существует один из интегралов*

$$\int\limits_K x_T dy_T, \ \int\limits_K y_T dx_T, \ \int\limits_K x dy_T, \ \int\limits_K y_T dx, \ \int\limits_K x_T dy, \ \int\limits_K y dx_T, \tag{3.13}$$

то существуют остальные интегралы (3.13), *а первая формула* (3.12) *принимает вид*

$$\big(xy\big)_T(t) = \int\limits_\alpha^t x dy_T + \int\limits_\alpha^t y dx_T. \tag{3.14}$$

Если существует один из интегралов

$$\int\limits_K x^T dy^T, \ \int\limits_K y^T dx^T, \ \int\limits_K x dy^T, \ \int\limits_K y^T dx, \ \int\limits_K x^T dy, \ \int\limits_K y dx^T, \tag{3.15}$$

то существуют остальные интегралы (3.15), *а вторая формула* (3.12) *принимает вид*

$$\big(xy\big)^T(t) = x(\alpha)\, y(\alpha) + \int\limits_\alpha^t x dy^T + \int\limits_\alpha^t y dx^T. \tag{3.16}$$

Докажем формулу (3.16). Если, например, существует интеграл $\int\limits_K x^T dy^T$, то существуют интегралы $\int\limits_\alpha^t x^T dy^T$ и $\int\limits_\alpha^t y^T dx^T$, причем $\int\limits_\alpha^t x^T dy^T + \int\limits_\alpha^t y^T dx^T = x^T(t)y^T(t) - x^T(\alpha)y^T(\alpha)$. В силу леммы 3.4 существуют интегралы $\int\limits_\alpha^t xdy^T$ и $\int\limits_\alpha^t ydx^T$, а с учетом последнего равенства второе тождество (3.12) трансформируется в (3.16). Формула (3.14) доказывается аналогично (здесь применяем равенства $x_T(\alpha) = y_T(\alpha) = 0$).

С л е д с т в и е 3.3. *Пусть $T \in \mathbb{T}(K)$ и $x, y \in \mathrm{G}^T$. Если существует интеграл $\int\limits_K xdy$, то существует еще тринадцать интегралов: интеграл $\int\limits_K ydx$ и интегралы* (3.13) *и* (3.15).

Существование интеграла $\int\limits_K ydx$ хорошо известно. Поскольку существует интеграл $\int\limits_K xdy$, то в соответствии с [14, с. 117] одна из функций x или y непрерывна во всякой точке $t \in K$, т.е. $T(x) \cap T(y) = \varnothing$. Если $S \doteq T \cap T(y)$, то, очевидно, $y_T = y_S$, а функция x непрерывна в каждой точке $\tau_k \in S$. В силу леммы 3.3 существует интеграл $\int\limits_K xdy_S$, а вместе с ним и интегралы $\int\limits_K xdy_T$, $\int\limits_K xdy^T$ и другие интегралы (3.13) и (3.15).

С л е д с т в и е 3.4. *Для любых $x, y \in \mathrm{G}^T$ справедливо*

$$(x_T y_T)_T = x_T y_T, \quad (x_T y_T)^T = 0, \quad (x^T y^T)_T = 0, \quad (x^T y^T)^T = x^T y^T.$$

Утверждение немедленно следует из формул (3.12) и (3.9).

С л е д с т в и е 3.5. *Если $x, y \in \mathrm{G}^T$ и существует интеграл $\int\limits_K xdy$, то справедливо равенство*

$$\int\limits_\alpha^t xdy = \int\limits_\alpha^t xdy^T - \sum_{\tau_k \in T} x(\tau_k)\, y_k^- \int\limits_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} x(\tau_k)\, y_k^+ \int\limits_\alpha^t d\eta_k\,.$$

Утверждение следует из леммы 3.3.

З а м е ч а н и е 3.7. Пусть $x, y \in \Gamma$ [или $x, y \in \mathrm{BV}$]. Если существует один из интегралов

$$\int\limits_K x_c dy_c, \ \int\limits_K y_c dx_c, \ \int\limits_K x dy_c, \ \int\limits_K y_c dx, \ \int\limits_K x_c dy, \ \int\limits_K y dx_c, \tag{3.17}$$

то существуют остальные интегралы (3.17) и

$$\big(xy\big)_c(t) = \int\limits_\alpha^t x dy_c + \int\limits_\alpha^t y dx_c.$$

Если существует один из интегралов

$$\int\limits_K x^c dy^c, \ \int\limits_K y^c dx^c, \ \int\limits_K x dy^c, \ \int\limits_K y^c dx, \ \int\limits_K x^c dy, \ \int\limits_K y dx^c, \tag{3.18}$$

то существуют остальные интегралы (3.18) и

$$\big(xy\big)^c(t) = x(\alpha)\, y(\alpha) + \int\limits_\alpha^t x dy^c + \int\limits_\alpha^t y dx^c.$$

Если существует интеграл $\int\limits_K x dy$, то существует еще тринадцать интегралов: интеграл $\int\limits_K y dx$ и интегралы (3.17) и (3.18).

З а м е ч а н и е 3.8. Пусть $x, y \in \Gamma$ [или $x, y \in \mathrm{BV}$]. Тогда $(x_c y_c)_c = x_c y_c$, $(x_c y_c)^c = 0$, $(x^c y^c)_c = 0$, $(x^c y^c)^c = x^c y^c$.

4. Топологические свойства

4.1. Полнота $\mathrm{G}^T[a, b]$

Поскольку $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}$ при $\operatorname{card} T < \infty$, то G^T – полное пространство, однако, как показывает следующий пример, при счетном T пространство G^T не замкнуто в G по норме

$$\|x\| \doteq \sup_{t \in K} |x(t)|. \tag{4.1}$$

П р и м е р 4.1. Функция $x \in \mathrm{G}[0,1]$ такая, что $x(0)=0$ и $x(t)=t\{\frac{1}{t}\}$ при $t \neq 0$, является предельной (по норме (4.1)) для последовательности прерывистых функций

$$x_n(t) \doteq \begin{cases} 0 & , \quad t \in [0,\frac{1}{n}] \\ t\{\frac{1}{t}\} & , \quad t \in (\frac{1}{n},1] \end{cases} , \qquad n=1,2,\ldots .$$

Поскольку функции x_n имеют конечное число точек разрыва, то $x_n \in \mathrm{G}^T$ для любого T. В частности, $x_n \in \mathrm{G}^T$ для $T \doteq T(x)$, в то время как $x \notin \mathrm{G}^T$ (см. пример 1.1), следовательно, пространство G^T не является полным по норме (4.1).

Таким образом, решетка пространств $\{\mathrm{G}^T\}_{T\in\mathbb{T}(K)}$ содержит как полные, так и неполные пространства. Ниже мы покажем, что пространство G^T будет полным, если ввести норму

$$\|x\|_T \doteq \|x^T\| + \lceil x \rceil_T = \|x^T\| + \operatorname{Var} x_T. \tag{4.2}$$

Проверка аксиом нормы (4.2) не составляет труда. Более важно то, что норма (4.1) входит в семейство (4.2), – это имеет место при $T=\varnothing$. Заметим также, что в соответствии с замечанием 3.1 функция x^T зависит от выбора точки $\alpha \in K$, т.е. $x^T(\cdot) = x^T(\cdot,\alpha)$, поэтому и норма (4.2) зависит от α, т.е. $\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_T^\alpha$.

Л е м м а 4.1. *Пусть* $T,S \in \mathbb{T}(K)$.

1. Если $S \subseteq T$, *то* $\mathrm{G}^T \subseteq \mathrm{G}^S$ *и для любого* $x \in \mathrm{G}^T$ *имеет место неравенство* $\|x\|_S \leqslant \|x\|_T$.

2. Для любого $x \in \mathrm{G}^T$ *справедливо* $\|x\| \leqslant \|x\|_T$.

3. Если $T \sim S$, *то* $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}^S$ *и в пространстве* G^T $(=\mathrm{G}^S)$ *нормы* $\|\cdot\|_T$ *и* $\|\cdot\|_S$ *эквивалентны.*

4. Для любых $\alpha,\beta \in K$ *нормы* $\|\cdot\|_T^\alpha$ *и* $\|\cdot\|_T^\beta$ *эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Включение $\mathrm{G}^T \subseteq \mathrm{G}^S$ доказано в лемме 3.1. Пусть $x \in \mathrm{G}^T$. В силу представления (3.8) имеет место равенство

$$x^S(t) = x^T(t) + x_{T\setminus S}(t), \tag{4.3}$$

следовательно, $|x^S(t)| \leqslant |x^T(t)| + \lceil x\rceil_{T\setminus S}$ для всех $t \in K$, и поэтому $|x^S(t)| + \lceil x\rceil_S \leqslant |x^T(t)| + \lceil x\rceil_T \leqslant \|x\|_T$. Поскольку последняя оценка справедлива при всех $t \in K$, то $\|x\|_S \leqslant \|x\|_T$.

2. Неравенство $\|x\| \leqslant \|x\|_T$ следует из предыдущего пункта при $S = \varnothing$.

3. Равенство $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}^S$ доказано в лемме 3.1. Если $R \doteq T \cap S$, то в соответствии с первым пунктом $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}^S \subseteq \mathrm{G}^R$ и для любой $x \in \mathrm{G}^T$ имеют место равенства вида (4.3): $x^R(t) = x^T(t) + x_{T\setminus R}(t)$, $x^R(t) = x^S(t) + x_{S\setminus R}(t)$. Вычитая одно из другого, получаем, что при всех $t \in K$ справедливо $|x^S(t)| \leqslant |x^T(t)| + \lceil x\rceil_{T\Delta S}$, поэтому $\|x^S\| \leqslant \|x^T\| + \lceil x\rceil_{T\Delta S}$, следовательно, выражая $\|x^S\|$ и $\|x^T\|$ через $\|x\|_S$ и $\|x\|_T$ по формуле (4.2), получаем цепочку неравенств

$$\|x\|_S \leqslant \|x\|_T + 2\lceil x\rceil_{S\setminus R} = \|x\|_T + 2\lceil x\rceil_{S\setminus T} \leqslant$$

$$\leqslant \|x\|_T + 8\,\|x\| \cdot \mathrm{card}\,(S\setminus T) \leqslant \big(1 + 8\,\mathrm{card}\,(S\setminus T)\big) \cdot \|x\|_T.$$

Мы воспользовались очевидными неравенствами $|x_k^-| \leqslant 2\,\|x\|$ и $|x_k^+| \leqslant 2\,\|x\|$. Аналогично получается симметричное неравенство $\|x\|_T \leqslant \big(1 + 8\,\mathrm{card}\,(T\setminus S)\big) \cdot \|x\|_S$.

4. Через $x^T(t,\alpha)$ и $x^T(t,\beta)$ обозначим функции вида (3.8), подчеркивая их зависимость от точек α и β. В соответствии с (3.6) следующие соотношения носят элементарный характер:

$$x_T(t,\alpha) = x_T(t,\beta) + x_T(\beta,\alpha), \quad x^T(t,\alpha) - x^T(t,\beta) = x_T(\alpha,\beta),$$

$$\big|x^T(t,\alpha) - x^T(t,\beta)\big| \leqslant \lceil x\rceil_T, \quad \big\|x^T(\,\cdot\,,\alpha)\big\| \leqslant \big\|x^T(\,\cdot\,,\beta)\big\| + \lceil x\rceil_T,$$

$$\big\|x\big\|_T^\alpha = \big\|x^T(\,\cdot\,,\alpha)\big\| + \lceil x\rceil_T \leqslant \big\|x^T(\,\cdot\,,\beta)\big\| + 2\,\lceil x\rceil_T \leqslant 2\,\big\|x\big\|_T^\beta.$$

Аналогично $\|x\|_T^\beta \leqslant 2\,\|x\|_T^\alpha$, что и доказывает эквивалентность данных норм.

С л е д с т в и е 4.1. *Если* $\mathrm{card}\,T < \infty$, *то* $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}$ *и нормы* $\|\cdot\|_T$ *и* $\|\cdot\|$ *эквивалентны в* G.

Достаточно взять $S=\varnothing$ в третьем пункте леммы.

З а м е ч а н и е 4.1. При счетном T нормы $\|\cdot\|_T$ и $\|\cdot\|$ не являются эквивалентными в пространстве G^T. Например, семейство функций $x_n \in \mathrm{G}[0,1]$, таких, что $x_n(t)=0$ при $t\in[0,\frac{1}{n}]$ и $x_n(t)=\{\frac{1}{t}\}$ при $t\in[\frac{1}{n},1]$, вне множества $T \doteq \{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\}$ разрывов не имеет. Очевидно, $\|x_n\|=1$ при всех $n\geqslant 2$. С другой стороны, каждая из функций x_n принадлежит G^T, так как имеет конечное число точек разрыва (их количество равно $n-1$). Более того, все x_n непрерывны слева, а правые скачки равны по 1, поэтому какое бы $\gamma>0$ мы не взяли, найдется функция x_n из семейства, что $\|x_n\|_T>\gamma$. Это означает, что нет такого $\gamma>0$, что неравенство $\|x\|_T\leqslant\gamma\|x\|$ выполнено для всех $x\in\mathrm{G}^T$.

З а м е ч а н и е 4.2. Для любого $x\in\mathrm{G}^T$ справедливы неравенства $\|x\|\leqslant\|x\|_T\leqslant\|x\|+2\lceil x\rceil_T$.

Первое неравенство мы уже доказали. Что касается второго, то в силу (4.2) и (3.8) справедлива цепочка $\|x\|_T=\|x^T\|+\lceil x\rceil_T\leqslant$ $\leqslant\|x\|+\|x_T\|+\lceil x\rceil_T\leqslant\|x\|+\operatorname{Var}x_T+\lceil x\rceil_T=\|x\|+2\lceil x\rceil_T$.

Т е о р е м а 4.1. *Пространство* $\mathrm{G}^T[a,b]$ *банахово по норме* $\|\cdot\|_T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При конечном T утверждение очевидно в силу следствия 4.1. Пусть T счетно и $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в G^T по норме $\|\cdot\|_T$, т.е. $\|x_m-x_n\|_T\underset{m,n}{\longrightarrow}0$. Если $y_n\doteq(x_n)^T$ и $z_n\doteq(x_n)_T$, то $x_n=y_n+z_n$, $z_n(\alpha)=0$ и согласно замечанию 4.2 и определению (4.2)

$$\|x_m-x_n\|\underset{m,n}{\longrightarrow}0,\quad \|y_m-y_n\|\underset{m,n}{\longrightarrow}0,\quad \|z_m-z_n\|_{\mathrm{BV}}=\operatorname{Var}(z_m-z_n)\underset{m,n}{\longrightarrow}0$$

(применяем норму $\|x\|_{\mathrm{BV}}=|x(\alpha)|+\operatorname{Var}x$). В силу полноты пространств G и BV существуют $x,y\in\mathrm{G}$ и $z\in\mathrm{BV}\subset\mathrm{G}^T$, что

$$\|x_n-x\|\underset{n}{\to}0,\quad \|y_n-y\|\underset{n}{\to}0,\quad \|z_n-z\|_{\mathrm{BV}}\underset{n}{\to}0,\quad \|z_n-z\|\underset{n}{\to}0.$$

Так как $\|z_n-(x-y)\|\leqslant\|x_n-x\|+\|y_n-y\|\underset{n}{\to}0$, то $x-y=z$. Функция y является пределом равномерно сходящейся последовательности $\{y_n\}$ непрерывных в точках $\tau_k\in T$ функций, поэтому она непрерывна в этих точках, следовательно, $y_k^-=y_k^+=0$, $x_k^-=z_k^-$ и $x_k^+=z_k^+$. Таким образом, $\lceil x\rceil_T=\lceil z\rceil_T<\infty$, т.е. $x\in \mathrm{G}^T$, поэтому $y\in\mathrm{G}^T$, $x_T=z_T$ и $x^T=y+z^T$.

Так как $z_n^T=0$, то $z^T=0$. Действительно, если $w_n\doteq z-z_n$, то $w_n\in\mathrm{BV}$ и $\mathrm{Var}\,w_n=\mathrm{Var}\,w_n^c+\mathrm{Var}\,w_{nc}$. Поскольку $z_n\rightrightarrows z$ и все функции z_n непрерывны в точках множества $K\backslash T$, то и функции z,w_n непрерывны в этих точках. Тем самым $T(w_n)\subseteq T$ и $w_n^c=w_n^T=z^T-z_n^T=z^T$, следовательно,

$$\mathrm{Var}\,z^T+\mathrm{Var}\,w_{nc}=\mathrm{Var}\,w_n^c+\mathrm{Var}\,w_{nc}=\mathrm{Var}\,w_n=\mathrm{Var}\,(z-z_n)\underset{n}{\to}0,$$

поэтому $\mathrm{Var}\,z^T=0$ и, очевидно, $z^T=0$, $x^T=y$, $x_T=z$. Таким образом, $(x_n-x)^T=y_n-y$ и $(x_n-x)_T=z_n-z$, следовательно,

$$\|x_n-x\|_T=\|y_n-y\|+\mathrm{Var}\,(z_n-z)\underset{n}{\to}0.$$

Т е о р е м а 4.2. *Алгебра* $\mathrm{G}^T[a,b]$, *наделенная нормой* $\|\cdot\|_T$, *является коммутативной банаховой алгеброй с единицей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Роль единицы играет функция, тождественно равная 1 на $[a,b]$. Коммутативность очевидна, поэтому остается показать непрерывность умножения по норме $\|\cdot\|_T$ относительно, например, первой переменной. Действительно, если $x,y\in\mathrm{G}^T$ и $w=xy$, то $w\in\mathrm{G}^T$ и в соответствии с замечанием 4.2 и леммой 4.1 справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned}\|xy\|_T=\|w\|_T\leqslant\|w\|+2\lceil w\rceil_T\leqslant\\ \leqslant\|xy\|+2\|x\|\lceil y\rceil_T+2\lceil x\rceil_T\|y\|\leqslant 5\|x\|_T\|y\|_T,\end{aligned}\tag{4.4}$$

следовательно, условие $\|x_n-x\|_T\underset{n}{\to}0$ влечет $\|x_ny-xy\|_T\underset{n}{\to}0$.

4.2. **Полнота** $\Gamma[a,b]$

Л е м м а 4.2. *Имеет место равенство*

$$\Gamma = \bigcap_{T\in\mathbb{T}(K)} \mathrm{G}^T. \tag{4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним (см. (3.4)), что Γ состоит из тех функций $x \in \mathrm{G}$, что ряд $\lceil x \rceil_{T(x)}$ сходится. Включение $\Gamma \subseteq \bigcap\limits_{T\in\mathbb{T}(K)} \mathrm{G}^T$ справедливо в силу включений $\Gamma \subset \mathrm{G}^T$. Если $x \in \bigcap\limits_{T\in\mathbb{T}(K)} \mathrm{G}^T$, то $x \in \mathrm{G}^T$ для всех T, в частности, $x \in \mathrm{G}^T$ для $T \doteq T(x)$, т.е. ряд $\lceil x \rceil_{T(x)}$ сходится, следовательно, $x \in \Gamma$. Лемма доказана.

Легко проверить, что Γ является нормированным пространством относительно нормы

$$\|x\|_{\Gamma} \doteq \sup_{T\in\mathbb{T}(K)} \|x\|_T \tag{4.6}$$

и для любых $x \in \Gamma$ и $T \in \mathbb{T}(K)$ имеют место оценки

$$\|x\| \leqslant \|x\|_T \leqslant \|x\|_{\Gamma} \leqslant \|x\| + 2\lceil x \rceil_{T(x)} = \|x\| + 2 \operatorname{Var} x_c. \tag{4.7}$$

Заметим также, что в соответствии с (4.2) норма $\|\cdot\|_T$ зависит от выбора точки $\alpha \in K$, т.е. $\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_T^{\alpha}$, причем в силу леммы 4.1 нормы $\|\cdot\|_T^{\alpha}$ и $\|\cdot\|_T^{\beta}$ эквивалентны. Таким образом, норма $\|\cdot\|_{\Gamma}$ также зависит от α, т.е. $\|\cdot\|_{\Gamma} = \|\cdot\|_{\Gamma}^{\alpha}$, и нетрудно показать, что для любых $\alpha, \beta \in K$ нормы $\|\cdot\|_{\Gamma}^{\alpha}$ и $\|\cdot\|_{\Gamma}^{\beta}$ эквивалентны.

Л е м м а 4.3. *Для любой* $x \in \Gamma$ *справедливо равенство*

$$\|x\|_{\Gamma} = \|x^c\| + \operatorname{Var} x_c. \tag{4.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с замечанием 3.4 доказательство формулы (4.8) сводится к доказательству равенства $\|x\|_{\Gamma} = \|x\|_T$, где $T \doteq T(x)$. Если $S \in \mathbb{T}(K)$ и $P \doteq T \cap S$, то $x_k^- = x_k^+ = 0$ для любого $\tau_k \in S \backslash P$, а так как $x \in \Gamma \subset \mathrm{G}^T$, то

$$\|x\|_S = \|x^S\| + \lceil x \rceil_S = \|x^S\| + \lceil x \rceil_P,$$

$$x^S(t) = x(t) - x_S(t) = x(t) - x_P(t) = x^T(t) + x_{T\setminus P}(t),$$

следовательно, $\|x^S\| \leqslant \|x^T\| + \lceil x\rceil_{T\setminus P}$ и $\|x\|_S \leqslant \|x^T\| + \lceil x\rceil_T$, т.е. для любого S имеем $\|x\|_S \leqslant \|x\|_T$, поэтому $\|x\|_\Gamma \leqslant \|x\|_T$. Обратное неравенство очевидно.

Т е о р е м а 4.3. *Пространство* $\Gamma[a,b]$ *банахово по норме* $\|\cdot\|_\Gamma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{x_n\}$, $x_n \in \Gamma$, – фундаментальная последовательность, т.е. $\|x_m - x_n\|_\Gamma \underset{m,n}{\longrightarrow} 0$. В силу (4.7) эта последовательность является фундаментальной в каждом из банаховых пространств G^T, $T \in \mathbb{T}(K)$, по соответствующей норме $\|\cdot\|_T$. Это означает, что для любого T существует функция $x^{(T)} \in \mathrm{G}^T$ такая, что $\|x_n - x^{(T)}\|_T \underset{n}{\to} 0$, а в силу замечания 4.2 имеем $\|x_n - x^{(T)}\| \underset{n}{\to} 0$. Таким образом, все предельные функции $x^{(T)}$ совпадают между собой, т.е. $x^{(T)} = x$ для любого T. Поскольку $x^{(T)} \in \mathrm{G}^T$, то $x \in \mathrm{G}^T$ для любого T, поэтому в силу (4.5) имеем $x \in \Gamma$ и нам остается доказать, что $\|x_n - x\|_\Gamma \underset{n}{\to} 0$.

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при $m, n > N$ и $T \in \mathbb{T}(K)$ выполнено $\|x_m - x_n\|_T < \varepsilon$, следовательно, при $m \to \infty$ имеем $\|x - x_n\|_T \leqslant \varepsilon$, поэтому $\|x_n - x\|_\Gamma = \sup\limits_{T\in\mathbb{T}(K)} \|x_n - x\|_T \leqslant \varepsilon$.

Т е о р е м а 4.4. *Алгебра* $\Gamma[a,b]$ *является коммутативной банаховой алгеброй с единицей по норме* $\|\cdot\|_\Gamma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с (4.4) и (4.5) имеем $\|xy\|_\Gamma \leqslant 5\,\|x\|_\Gamma\,\|y\|_\Gamma$, откуда следует непрерывность умножения в Γ.

Пространство $\mathrm{BV}[a,b]$ с нормой

$$\|x\|_{\mathrm{BV}} \doteq |x(\alpha)| + \operatorname*{Var}_{[a,b]} x \tag{4.9}$$

также является коммутативной банаховой алгеброй с единицей. Это утверждение хорошо известно для нормы (4.9), в которой $\alpha = a$ (см., например, [9, с. 337]), а для остальных норм отметим, что в семействе (4.9), зависящем от параметра $\alpha \in [a, b]$, все нормы эквивалентны между собой. Напомним также, что в соответствии с замечанием 3.1 мы работаем с фиксированным α.

Л е м м а 4.4. *Если $x \in \mathrm{BV}$, то при любом $T \in \mathbb{T}(K)$*

$$\operatorname{Var} x = \operatorname{Var} x^T + \operatorname{Var} x_T \tag{4.10}$$

и, в частности, для компонент Лебегова разложения функции справедливо равенство $\operatorname{Var} x = \operatorname{Var} x^c + \operatorname{Var} x_c$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вторая часть утверждения хорошо известна (см., например, замечание 3.4). Пусть $Q \doteq T \setminus T(x)$, $P \doteq T \cap T(x)$, $R \doteq T(x) \setminus T$. Поскольку $x_k^- = x_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in Q$, то $x_T = x_P$ и $x^T = x^P$. Если $z \doteq x_P$ и $y \doteq x^P$, то $T(z) = P$ и $T(y) = R$. В соответствии с (3.10) справедливо

$$z_c = z_{T(z)} = (x_P)_P = x_P, \quad y_c = y_{T(y)} = (x^P)_R = x_{R \setminus P} = x_R,$$

$$z^c = z^{T(z)} = (x_P)^P = 0, \quad y^c = y^{T(y)} = (x^P)^R = x^{P \cup R} = x^{T(x)} = x^c,$$

поэтому

$$\operatorname{Var} x^T + \operatorname{Var} x_T = \operatorname{Var} y + \operatorname{Var} z = \operatorname{Var} y^c + \operatorname{Var} y_c + \operatorname{Var} z^c + \operatorname{Var} z_c =$$

$$= \operatorname{Var} x^c + \operatorname{Var} x_R + \operatorname{Var} x_P = \operatorname{Var} x^c + \lceil x \rceil_R + \lceil x \rceil_P = \operatorname{Var} x^c + \lceil x \rceil_{T(x)} =$$

$$= \operatorname{Var} x^c + \operatorname{Var} x_{T(x)} = \operatorname{Var} x^c + \operatorname{Var} x_c = \operatorname{Var} x.$$

Л е м м а 4.5. *Если $x \in \mathrm{BV}$, то при всех $T \in \mathbb{T}(K)$*

$$\|x\| \leqslant \|x\|_T \leqslant \|x\|_\Gamma \leqslant \|x\|_{\mathrm{BV}}. \tag{4.11}$$

Доказательство. Первые два неравенства уже доказаны, что касается третьего, то достаточно показать, что $\|x\|_T \leqslant \|x\|_{\mathrm{BV}}$ для любого $T \in \mathbb{T}(K)$. Действительно, в соответствии с леммой 4.4 и равенством $x^T(\alpha) = x(\alpha)$ справедлива цепочка равенств

$$\|x\|_{\mathrm{BV}} - \|x\|_T = |x(\alpha)| + \operatorname{Var} x - \|x^T\| - \operatorname{Var} x_T =$$

$$= |x(\alpha)| + \operatorname{Var} x^T - \|x^T\| = |x^T(\alpha)| + \operatorname{Var} x^T - \|x^T\| = \|x^T\|_{\mathrm{BV}} - \|x^T\|,$$

в правой части которой стоит неотрицательная величина. Таким образом, $\|x\|_\Gamma = \sup\limits_{T \in \mathbb{T}(K)} \|x\|_T \leqslant \|x\|_{\mathrm{BV}}$.

Замечание 4.3. Подводя итог, можем сказать, что вторая строка диаграммы (3.4) состоит из коммутативных банаховых алгебр с единицей, причем каждая из алгебр полна по своей норме, – это соответственно нормы (4.9), (4.6), (4.2) и (4.1). Кроме того, если $x \in \mathrm{BV}$, то справедливы неравенства (4.11), если $x \in \Gamma$, то выполнены неравенства (4.7), а если $x \in \mathrm{G}^T$, то $\|x\| \leqslant \|x\|_T$ (см. замечание 4.2). Хорошо известно, что пространства C и CBV из диаграммы (3.4) также полны, каждое по своей норме, но мы на этом вопросе не останавливаемся.

5. Присоединенное умножение

5.1. Присоединенное умножение в $\mathrm{G}^T[a, b]$

Согласно формулам из замечания 3.5 проекторы $P_T : x \to x_T$ и $P^T : x \to x^T$ являются эндоморфизмами пространства G^T, но не являются эндоморфизмами алгебры G^T. Они будут таковыми, если в G^T ввести новую операцию умножения, и мы приступаем к детальному обсуждению этого вопроса.

Определение 5.1. Если $x, y \in \mathrm{G}^T$ и $\alpha \in K$, то функция $z \doteq x \cdot y \doteq x^T y^T - x_T y_T$ называется *присоединенным произведением* функций x и y, а операция ґ $\cdot$ Є называется *присоединенным умножением* в G^T.

Прежде всего отметим, что функции x_T и x^T зависят от параметра α, т.е. $x_T = x_T(t,\alpha)$ и $x^T = x^T(t,\alpha)$, поэтому и z из определения 5.1 зависит от α, т.е. $z = z(t,\alpha)$. Это означает, что в G^T определено целое семейство различных присоединенных умножений, зависящих от параметра α. Более того, в соответствии с пунктом 2 леммы 3.1 равенство $\mathrm{G}^S = \mathrm{G}^T$ равносильно тому, что $S \sim T$, поэтому в пространстве $\mathrm{G}^T (= \mathrm{G}^S)$ определены разные присоединенные умножения, зависящие от параметра $S \sim T$. Таким образом, в пространстве G^T (когда разбиение T фиксировано) имеется двупараметрическое семейство различных присоединенных умножений, зависящих как от точки $\alpha \in K$, так и от разбиения $S \sim T$. Наиболее выпукло это просматривается в пространстве G, где, как мы знаем, выполнено равенство $\mathrm{G} = \mathrm{G}^T, \operatorname{card} T < \infty$, т.е. в пространстве G определено двупараметрическое семейство различных присоединенных умножений, зависящих от точки $\alpha \in K$ и конечного разбиения T. В частности, при $T = \varnothing$ имеем $x \cdot y = xy$, т.е. обычное умножение входит в это семейство.

Термин ґприсоединенное умножениеЄ мы позаимствовали из теории ассоциативных колец и алгебр, где присоединенное умножение определяется равенством $x \circ y \doteq x + y + xy$ и строится, таким образом, из базовых операций сложения и умножения исходного кольца [алгебры] R (см., например, [12, с. 315]). В книге [13, с. 368] такое умножение называется звездным. Иногда присоединенное умножение определяется как $x \circ y \doteq x + y - xy$. Относительно новой операции кольцо [алгебра] R ассоциативно и имеет единицу, роль которой выполняет нулевой элемент (легко проверить, что $x \circ 0 = x = 0 \circ x$). Последнее обстоятельство и отсутствие дистрибутивности (например, имеет место равенство $x \circ (y + z) = x \circ y + x \circ z - x$) не позволяют рассматривать самостоятельную алгебраическую систему $< R, +, \circ >$ [соответственно $< R, +, \circ, \cdot >$], как кольцо [алгебру], хотя операция присоединенного умножения и выполняет существенную роль в теории. Ниже мы увидим, что присоединенное умножение из определения

5.1, весьма похожее на классическое присоединенное умножение (имеем $x \cdot y = x^T y + x y^T - xy$), лишено отмеченных недостатков.

Л е м м а 5.1. *Если* $T \in \mathbb{T}(K)$, $x, y \in \mathrm{G}^T$ *и* $\lambda \in \mathbb{C}$, *то* $(\lambda x)_T = \lambda x_T$, $(\lambda x)^T = \lambda x^T$, $(x+y)_T = x_T + y_T$, $(x+y)^T = x^T + y^T$, $(x \cdot y)_T = x_T \cdot y_T$, $(x \cdot y)^T = x^T \cdot y^T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенства $x_T \cdot y_T = -x_T y_T$ и $x^T \cdot y^T = x^T y^T$ очевидны из определения 5.1 и формул (3.9), а в силу следствия 3.4 справедливы цепочки равенств

$$(x \cdot y)_T = (x^T y^T - x_T y_T)_T = -x_T y_T = x_T \cdot y_T,$$

$$(x \cdot y)^T = (x^T y^T - x_T y_T)^T = x^T y^T = x^T \cdot y^T.$$

З а м е ч а н и е 5.1. В процессе доказательства мы установили равенства $(x \cdot y)_T = -x_T y_T$ и $(x \cdot y)^T = x^T y^T$.

Л е м м а 5.2. *Для любых* $x, y \in \mathrm{G}^T$ *существуют интегралы* $\int\limits_{\alpha}^{t} x_T dy^T$, $\int\limits_{\alpha}^{t} y_T dx^T$, $\int\limits_{\alpha}^{t} y^T dx_T$, $\int\limits_{\alpha}^{t} x^T dy_T$ *и*

$$x(t)\, y(t) = x^T(t)\, y^T(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} x_T dy^T + \int\limits_{\alpha}^{t} y_T dx^T + \big(xy\big)_T(t),$$

$$x(t) \cdot y(t) = x^T(t)\, y^T(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} x^T dy_T + \int\limits_{\alpha}^{t} y^T dx_T - \big(xy\big)_T(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая формула доказана в лемме 3.4, а что касается второй, то для ее доказательства достаточно сложить левые и правые части обеих формул и получить тождество.

Т е о р е м а 5.1. *Пространство* $\mathrm{G}^T[a,b]$, *наделенное операцией присоединенного умножения, является коммутативной ассоциативной алгеброй (вообще говоря, без единицы). Она является банаховой по норме* $\|\cdot\|_T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ассоциативность присоединенного умножения следует из замечания 5.1:

$$(x\cdot y)\cdot z=(x\cdot y)^{T}z^{T}-(x\cdot y)_{T}z_{T}=x^{T}y^{T}z^{T}+x_{T}y_{T}z_{T},$$

$$x\cdot(y\cdot z)=x^{T}(y\cdot z)^{T}-x_{T}(y\cdot z)_{T}=x^{T}y^{T}z^{T}+x_{T}y_{T}z_{T}.$$

Коммутативность и дистрибутивность очевидны. При $T=\varnothing$ имеем $x\cdot y=xy$, поэтому в G^{T} (при $T=\varnothing$) единицей является функция $e(t)$, тождественно равная 1 на $[a,b]$. Пусть $T\neq\varnothing$.

А. Если $\alpha\in T$, то функция $e(t)\doteq 1+\int\limits_{\alpha}^{t}d\xi_{\alpha}-\int\limits_{\alpha}^{t}d\eta_{\alpha}$ является единицей алгебры G^{T}. Действительно, легко проверить, что $e(t)=\begin{cases}0\ , & t\neq\alpha\\ 1\ , & t=\alpha\end{cases}$, поэтому $e_{k}^{-}=e_{k}^{+}=-\delta_{km}$ для всех $\tau_k\in T$, где через m обозначен тот индекс, для которого $\alpha=\tau_m$. Следовательно, $e_{T}(t)=\int\limits_{\alpha}^{t}d\xi_{\alpha}-\int\limits_{\alpha}^{t}d\eta_{\alpha},\ e^{T}(t)\equiv 1$. Для любой $x\in\mathrm{G}^{T}$ справедливо равенство $(xe)(t)=x(\alpha)e(t)$, поэтому $(xe)_{T}(t)=x(\alpha)e_{T}(t)$ и в силу леммы 5.2 (а также формул (3.5) и равенств $x^{T}(\alpha)=x(\alpha)$) справедлива цепочка равенств

$$x(t)\cdot e(t)=x^{T}(t)+\int\limits_{\alpha}^{t}dx_{T}+\int\limits_{\alpha}^{t}x^{T}de_{T}-(xe)_{T}(t)=$$

$$=x(t)+x(\alpha)\int\limits_{\alpha}^{t}d\xi_{\alpha}-x(\alpha)\int\limits_{\alpha}^{t}d\eta_{\alpha}-x(\alpha)e_{T}(t)=x(t).$$

Б. Пусть $\alpha\notin T$. Одно из разбиений $T_{L}\doteq\{\tau_k\in T:\tau_k<\alpha\}$ или $T_{R}\doteq\{\tau_k\in T:\tau_k>\alpha\}$ не пусто.

1. Если $T_{L}=\varnothing$, то $T_{R}\neq\varnothing$ и определена величина $\varrho\doteq\inf T_{R}$.

Если $\varrho\in T_{R}$, то функция $e(t)\doteq 1-\int\limits_{\alpha}^{t}d\xi_{\varrho}=\begin{cases}1\ , & t<\varrho\\ 0\ , & t\geqslant\varrho\end{cases}$ является единицей алгебры G^{T}. Действительно, для всех $\tau_k\in T$ имеют место равенства $e_{k}^{-}=\delta_{km}$ и $e_{k}^{+}=0$, где через m

обозначен тот индекс, для которого $\varrho = \tau_m$. Следовательно, $e_{_T}(t) = -\int\limits_\alpha^t d\xi_\varrho$ и $e^{_T}(t) \equiv 1$. Для любой $x \in \mathrm{G}^T$ справедливо $(xe)(t) = \begin{cases} x(t) & , \ t < \varrho \\ 0 & , \ t \geqslant \varrho \end{cases}$, поэтому $(xe)_m^- = x(\varrho - 0)$, $(xe)_m^+ = 0$, $(xe)_k^- = (xe)_k^+ = 0$ для всех $k \neq m$, $(xe)_{_T}(t) = -x(\varrho - 0)\int\limits_\alpha^t d\xi_\varrho$ и

$$x(t)\cdot e(t) = x^{_T}(t) + \int\limits_\alpha^t dx_{_T} + \int\limits_\alpha^t x^{_T} de_{_T} - (xe)_{_T}(t) =$$

$$= x(t) - x^{_T}(\varrho)\int\limits_\alpha^t d\xi_\varrho + x(\varrho - 0)\int\limits_\alpha^t d\xi_\varrho = x(t).$$

Воспользовались равенством $x^{_T}(\varrho) = x(\varrho - 0)$, которое имеет место в силу следующих обстоятельств. Так как $\alpha < \varrho = \tau_m < \tau_k$ при всех $k \neq m$, то

$$x_{_T}(\varrho) = -\sum_{\tau_k \in T} x_k^- \int\limits_\alpha^\varrho d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} x_k^+ \int\limits_\alpha^\varrho d\eta_k =$$

$$= -\big(x(\tau_m - 0) - x(\tau_m)\big)\big(\xi_m(\varrho) - \xi_m(\alpha)\big) = x(\varrho) - x(\varrho - 0).$$

Если $\varrho \notin T_{_R}$, то в G^T единицы нет. Предположим противное, т.е. существует $e \in \mathrm{G}^T$ такая, что для всех $x \in \mathrm{G}^T$ справедливо равенство $x = x\cdot e = x^{_T} e + x e^{_T} - xe$. В частности, если $x(t) \equiv 1$, то $x^{_T}(t) \equiv 1$, поэтому $e^{_T}(t) \equiv 1$. Таким образом, для любой $x \in \mathrm{G}^T$ имеем $(x - x^{_T})e = 0$.

Пусть $\tau > \varrho$. Так как ϱ – наибольшая из нижних границ разбиения $T_{_R}$, то существует $\tau_m \in T_{_R}$, что $\alpha \leqslant \varrho < \tau_m < \tau$. Если $x(t) \doteq M\int\limits_\alpha^t d\eta_m$, то $x^{_T}(t) \equiv 0$, следовательно, $[M\int\limits_\alpha^\tau d\eta_m]e(\tau) = 0$ или $Me(\tau) = 0$. В силу произвольности M имеем $e(\tau) = 0$. Таким образом, $e(\tau) = 0$ для всех $\tau > \varrho$. Это означает, в частности, что $e(\tau_k - 0) = e(\tau_k) = e(\tau_k + 0) = 0$ для всех $\tau_k \in T_{_R} = T$, следовательно, $e^T(t) = e(t)$, поэтому $e^T(t) = 0$ для всех $t > \varrho$, что противоречит условию $e^T(t) \equiv 1$.

2. Случай $T_L \neq \varnothing, T_R = \varnothing$ симметричен. Здесь определена величина $\lambda \doteq \sup T_L$, и если $\lambda \notin T_L$, то в G^T единицы нет, а если $\lambda \in T_L$, то единицей является функция

$$e(t) \doteq 1 + \int_\alpha^t d\eta_\lambda = \begin{cases} 0 & , \quad t \leqslant \lambda \\ 1 & , \quad t > \lambda \end{cases} .$$

3. Наконец, если $T_L \neq \varnothing, T_R \neq \varnothing$, то определены величины $\lambda \doteq \sup T_L$ и $\varrho \doteq \inf T_R$. Если $\lambda \notin T_L$ или $\varrho \notin T_R$, то в G^T единицы нет, а в противном случае (т.е. если $\lambda \in T_L$ и $\varrho \in T_R$) единицей является функция

$$e(t) \doteq 1 + \int_\alpha^t d\eta_\lambda - \int_\alpha^t d\xi_\varrho = \begin{cases} 1 & , \quad t \in (\lambda, \varrho) \\ 0 & , \quad t \notin (\lambda, \varrho) \end{cases} .$$

Доказательство пунктов 2 и 3 предоставляем читателю.

Осталось доказать непрерывность присоединенного умножения по норме $\|\cdot\|_T$ относительно, например, первой переменной. В силу (4.4) для любых $x, y \in \mathrm{G}^T$

$$\frac{1}{5}\left\|x \cdot y\right\|_T = \frac{1}{5}\left\|x^T y^T - x_T y_T\right\|_T \leqslant \|x^T\|_T \|y^T\|_T + \|x_T\|_T \|y_T\|_T =$$

$$= \|x^T\| \, \|y^T\| + \lceil x \rceil_T \lceil y \rceil_T \leqslant \big(\|x^T\| + \lceil x \rceil_T\big)\big(\|y^T\| + \lceil y \rceil_T\big) = \|x\|_T \, \|y\|_T,$$

следовательно, условие $\|x_n - x\|_T \underset{n}{\to} 0$ влечет $\left\|x_n \cdot y - x \cdot y\right\|_T \underset{n}{\to} 0$.

З а м е ч а н и е 5.2. Мы обнаружили, что в алгебре G^T с присоединенным умножением не всегда имеется единичный элемент. При $T = \varnothing$ или при $\alpha \in T$ он существует, а вот при $T \neq \varnothing$ и $\alpha \notin T$ единичный элемент отсутствует тогда и только тогда, когда у точки α нет ближайшего левого или ближайшего правого элемента из разбиения T. Это означает, в частности, что для всех конечных T алгебра G^T имеет единицу. Существует, по крайней мере, три способа присоединения единицы в тех случаях, когда она отсутствует в алгебре. Во-первых, множества $S \doteq T \cup \{\alpha\}$ и T эквивалентны, поэтому $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}^S$, а поскольку $\alpha \in S$, то появляется единица. Во-вторых, в разбиение T можно добавить $\lambda \doteq \sup T_L$ и/или $\varrho \doteq \inf T_R$, если они отсутствуют. Полученное разбиение (обозначим его S) эквивалентно T, поэтому $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}^S$, а поскольку $\lambda, \varrho \in S$, то появляется единица. Наконец, можно воспользоваться стандартной процедурой присоединения единицы, переходя в алгебру $\mathrm{G}^T \times \mathbb{C}$ с операциями

$$(x, \mu) + (y, \nu) = (x + y, \mu + \nu), \qquad \nu(x, \mu) = (\nu x, \nu\mu),$$

$$(x, \mu) \cdot (y, \nu) = (x \cdot y + \mu y + \nu x, \mu\nu)$$

и единицей $e = (0, 1)$ (см., например, [10, с. 256]). Наиболее перспективным, на наш взгляд, является первый способ – добавление в T точки α, в этом случае и единица выглядит наиболее естественно, – она представляет из себя характеристическую функцию точки α, и с самого начала можно считать, что $\alpha \in T$.

Т е о р е м а 5.2. *Каждый из операторов $P_T : x \to x_T$ и $P^T : x \to x^T$ является эндоморфизмом алгебры G^T с присоединенным умножением. Образ $\operatorname{Im} P_T$ $(= \operatorname{Ker} P^T)$ и ядро $\operatorname{Ker} P_T$ $(= \operatorname{Im} P^T)$ являются двусторонними идеалами алгебры. Операторы P_T и P^T являются непрерывными ортогональными* (*относительно присоединенного умножения*) *проекторами алгебры.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая часть утверждения составляет содержание леммы 5.1. Поскольку проекторы P_T и P^T связаны равенством $P_T + P^T = \mathrm{I}$, то $\operatorname{Im} P_T = \operatorname{Ker} P^T$ и $\operatorname{Ker} P_T = \operatorname{Im} P^T$. Включение $x \in \operatorname{Im} P_T$ равносильно тому, что $x_T = x$, следовательно, для любого $y \in \mathrm{G}^T$ справедливо $x \cdot y = -x_T y_T$, а в силу равенства $(x_T y_T)_T = x_T y_T$ из следствия 3.4 имеем $x \cdot y \in \operatorname{Im} P_T$, т.е. $\operatorname{Im} P_T$ – двусторонний идеал в G^T. Для ядра $\operatorname{Ker} P_T$ доказательство аналогично. Равенство $x^T \cdot y_T = 0$ носит элементарный характер, поэтому P_T и P^T – ортогональные проекторы. Для доказательства их непрерывности достаточно показать замкнутость $\operatorname{Im} P_T$ и $\operatorname{Ker} P_T$.

Пусть последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in \mathrm{G}^T$, сходится к $x \in \mathrm{G}^T$ по норме $\|\cdot\|_T$, т.е. $\|(x_n)^T - x^T\| + \mathrm{Var}\,((x_n)_T - x_T) \underset{n}{\longrightarrow} 0$. Если все $x_n \in \mathrm{Im}\, P_T$, то $(x_n)^T = 0$, поэтому $\|x^T\| = 0$, $x^T = 0$, $x \in \mathrm{Im}\, P_T$. Если же $x_n \in \mathrm{Ker}\, P_T$, то $(x_n)_T = 0$, поэтому $\mathrm{Var}\, x_T = 0$, а так как $x_T(\alpha) = 0$, то $x_T = 0$ и $x \in \mathrm{Ker}\, P_T$.

Итак, $\mathrm{Im}\, P_T$ и $\mathrm{Ker}\, P_T$ – замкнутые пространства, поэтому $\mathrm{G}^T = \mathrm{Im}\, P_T \oplus \mathrm{Ker}\, P_T = \mathrm{Im}\, P^T \oplus \mathrm{Ker}\, P^T$, а P_T и P^T – непрерывные проекторы [10, с. 151].

Нашей ближайшей целью является перенесение полученных результатов на пространства Γ и BV, где в соответствии с замечанием 3.4 определены проекторы $P_c : x \to x_c$ и $P^c : x \to x^c$.

5.2. Присоединенное умножение в $\Gamma[a,b]$ и в $\mathrm{BV}[a,b]$

О п р е д е л е н и е 5.2. Пусть $x, y \in \Gamma$ [или BV], тогда функция $z \doteq x \circ y \doteq x^c y^c - x_c y_c$ называется *присоединенным произведением* функций x и y, а операция ґ ∘ Є называется *присоединенным умножением* в Γ [или в BV].

З а м е ч а н и е 5.3. Так же, как и в случае присоединенного произведения ґ · Є, правило вычисления присоединенного произведения ґ ∘ Є зависит от параметра $\alpha \in K$.

Л е м м а 5.3. *Если $x, y \in \Gamma$ [или BV] и $\lambda \in \mathbb{C}$, то* $(\lambda x)_c = \lambda x_c$, $(\lambda x)^c = \lambda x^c$, $(x+y)_c = x_c + y_c$, $(x+y)^c = x^c + y^c$, $(x \circ y)_c = x_c \circ y_c$, $(x \circ y)^c = x^c \circ y^c$.

Л е м м а 5.4. *Для любых $x, y \in \Gamma$ [или BV] интегралы* $\int\limits_\alpha^t x_c dy^c$, $\int\limits_\alpha^t y_c dx^c$, $\int\limits_\alpha^t y^c dx_c$, $\int\limits_\alpha^t x^c dy_c$ *существуют и*

$$x(t)y(t) = x^c(t)y^c(t) + \int\limits_\alpha^t x_c dy^c + \int\limits_\alpha^t y_c dx^c + (xy)_c(t),$$

$$x(t) \circ y(t) = x^c(t)y^c(t) + \int\limits_\alpha^t x^c dy_c + \int\limits_\alpha^t y^c dx_c - (xy)_c(t).$$

Утверждения следуют из включений $\mathrm{BV} \subset \Gamma \subset \mathrm{G}^T$ и лемм 5.1 и 5.2, для этого достаточно взять в качестве T разбиение $T(x) \cup T(y)$, тогда $T(\lambda x) \subseteq T$, $T(x+y) \subseteq T$, $T(xy) \subseteq T$, $x_c = x_{{}_T}$, $y_c = y_{{}_T}$, $(\lambda x)_c = (\lambda x)_{{}_T}$, $(x+y)_c = (x+y)_{{}_T}$ и $(xy)_c = (xy)_{{}_T}$.

Т е о р е м а 5.3. *Пространство* Γ [*или* BV], *наделенное операцией присоединенного умножения, является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей. Она является банаховой по норме* $\|\cdot\|_\Gamma$ [*соответственно* $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}$].

Нетривиальным здесь является лишь существование единицы, роль которой выполняет функция $e(t) \doteq 1 + \int\limits_\alpha^t d\xi_\alpha - \int\limits_\alpha^t d\eta_\alpha$. Если $x \in \Gamma$ [или BV] и $T \doteq T(x) \cup \{\alpha\}$, то $x, e \in \mathrm{G}^T$, $\alpha \in T$ и $x \circ e = x^c e^c - x_c e_c = x^{T(x)} e^{T(e)} - x_{{}_{T(x)}} e_{{}_{T(e)}} = x^T e^T - x_{{}_T} e_{{}_T} = x$. Последнее равенство справедливо в силу пункта А теоремы 5.1.

Т е о р е м а 5.4. *Каждый из операторов* $P_c : x \to x_c$ *и* $P^c : x \to x^c$ *является эндоморфизмом алгебры* Γ [*или* BV] *с присоединенным умножением. Образ* $\operatorname{Im} P_c$ ($= \operatorname{Ker} P^c$) *и ядро* $\operatorname{Ker} P_c$ ($= \operatorname{Im} P^c$) *являются двусторонними идеалами алгебры. Операторы* P_c *и* P^c *являются непрерывными ортогональными* (*относительно присоединенного умножения*) *проекторами.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.2.

З а м е ч а н и е 5.4. Подводя итог, можно сказать, что проектор $P^T : x \to x^T$ в G^T или $P^c : x \to x^c$ в Γ [или в BV] ґрасщепляетЄ соответствующее пространство на два замкнутых (по соответствующей норме) ортогональных (относительно присоединенного умножения) подпространства. В G^T – это пространство непрерывных в точках разбиения T функций и пространство функций скачков, скачки которых заданы в точках разбиения T. В Γ – это пространство непрерывных функций и пространство функций скачков. В BV – это пространство непрерывных функций ограниченной вариации и пространство функций скачков. (Для функций скачков x во всех трех случаях выполнено равенство $x(\alpha) = 0$.) Эти же наблюдения относятся и к проекторам $P_T : x \to x_T$ в G^T и $P_c : x \to x_c$ в Γ [или в BV]. Крайне любопытным выглядит тот факт, что множества G^T, Γ и BV, рассматриваемые как алгебры, ґрасщепляютсяЄ на две замкнутые подалгебры, каждая из которых является двусторонним идеалом соответствующей алгебры.

6. Присоединенный интеграл

О п р е д е л е н и е 6.1. Пусть $T \in \mathbb{T}(K)$ и $x, y \in \mathrm{G}^T$. Если существует интеграл $\int\limits_K x dy$, то функция

$$\int\limits_\alpha^t x \cdot dy \doteq \int\limits_\alpha^t x^T dy^T - \int\limits_\alpha^t x_T dy_T \tag{6.1}$$

называется *неопределенным присоединенным интегралом* функции x по функции y (точка $\alpha \in K$ фиксирована).

Прежде всего отметим, что определение корректно, поскольку из существования интеграла $\int\limits_K xdy$ следует существование интеграла $\int\limits_\alpha^t xdy$, а в соответствии со следствием 3.3 оба интеграла в правой части (6.1) существуют.

Как и в случае присоединенного умножения (см. комментарии к определению 5.1) в пространстве $\mathrm{G}^T (= \mathrm{G}^S$ при $S \sim T)$ определено двупараметрическое семейство различных присоединенных интегралов функции x по функции y, зависящих от точки $\alpha \in K$ и разбиения $S \sim T$. При $T = \varnothing$ имеем $\int\limits_\alpha^t x \cdot dy = \int\limits_\alpha^t xdy$, поэтому интеграл Римана–Стилтьеса также является присоединенным интегралом.

Заметим далее, что мы определили присоединенный интеграл как функцию переменной верхней границы интегрирования, причем нижняя граница интегрирования фиксирована и совпадает именно с тем значением α, которое фигурирует при построении проекторов $P_T : x \to x_T(\,\cdot\,, \alpha)$ и $P^T : x \to x^T(\,\cdot\,, \alpha)$. При таком подходе мы сохраняем привычную двупараметрическую параметризацию, хотя, конечно же, для любых $\tau, s, \vartheta \in [a,b]$ определены величины $\int\limits_\tau^s x\cdot dy$, $\int\limits_s^\vartheta x\cdot dy$, $\int\limits_\tau^\vartheta x\cdot dy$ и сумма первых двух равна третьей. Таким образом, мы можем вести речь не только о неопределенном, но и об определенном присоединенном интеграле и считать, что это есть величина

$$\int\limits_\tau^s x\cdot dy \doteq \int\limits_\tau^s x^T(\,\cdot\,,\alpha)\,dy^T(\,\cdot\,,\alpha) - \int\limits_\tau^s x_T(\,\cdot\,,\alpha)\,dy_T(\,\cdot\,,\alpha),$$

зависящая от параметров α, T, τ, s , однако в дальнейшем мы работаем лишь с неопределенным присоединенным интегралом.

Комментарии к определению 6.1 закончим замечанием, что присоединенный интеграл линеен по каждому аргументу.

Л е м м а 6.1. *Пусть* $x, y \in \mathrm{G}^T$. *Существование одного из присоединенных интегралов* $\int\limits_\alpha^t x\cdot dy$ *или* $\int\limits_\alpha^t y\cdot dx$ *влечет существование другого и равенство*

$$\int\limits_\alpha^t x\cdot dy + \int\limits_\alpha^t y\cdot dx = x\cdot y\Big|_\alpha^t.$$

Существование присоединенных интегралов следует из существования соответствующих интегралов Римана–Стилтьеса, а цепочка равенств

$$\int\limits_\alpha^t x\cdot dy + \int\limits_\alpha^t y\cdot dx = \int\limits_\alpha^t x^T dy^T - \int\limits_\alpha^t x_T dy_T + \int\limits_\alpha^t y^T dx^T - \int\limits_\alpha^t y_T dx_T =$$

$$= x^T y^T\Big|_\alpha^t - x_T y_T\Big|_\alpha^t = x\cdot y\Big|_\alpha^t$$

справедлива в силу формулы интегрирования по частям.

Л е м м а 6.2. *Пусть* $x,y\in\mathrm{G}^T$ *и существует интеграл* $z(t)\doteq\int\limits_\alpha^t x\cdot dy$, *тогда* $z\in\mathrm{G}^T$, $z_T(t)=-\int\limits_\alpha^t x_T dy_T$ *и* $z^T(t)=\int\limits_\alpha^t x^T dy^T$.

Первый интеграл в правой части (6.1) является функцией, непрерывной во всех точках разбиения T, а второй является функцией скачков со скачками в T, что и доказывает лемму.

Л е м м а 6.3. *Пусть* $x, y, z \in \mathrm{G}^T$ *и существует интеграл* $w(t) \doteq \int_\alpha^t y\cdot dz$. *Интегралы* $\int_\alpha^t x\cdot dw$ *и* $\int_\alpha^t (x\cdot y)\cdot dz$ *существуют или нет одновременно. Если интегралы существуют, то*

$$\int_\alpha^t x(s)\cdot d\Big(\int_\alpha^s y\cdot dz\Big) = \int_\alpha^t (x\cdot y)\cdot dz. \tag{6.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 6.2 справедливо $w\in \mathrm{G}^T$, $w_{{}_T}(t) = -\int_\alpha^t y_{{}_T} dz_{{}_T}$, $w^{{}^T}(t) = \int_\alpha^t y^{{}^T} dz^{{}^T}$, следовательно, для левой и правой частей (6.2) (обозначим их σ_1 и σ_2) имеем

$$\sigma_1 = \int_\alpha^t x^{{}^T} dw^{{}^T} - \int_\alpha^t x_{{}_T} dw_{{}_T} = \int_\alpha^t x^{{}^T}(s)\, d\Big(\int_\alpha^s y^{{}^T} dz^{{}^T}\Big) +$$

$$+\int_\alpha^t x_{{}_T}(s)\, d\Big(\int_\alpha^s y_{{}_T} dz_{{}_T}\Big) = \int_\alpha^t x^{{}^T} y^{{}^T} dz^{{}^T} + \int_\alpha^t x_{{}_T} y_{{}_T} dz_{{}_T},$$

$$\sigma_2 = \int_\alpha^t (x^{{}^T} y^{{}^T} - x_{{}_T} y_{{}_T})\cdot dz = \int_\alpha^t x^{{}^T} y^{{}^T} dz^{{}^T} + \int_\alpha^t x_{{}_T} y_{{}_T} dz_{{}_T}.$$

Последнее равенство справедливо в силу замечания 3.4.

О п р е д е л е н и е 6.2. Пусть $x, y\in\Gamma$ [или $x, y\in \mathrm{BV}$]. Если существует интеграл $\int_K x dy$, то функция

$$\int_\alpha^t x\circ dy \doteq \int_\alpha^t x^c dy^c - \int_\alpha^t x_c dy_c \tag{6.3}$$

называется *неопределенным присоединенным интегралом* функции x по функции y (точка $\alpha \in K$ фиксирована).

Определение корректно, поскольку из существования интеграла $\int\limits_K xdy$ следует существование интеграла $\int\limits_\alpha^t xdy$, а в соответствии с замечанием 3.7 оба интеграла в правой части (6.3) существуют. Как и в случае присоединенного интеграла (6.1) семейство различных присоединенных интегралов (6.3) зависит от $\alpha \in K$. Присоединенный интеграл линеен по каждому аргументу.

Л е м м а 6.4. *Пусть* $x, y \in \Gamma$ [*или* $x, y \in \mathrm{BV}$]. *Существование одного из интегралов* $\int\limits_\alpha^t x \circ dy$ *или* $\int\limits_\alpha^t y \circ dx$ *влечет существование другого и равенство*

$$\int\limits_\alpha^t x \circ dy + \int\limits_\alpha^t y \circ dx = x \circ y \Big|_\alpha^t .$$

Л е м м а 6.5. *Пусть* $x, y \in \Gamma$ [*или* $x, y \in \mathrm{BV}$] *и существует присоединенный интеграл* $z(t) \doteq \int\limits_\alpha^t x \circ dy$, *тогда* $z \in \Gamma$ [*соответственно* $z \in \mathrm{BV}$], $z_c(t) = -\int\limits_\alpha^t x_c dy_c$ *и* $z^c(t) = \int\limits_\alpha^t x^c dy^c$.

Л е м м а 6.6. *Пусть* $x, y, z \in \Gamma$ [*или* $x, y \in \mathrm{BV}$] *и существует* $w(t) \doteq \int\limits_\alpha^t y \circ dz$. *Интегралы* $\int\limits_\alpha^t x \circ dw$ *и* $\int\limits_\alpha^t (x \circ y) \circ dz$ *существуют или нет одновременно. Если интегралы существуют, то*

$$\int\limits_\alpha^t x(s) \circ d\Big(\int\limits_\alpha^s y \circ dz \Big) = \int\limits_\alpha^t (x \circ y) \circ dz.$$

Утверждения следуют из включений $\mathrm{BV} \subset \Gamma \subset \mathrm{G}^T$ и лемм 6.1 – 6.3, для этого достаточно взять в качестве T разбиение $T(x) \cup T(y)$ или $T(x) \cup T(y) \cup T(z)$.

7. Прерывистые функции, заданные на интервале

Зафиксируем интервал $K \doteq (a, b)$ (ограниченный или неограниченный) и через $\mathrm{G} \doteq \mathrm{G}(a, b)$ обозначим пространство [алгебру] *прерывистых* функций, т.е. функций $x : K \to \mathbb{C}$, обладающих конечными пределами $x(t-0)$ и $x(t+0)$ при всех $t \in K$. Через $\mathrm{G}_L \doteq \mathrm{G}_L(a,b)$ [через $\mathrm{G}_R \doteq \mathrm{G}_R(a,b)$] обозначим подпространство в G, состоящее из непрерывных слева [справа] прерывистых функций. Через $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}} \doteq \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(a,b)$ обозначим пространство таких функций $x : K \to \mathbb{C}$, что для любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset K$ функция-сужение $x : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ принадлежит $\mathrm{G}_0[\alpha,\beta]$.

З а м е ч а н и е 7.1. Аналогично утверждению леммы 2.3 справедливо утверждение о том, что функция $x \in \mathrm{G}$ единственным образом представима в виде суммы $x = x_L + x_0$ двух функций $x_L \in \mathrm{G}_L$ и $x_0 \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$. Симметричное представление $x = x_R + x_0$, где $x_R \in \mathrm{G}_R$, $x_0 \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, также имеет место. При этом операторы $\mathrm{P} : x(t) \to x_L(t) \doteq x(t-0)$ и $\mathrm{Q} : x(t) \to x_R(t) \doteq x(t+0)$ являются проекторами в G (см. замечание 2.1).

Аналог (1.1) имеет вид (смысл пространств понятен):

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{AC}^{\mathrm{loc}} & \to & \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}} & \to & \mathrm{C} \to \mathrm{KC}^{\mathrm{loc}} & & & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & & & \\
 & & & & \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}} & \to & \mathrm{G} & \to \mathrm{R}^{\mathrm{loc}} & \to \ \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}
\end{array} .
$$

З а м е ч а н и е 7.2. Функции $x, y \in \mathrm{G}(a,b)$ будем называть эквивалентными (и писать $x \sim y$), если $x - y \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(a,b)$. Это равносильно тому, что для любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset K$ функции-сужения $x, y : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ эквивалентны в пространстве $\mathrm{G}[\alpha,\beta]$. Легко проверить, что если непрерывная функция $f(\cdot)$ действует из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, то эквивалентность $x \sim y$ влечет эквивалентность $f(x(\cdot)) \sim f(y(\cdot))$. Действительно, включения $f(x(\cdot)), f(y(\cdot)) \in \mathrm{G}(a,b)$ очевидны. Если $z \doteq x - y$, то $z \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(a,b)$ и $z(t-0) = 0$ для любого $t \in K$, а так как $x(t-0)$ и $y(t-0)$ существуют, то $x(t-0) = y(t-0)$. Если $\tau \to t-0$, то $x(\tau) \to x(t-0)$ и $y(\tau) \to y(t-0)$, а поскольку f непрерывна, то $f(x(\tau)) \to f(x(t-0))$ и $f(y(\tau)) \to f(y(t-0))$. Таким образом, $w(\tau) \doteq f(x(\tau)) - f(y(\tau)) \to 0$, т.е. $w(t-0) = 0$ при $t \in K$, поэтому $w \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(a,b)$. Остается вспомнить, что $f(x(\cdot)), f(y(\cdot)) \in \mathrm{G}(a,b)$.

З а м е ч а н и е 7.3. Произвольное конечное или счетное множество $T \doteq \{\tau_1, \tau_2, \dots\}$ попарно различных точек $\tau_k \in K$ будем называть *разбиением* интервала K, а совокупность всех разбиений K обозначим через $\mathbb{T}(K)$. Пустое множество мы также включаем в $\mathbb{T}(K)$. Через $\mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$ [через Γ^{loc}] обозначим пространство таких функций $x : K \to \mathbb{C}$, что для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset K$ функция-сужение $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ принадлежит пространству $\mathrm{G}^S[\alpha, \beta]$ [соответственно $\Gamma^{\mathrm{loc}}[\alpha, \beta]$], где $S \doteq T \cap [\alpha, \beta]$.

8. Обобщенные прерывистые функции

Пространство $D \doteq D(a, b)$, состоящее из финитных функций пространства $\mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(a, b)$, будем называть пространством *основных* функций. В нем определено понятие сходящейся последовательности: будем говорить, что последовательность основных функций $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in D$, сходится к основной функции $\varphi \in D$ (и писать $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$), если у всех функций φ_n и φ есть общий носитель $[\alpha, \beta] \subset K$ и $\operatorname*{Var}_{[\alpha,\beta]} (\varphi_n - \varphi) \underset{n}{\to} 0$.

П р и м е р 8.1. Если $K = \mathbb{C}$, последовательность $\{\gamma_n\}$, $\gamma_n \in \mathbb{C}$, такова, что $\gamma_n \to 0$, $\tau > 0$, $\varphi_n(t) = \gamma_n (1 - |\frac{t}{\tau}|)$ при $|\, t \,| \leqslant \tau$ и $\varphi_n(t) = 0$ при $|\, t \,| \geqslant \tau$, то $\varphi_n \xrightarrow{D} 0$. Здесь $[\alpha, \beta]$ – это любой отрезок, содержащий отрезок $[-\tau, \tau]$, а $\varphi(t) \equiv 0$.

Через D' обозначим пространство линейных непрерывных функционалов $\ell : D(a, b) \to \mathbb{C}$ (непрерывность означает, что сходимость последовательности основных функций $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$ влечет сходимость $(\ell, \varphi_n) \underset{n}{\longrightarrow} (\ell, \varphi)$), а его элементы назовем *обобщенными* функциями (*распределениями*).

Всякая (обычная) функция $x \in \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}$ порождает обобщенную функцию $\ell_x \in D'$: $(\ell_x, \varphi) = (\mathrm{L}) \int\limits_K \varphi(t) x(t)\, dt$, заданную через интеграл Лебега. Линейность функционала ℓ_x очевидна, а непрерывность следует в силу следующего обстоятельства. Если $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$, то у функций φ_n и φ есть общий носитель

$[\alpha,\beta]\subset K$ и $\operatorname*{Var}\limits_{[\alpha,\beta]}(\varphi_n-\varphi)\underset{n}{\to}0$. Поскольку $x\in \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}$, то функция $y(t)=\int\limits_{\alpha}^{t}x(s)\,ds$ абсолютно непрерывна на $[\alpha,\beta]$, а в соответствии с [3, с. 249] и следствием 1.5 справедлива цепочка

$$(\ell_x,\varphi_n)=(\mathrm{L})\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi_n(t)x(t)dt=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi_n\,dy=-\int\limits_{\alpha}^{\beta}y\,d\varphi_n\underset{n}{\longrightarrow}-\int\limits_{\alpha}^{\beta}y\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi\,dy=(\mathrm{L})\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\,x(t)\,dt=(\ell_x,\varphi).$$

Если $x\in \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$, то x почти всюду дифференцируема, причем $x'\in\mathcal{L}^{\mathrm{loc}}$ и $(\ell_{x'},\varphi)=(\mathrm{L})\int\limits_{K}\varphi(t)\,x'(t)\,dt=\int\limits_{K}\varphi\,dx$. Последний интеграл существует не только для $x\in \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$, но и для любой прерывистой функции $x\in \mathrm{G}$, и это наблюдение дает нам основание ввести следующее обозначение: $(\ell_{x'},\varphi)=\int\limits_{K}\varphi\,dx$, $x\in\mathrm{G}$ (доказательство непрерывности этого функционала во многом повторяет доказательство непрерывности функционала $\varphi\to(\ell_x,\varphi)$). Более того, работая в дальнейшем только с прерывистыми функциями $x\in\mathrm{G}$, мы вместо обозначений (ℓ_x,φ) и $(\ell_{x'},\varphi)$ будем использовать обозначения

$$(x,\varphi)\doteq\int\limits_{K}\varphi(t)\,x(t)\,dt\quad\text{и}\quad(x',\varphi)\doteq\int\limits_{K}\varphi\,dx,\tag{8.1}$$

называя функционалы *обобщенной прерывистой функцией* и *обобщенной производной прерывистой функции* соответственно.

З а м е ч а н и е 8.1. Первый из интегралов (8.1), вообще говоря, лебегов, но при $x\in\mathrm{G}$ он совпадает с римановым интегралом. Отметим также следующее обстоятельство. Поскольку $(x,\varphi)=(y',\varphi)$, где $y(t)=\int\limits_{\alpha}^{t}x(s)\,ds$, то имеет место следующая диаграмма включения семейств функционалов (8.1):

$$\big\{\,\varphi\to(x,\varphi)\,\big\}_{x\in\mathrm{G}}\ \subset\ \big\{\,\varphi\to(y',\varphi)\,\big\}_{y\in\mathrm{G}}\ \subset\ D'.\tag{8.2}$$

Другими словами, всякая обобщенная прерывистая функция является обобщенной производной от некоторой другой прерывистой функции, причем включения в диаграмме – строгие. В истинности последнего утверждения легко убедиться, показав, что δ-функция $\varphi \to \varphi(0)$ принадлежит второму, но не принадлежит первому семейству.

Т е о р е м а 8.1. *Пусть* $x \in \mathrm{G}(a,b)$. *Для того чтобы равенство* $(x,\varphi) = 0$ *имело место при всех* $\varphi \in D(a,b)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $x \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(a,b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть равенство $(x,\varphi) = 0$ выполнено при всех $\varphi \in D$. Зафиксируем произвольный отрезок $[\alpha,\beta] \subset K$ и какую-нибудь функцию $\varphi \in D$, носитель которой принадлежит $[\alpha,\beta]$. В силу леммы 2.3 для функции-сужения $x : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ имеет место представление $x = x_L + x_0$, где $x_L \in \mathrm{G}_L[\alpha,\beta]$, $x_0 \in \mathrm{G}_0[\alpha,\beta]$. Согласно замечанию 2.2 произведение φx_0 принадлежит $\mathrm{G}_0[\alpha,\beta]$, следовательно, в силу леммы 2.1 имеем $(x_0,\varphi) = 0$. Тем самым $(x_L,\varphi) = 0$ и, в частности, справедливо равенство $(x_L,\overline{\varphi}) = 0$, следовательно, $(x_L, \mathrm{Re}\,\varphi) = 0$. Таким образом, для любой функции $\varphi \in D$, носитель которой принадлежит $[\alpha,\beta]$, имеем

$$(\mathrm{Re}\,x_L, \mathrm{Re}\,\varphi) = 0 \quad \text{и} \quad (\mathrm{Im}\,x_L, \mathrm{Re}\,\varphi) = 0. \tag{8.3}$$

Допустим, что существует $t \in (\alpha,\beta]$ такое, что $\mathrm{Re}\,x_L(t) \neq 0$ (можно считать, что $\mathrm{Re}\,x_L(t) > 0$). Поскольку $\mathrm{Re}\,x_L \in \mathrm{G}_L[\alpha,\beta]$, то существует $\delta > 0$ такое, что $\mathrm{Re}\,x_L(\tau) > 0$ для всех τ из полуинтервала $(t-\delta,\, t\,] \subseteq (\alpha,\beta]$. Если функция $\varphi \in D$ такова, что $\mathrm{Re}\,\varphi(\tau) > 0$ при $\tau \in (t-\delta,\, t)$ и $\mathrm{Re}\,\varphi(\tau) = 0$ при $\tau \notin (t-\delta,\, t)$, то $(\mathrm{Re}\,x_L, \mathrm{Re}\,\varphi) > 0$, что противоречит (8.3). Таким образом, $\mathrm{Re}\,x_L(t) = 0$ для любого $t \in (\alpha,\beta]$, следовательно, $\mathrm{Re}\,x_L(t) \equiv 0$, аналогично $\mathrm{Im}\,x_L(t) \equiv 0$, поэтому $x_L(t) \equiv 0$, а сужение функции x на отрезок $[\alpha,\beta]$ совпадает с функцией x_0 из пространства $\mathrm{G}_0[\alpha,\beta]$. Поскольку последнее утверждение верно для любого отрезка $[\alpha,\beta]$, то $x \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$.

Достаточность. Если $x \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, то для любого $\varphi \in D$ прерывистая функция $y = \varphi x$ финитна, причем в силу замечания 2.2 справедливо включение $y \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$. Согласно лемме 2.1 имеем $(x, \varphi) = \int\limits_K y(t)\,dt = 0$.

Т е о р е м а 8.2. *Пусть* $x \in \mathrm{G}(a,b)$. *Для того чтобы равенство* $(x', \varphi) = 0$ *имело место при всех* $\varphi \in D(a,b)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $x \sim \mathrm{const}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Функция, тождественно равная 1, порождает функционал $(1, \varphi) = \int\limits_K \varphi(s)ds$. Покажем, что равенство $(1,\varphi) = 0$ выполнено для тех и только тех $\varphi \in D$, что функция $\psi(t) \doteq \int\limits_a^t \varphi(s)ds$ также принадлежит D. О функции ψ можно сказать следующее. Включение $\psi \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}$ очевидно, более того, $\psi \in \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$. Кроме того, если $[\alpha, \beta] \subset K$ – какой-нибудь отрезок, содержащий носитель функции φ, то $\psi(t) = 0$ для любого $t < \alpha$ и $\psi(t)$ есть величина постоянная при $t > \beta$ (если обозначить ее через c, то, очевидно, $c = (1, \varphi)$). Таким образом, если $(1,\varphi) = 0$, то $c = 0$, следовательно, ψ финитна и поэтому $\psi \in D$, и, наоборот, если $\psi \in D$, то ψ финитна, $c = 0$ и $(1, \varphi) = 0$.

Зафиксируем функцию φ_0 такую, что $(1, \varphi_0) = 1$, произвольную функцию $\varphi \in D$, и пусть $c \doteq (1, \varphi)$. Если $\varphi_1 = \varphi - c\varphi_0$, то $(1, \varphi_1) = 0$, следовательно, функция $\psi_1(t) \doteq \int\limits_a^t \varphi_1(s)ds$ принадлежит D. Поскольку $\psi_1 \in \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$, то справедлива цепочка

$$(x, \varphi_1) = \int\limits_K \varphi_1(t)x(t)\,dt = \int\limits_K x\,d\psi_1 = -\int\limits_K \psi_1 dx = -(x', \psi_1) = 0,$$

поэтому $(x, \varphi) = c\,(x, \varphi_0) = (x, \varphi_0)\,(1, \varphi)$. Таким образом, для любого $\varphi \in D$ выполнено равенство $\big(x - (x, \varphi_0),\, \varphi\big) = 0$, поэтому в силу теоремы 8.1 справедливо включение $x - (x, \varphi_0) \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$ и, следовательно, $x \sim \mathrm{const}$.

Достаточность. Если $x(t) = c + x_0(t)$, $c \in \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, то для любого $\varphi \in D$ справедливо $(x', \varphi) = \int\limits_K \varphi\, dx_0 = -\int\limits_K x_0 d\varphi$, а поскольку $x_0 \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, то в силу леммы 2.1 имеем $(x', \varphi) = 0$.

9. Присоединенные обобщенные производные

9.1. Канонические уравнения в пространствах присоединенных распределений

Теорема 8.2 применима при решении абстрактных уравнений, заданных в терминах обобщенных прерывистых функций. В соответствии с этой теоремой произвольная функция $x \in \mathrm{G}$ порождает в D функционал x' вида (8.1), причем $(x', \varphi) = 0$ при всех $\varphi \in D$ тогда и только тогда, когда $x \sim \mathrm{const}$.

Зафиксируем разбиение $T \in \mathbb{T}(K)$. Для любых $x \in \mathrm{G}_{\mathrm{loc}}^T$ (см. замечание 7.3) и $\varphi \in D$ существует присоединенный интеграл (6.1), поэтому определен линейный непрерывный функционал

$$(\dot{x}, \varphi) \doteq (\dot{x}, \varphi)^T \doteq \int\limits_K \varphi \cdot dx. \tag{9.1}$$

Поскольку φ – непрерывная функция, то $\varphi_T = 0$, следовательно, $\int\limits_K \varphi \cdot dx = \int\limits_K \varphi\, dx^T$, а тождество $(\dot{x}, \varphi) \equiv 0$ справедливо тогда и только тогда, когда $x^T \sim \mathrm{const}$. При $T = \varnothing$ имеем $\dot{x} = x'$.

Для функций x из Γ^{loc} [или $\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$] и произвольных $\varphi \in D$ существует присоединенный интеграл $\int\limits_K \varphi \circ dx$, понимаемый в смысле определения 6.2, поэтому в D' определен функционал

$$(\overset{\circ}{x}, \varphi) \doteq \int\limits_K \varphi \circ dx. \tag{9.2}$$

Из-за непрерывности φ справедливо $\int\limits_K \varphi \circ dx = \int\limits_K \varphi\, dx^c$, а тождество $(\overset{\circ}{x}, \varphi) \equiv 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $x^c \sim \mathrm{const}$ (поэтому $x^c = \mathrm{const}$). Полученные результаты можно свести в следующую таблицу.

Таблица 1

$x \in \mathrm{G}$	$x \in \mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$	$x \in \Gamma^{\mathrm{loc}}$[или $x \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$]
$(x', \varphi) \equiv 0$	$(\dot{x}, \varphi)^T \equiv 0$	$(\overset{\circ}{x}, \varphi) \equiv 0$
$x \sim \mathrm{const}$	$x^T \sim \mathrm{const}$	$x^c = \mathrm{const}$
$x(t) = c + r(t)$ $\forall c \in \mathbb{C}$ $\forall r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$	$x(t) = h(t) + r(t)$ $\forall h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]$ $\forall r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}[T]$	$x(t) = h(t)$ $\forall h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$

В последней строке таблицы использованы следующие обозначения: $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}} \doteq \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(K)$ – пространство [алгебра] таких функций $x : K \to \mathbb{C}$, что для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset K$ функция-сужение $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ является функцией скачков. Функции из $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$ также будем называть *функциями скачков*. Для любого $M \subseteq K$ пространство [алгебра] $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[M] \doteq \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(K)[M]$ состоит из тех функций $x \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$, что $T(x) \subseteq M$, а $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}[M] \doteq \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(K)[M]$ состоит из тех функций $x \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, что $x(t) = 0$ для всех $t \in M$ (что равносильно тому, что x непрерывна во всех точках M).

З а м е ч а н и е 9.1. Если $T = \varnothing$, то для функций h из $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[\varnothing]$ выполнено $T(h) = \varnothing$, т.е. $h(t) = \mathrm{const}$, поэтому $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[\varnothing] \approx \mathbb{C}$, и в дальнейшем мы будем отождествлять $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[\varnothing]$ и $\mathbb{C}$. Кроме того, $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}[\varnothing] = \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, поэтому целесообразно включить первую колонку таблицы 1 во вторую. В пользу такого объединения можно также добавить равенства $x^T = x$ и $\mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}} = \mathrm{G}$, справедливые при $T = \varnothing$, и комментарии к определению 6.1, в соответствии с которыми при $T = \varnothing$ справедливо $\int\limits_{\alpha}^{t} x \cdot dy = \int\limits_{\alpha}^{t} x\, dy$ и поэтому $(\dot{x}, \varphi)^{\varnothing} = (x', \varphi)$ при всех $x \in \mathrm{G}$ и $\varphi \in D$.

З а м е ч а н и е 9.2. Согласно (3.6) и (3.8) справедливо тождество $x^T(t, \alpha) - x^T(t, \beta) = \mathrm{const}$, поэтому функционалы (9.1) и (9.2) не зависят от $\alpha \in K$.

З а м е ч а н и е 9.3. Функционалы вида (9.1) и (9.2) будем называть *присоединенными обобщенными производными* (*присоединенными распределениями*). Уместно также отметить, что для любых функций x из Γ^{loc} [или из $\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$] определены как функционалы (9.2), так и функционалы (9.1). Для любых $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ таких, что $\lambda_j \geqslant 0$ и $\sum\limits_{j=0}^{k} \lambda_j = 1$, и для любых $T_1, \ldots, T_k \in \mathbb{T}(K)$ через X обозначим множество тех $x \in \mathrm{G}$, что $x \in \Gamma^{\mathrm{loc}}$ [или $x \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$] при $\lambda_0 > 0$ и $x \in \mathrm{G}^{T_j}_{\mathrm{loc}}$ при всех $j \geqslant 1$ таких, что $\lambda_j > 0$. Понятно, что $X = \Gamma^{\mathrm{loc}}$ [или $X = \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$] при $\lambda_0 > 0$, а при $\lambda_0 = 0$ справедливо $X = \bigcap\limits_{j \in J} \mathrm{G}^{T_j}_{\mathrm{loc}} = \mathrm{G}^{U}_{\mathrm{loc}}$, где $U \doteq \bigcup\limits_{j \in J} T_j$ (см. лемму 3.1), J – это множество тех индексов $j = 1, \ldots, n$, что $\lambda_j > 0$. Всякая функция $x \in X$ определяет в D линейный непрерывный функционал

$$(\dot{x}, \varphi)^{\overline{T}} \doteq \lambda_0\, (\overset{\circ}{x}, \varphi) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (\dot{x}, \varphi)^{T_j},$$

который будем называть *взвешенным распределением*. Что касается уравнения $(\dot{x}, \varphi)^{\overline{T}} \equiv 0$, то при $J = \varnothing$ справедливо $\lambda_0 = 1$, поэтому уравнение принимает вид $(\overset{\circ}{x}, \varphi) \equiv 0$, и его решения мы знаем. При $J \neq \varnothing$ уравнение эквивалентно совокупности

$$\begin{cases} \lambda_0\, x^c + \sum\limits_{j \in J} \lambda_j\, x^{T_j} = \gamma + \varrho \\ x \in X \end{cases} \qquad \forall\, \gamma \in \mathbb{C} \;\; \forall \varrho \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0}. \tag{9.3}$$

Для всякого уравнения (9.3) справедливо: разность $x - \varrho$ является функцией скачков, поэтому условие $x \in X$ равносильно тому, что $\varrho \in X$; функция ϱ непрерывна в точках разбиения $T \doteq \bigcap\limits_{j \in J} T_j$, поэтому $\varrho \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0}[T] \cap X$, а совокупность равносильна

$$\begin{cases} x = y + \varrho \\ y = \lambda_0\, x_c + \sum\limits_{j \in J} \lambda_j\, x_{T_j} + \gamma \end{cases} \qquad \forall\, \gamma \in \mathbb{C} \;\; \forall \varrho \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0}[T] \cap X\,.$$

Так как $\varrho(t-0) = \varrho(t+0) = 0$, то для функции y^T (непрерывной в точках $t \in T$, где $y^T(t-0) = y^T(t) = y^T(t+0)$) при $t \notin T$ имеем

$$y^T(t+0) - y^T(t-0) = y(t+0) - y(t-0) = x(t+0) - x(t-0) = 0.$$

Последнее равенство справедливо в силу следующего обстоятельства. Переходя в (9.3) к пределу при $\tau \to t-0$ и при $\tau \to t+0$, получаем, что $\sum\limits_{j\in J} \lambda_j \, [x^{T_j}(t+0) - x^{T_j}(t-0)] = 0$ для всех $t \in K$, поэтому $\Big[\sum\limits_{j\in J(t)} \lambda_j \Big] \, [x(t+0) - x(t-0)] = 0$, где $J(t) \doteq \{j \in J : \ t \notin T_j\}$. Первый сомножитель равен нулю тогда и только тогда, когда $J(t) = \varnothing$, что равносильно тому, что $t \in T$. Следовательно, для $t \in K \backslash T$ действительно имеет место равенство $x(t-0) = x(t+0)$.

Итак, $y^T(t+0) - y^T(t-0) = 0$ для всех $t \in K$, поэтому функция скачков y^T эквивалентна некоторой непрерывной функции (см. замечания 7.1 и 7.2), следовательно, $y^T \sim c = \mathrm{const}$. Разность $y^T - c$ непрерывна в T и принадлежит пространствам $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$ и X (как функция скачков), поэтому $r \doteq y^T - c + \varrho \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}[T] \cap X$. Включение $h \doteq c + y_T \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]$ очевидно, поэтому семейство всех решений уравнения $(\dot{x}, \varphi)^{\overline{T}} \equiv 0$ имеет вид

$$x(t) = h(t) + r(t) \qquad \forall h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T] \ \ \forall r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}[T] \cap X$$

и отличается от семейства решений уравнения $(\dot{x}, \varphi)^T \equiv 0$ лишь ґдовескамиЄ r из $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}[T]$. Принципиально иные решения (с ґдовескамиЄ в виде функций скачков) могут появиться, если в определении взвешенного распределения отказаться от ограничений типа $\lambda_j \geqslant 0$, однако мы на этом вопросе не останавливаемся.

Пусть $T \in \mathbb{T}(K)$ и $f \in \mathrm{G}$ – произвольная прерывистая функция. Уравнение $(\dot{x}, \varphi)^T \equiv (f, \varphi)$ для $x \in \mathrm{G}_{\mathrm{loc}}^T$ равносильно

$$\int\limits_K \varphi \cdot dx \equiv \int\limits_K \varphi(t) f(t) dt = \int\limits_K \varphi(t) d\Big(\int\limits_\alpha^t f(s) ds \Big) = \int\limits_K \varphi(t) \cdot d\Big(\int\limits_\alpha^t f(s) ds \Big). \tag{9.4}$$

Последнее равенство справедливо в силу непрерывности функций $\varphi(t)$ и $\int\limits_{\alpha}^{t} f(s)\,ds$. Следовательно, $x^T(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} f(s)\,ds \sim \mathrm{const}$, поэтому $x(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} f(s)\,ds + h(t) + r(t)$, где $h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]$, $r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}[T]$. Если присоединенная производная понимается в смысле определения (9.2), а $x \in \Gamma^{\mathrm{loc}}$ [или $x \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$], то решениями уравнения $(\overset{\circ}{x}, \varphi) \equiv (f, \varphi)$ являются функции $x(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} f(s)\,ds + h(t)$, $h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$. Другими словами, семейство ґпервообразныхЄ функции f, понимаемых в смысле присоединенных распределений, существенно расширяется: вместо констант к интегралам прибавляются функции скачков и, возможно, функции из $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$.

Заметим, что такие же решения мы получим, если $f \in \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}$, однако мы работаем лишь с прерывистыми функциями.

Пусть $X \subseteq \mathrm{G}$ – произвольное подмножество. Каковы бы ни были $T \in \mathbb{T}(K)$, оператор $\mathrm{V} : X \to \mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$ и функция $x \in X$, они порождают в D функционал $\varphi \to \int\limits_K \varphi \cdot d\mathrm{V}x$. В дальнейшем для этого функционала будем применять обозначение $\dot{\mathrm{V}}x$, т.е.

$$(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi) \doteq (\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^T \doteq \int\limits_K \varphi \cdot d\mathrm{V}x. \tag{9.5}$$

Оператор $\mathrm{V} : X \to \Gamma^{\mathrm{loc}}$ [или $\mathrm{V} : X \to \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$] и произвольная функция $x \in X$ порождают в D линейный непрерывный функционал $\overset{\circ}{\mathrm{V}}x$ вида (9.2)

$$(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x, \varphi) \doteq \int\limits_K \varphi \circ d\mathrm{V}x. \tag{9.6}$$

Для таких V и x определены функционалы (9.6) и (9.5). В соответствии с замечанием 9.1 семейство (9.5) содержит функционал $((\mathrm{V}x)', \varphi)$, соответствующий разбиению $T = \varnothing$.

З а м е ч а н и е 9.4. Если $X = \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}$ и $\mathrm{V}x = x$, то все решения, приведенные в табл. 1, «схлопываются» в одно общее решение $x(t) = \mathrm{const}$, что согласуется с решением классического уравнения $x' = 0$ и с равенством $(\overset{\circ}{x}, \varphi) = (\dot{x}, \varphi)^{T}$, справедливым для любых непрерывных x и $T \in \mathbb{T}(K)$. Если $X = C$, то присоединенная производная определена в $\mathrm{G}^{T}_{\mathrm{loc}}$ и Γ^{loc}, – здесь также $x(t) = \mathrm{const}$. Если $X = \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}_{L}$ – пространство [алгебра] непрерывных слева функций локально ограниченной вариации (очевидно, $\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}_{L} = \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}} \cap \mathrm{G}_{L}$), то решения $x(t) = \mathrm{const}$ остаются лишь для первого уравнения, а во втором и третьем случае решениями являются непрерывные слева функции скачков $x(t) = h(t)$ (соответственно $h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T] \cap \mathrm{G}_{L}$ и $h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}} \cap \mathrm{G}_{L}$).

Обобщая данные табл. 1 на произвольный оператор V с областью задания X, справедливо утверждать, что для уравнений $\dot{\mathrm{V}}x = 0$ и $\overset{\circ}{\mathrm{V}}x = 0$ имеет место табл. 2. Отметим, что в последней строке табл. 1 приведены все решения соответствующих уравнений, а в последней строке табл. 2 выписаны лишь совокупности уравнений, эквивалентные этим уравнениям.

Таблица 2

$\mathrm{V}x \in \mathrm{G}^{T}_{\mathrm{loc}}$	$\mathrm{V}x \in \Gamma^{\mathrm{loc}}$ $\left[\text{или } \mathrm{V}x \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}\right]$
$(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^{T} \equiv 0$	$(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x, \varphi) \equiv 0$
$(\mathrm{V}x)^{T} \sim \mathrm{const}$	$(\mathrm{V}x)^{c} = \mathrm{const}$
$\begin{cases} (\mathrm{V}x)^{T}(t) = c + r(t) \\ x \in X \end{cases}$ $\forall c \in \mathbb{C}\ \ \forall r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0}$	$\begin{cases} (\mathrm{V}x)^{c}(t) = c \\ x \in X \end{cases}$ $\forall c \in \mathbb{C}$

П р и м е р 9.1. Пусть $T \in \mathbb{T}(K)$ (допускается $T = \varnothing$), $\alpha \in K$, $X = \mathrm{G}^{T}_{\mathrm{loc}}$, $q \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}$ и $(\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} x\, dq$. В частном случае, когда $q\in\mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$, справедливо $(\mathrm{V}x)(t)=x(t)-\int\limits_{\alpha}^{t} q'(s)x(s)\,ds$ и $(\mathrm{V}x)'=x'-q'x$, поэтому уравнение $((\mathrm{V}x)',\varphi)\equiv 0$ равносильно уравнению $(x',\varphi)\equiv(q'x,\varphi)$ или $x'=q'x$.

Уравнение $(\dot{\mathrm{V}}x,\varphi)^{T}\equiv 0$ эквивалентно совокупности

$$x(t)-\int\limits_{\alpha}^{t} x\,dq=v(t)+r(t)\quad \forall\, v\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]\ \ \forall\, r\in\mathrm{G}_{0}^{\mathrm{loc}}[T],$$

а в силу (1.2) и леммы 2.1 справедливо представление

$$x(t)=\Big[v(\alpha)\,e^{-q(\alpha)}+\int\limits_{\alpha}^{t} e^{-q(s)}\,dv(s)\Big]\,e^{q(t)}+r(t).$$

Через h обозначим функцию, стоящую в квадратных скобках. Очевидно, она является функцией скачков и $h\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]$. Легко проверить, что отображение $v\to h$ является биекцией $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]$, поэтому всякое решение уравнения $(\dot{\mathrm{V}}x,\varphi)^{T}\equiv 0$ представимо в виде $x(t)=h(t)\,e^{q(t)}+r(t)$ через произвольные $h\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]$ и $r\in\mathrm{G}_{0}^{\mathrm{loc}}[T]$. Если $T=\varnothing$, то согласно замечанию 9.1 справедливо $x(t)=c\,e^{q(t)}+r(t)$. Если $X=\Gamma^{\mathrm{loc}}$ [или $X=\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$], то уравнение $(\mathring{\mathrm{V}}x,\varphi)=0$ равносильно совокупности уравнений

$$x(t)-\int\limits_{\alpha}^{t} x\,dq=v(t)\quad \forall\, v\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}.$$

Повторив выкладки, получим, что $x(t)=h(t)\,e^{q(t)}$, где $h\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$.

Таблица 3

$x\in\mathrm{G}_{\mathrm{loc}}^{T}$	$x\in\Gamma^{\mathrm{loc}}$ $\big[$или $x\in\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}\big]$
$(\dot{\mathrm{V}}x,\varphi)^{T}\equiv 0$	$(\mathring{\mathrm{V}}x,\varphi)\equiv 0$
$x(t)=h(t)\,e^{q(t)}+r(t)$ $\forall h\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]$ $\forall r\in\mathrm{G}_{0}^{\mathrm{loc}}[T]$	$x(t)=h(t)\,e^{q(t)}$ $\forall h\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$

З а м е ч а н и е 9.5. Каковы бы ни были разбиения $S_1, \dots, S_m \in \mathbb{T}(K)$, операторы $\mathrm{V}_j : X \to \mathrm{G}_{\mathrm{loc}}^{S_j}$, $j = 1, \dots, m$, оператор $\mathrm{V}_0 : X \to \Gamma^{\mathrm{loc}}$ [или $\mathrm{V}_0 : X \to \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$] и функция $x \in X$, они порождают в D линейный непрерывный функционал

$$(\dot{\overline{\mathrm{V}}}x, \varphi) \doteq (\dot{\overline{\mathrm{V}}}x, \varphi)^{\overline{S}} \doteq (\overset{\circ}{\mathrm{V}}_0\, x, \varphi) + \sum_{j=1}^{m} (\dot{\mathrm{V}}_j\, x, \varphi)^{S_j},$$

и определено уравнение $(\dot{\overline{\mathrm{V}}}x, \varphi) \equiv 0$, равносильное совокупности

$$\begin{cases} (\mathrm{V}_0\, x)^c(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} (\mathrm{V}_j\, x)^{S_j}(t) = c + r(t) \\ x \in X \end{cases} \qquad \forall c \in \mathbb{C} \;\; \forall r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}},$$

однако на его особенностях мы не останавливаемся.

9.2. Об импульсных уравнениях

Следуя [15; 16] *импульсным* будем называть уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))\, \dot{Q}(t),$$

заданное в терминах обобщенных функций (распределений). Через x и Q обозначены соответственно n-мерные и m-мерные векторные функции, а матричнозначная функция $f : \Omega \to \mathbb{C}^{n\times m}$ задана в области $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$. Простейшим (по записи) представителем является импульсное уравнение $\dot{x} = \delta(t)x$, однако уже для его решения существующие в настоящее время подходы дают зачастую противоречащие друг другу результаты. Мы вернемся к этому уравнению в примере 9.2 и в замечании 9.8.

С позиций присоединенных обобщенных производных появляется еще два ґимпульсныхЄ уравнения $\dot{\mathrm{V}}x = 0$ и $\overset{\circ}{\mathrm{V}}x = 0$, где оператор $\mathrm{V} : X^n \to \mathrm{G}^n$ имеет вид $(\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} f(s, x(s))\, dQ(s)$.

[Конечно, первое уравнение – это семейство уравнений, зависящее от разбиений T.] Здесь $X \subseteq \mathrm{G}$, компоненты вектора Q принадлежат $\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$, а f – непрерывная функция. В рамках настоящей работы мы ограничимся достаточно простым случаем таких уравнений, а наиболее общим импульсным уравнением можно считать систему (см. замечания 9.3 и 9.5)

$$\begin{cases} (\dot{x}_i,\varphi)^{\overline{T}_i} \equiv (\dot{\overline{\mathrm{V}}}_i\, x,\varphi)^{\overline{S}_i} \\ i=1,\dots,n \end{cases},$$

в которой взвешенные распределения $(\dot{x}_i,\varphi)^{\overline{T}_i}$, $i=1,\dots,n$, порождены некоторыми разбиениями $T_{i1},\dots,T_{ik}$ и коэффициентами $\lambda_{i0},\dots,\lambda_{ik}$. Функционалы $(\dot{\overline{\mathrm{V}}}_i\, x,\varphi)^{\overline{S}_i}$ порождены разбиениями $S_{i1},\dots,S_{im}$ и операторами $(\mathrm{V}_{ij}x)(t) \doteq \int\limits_{\alpha}^{t} f_{ij}(s,x(s))\, dQ_j(s)$, $i=1,\dots,n,\ j=0,\dots,m$, и имеют вид

$$(\dot{\overline{\mathrm{V}}}_i\, x,\varphi)^{\overline{S}_i} \doteq (\mathring{\mathrm{V}}_{i0}\, x,\varphi) + \sum_{j=1}^{m} (\dot{\mathrm{V}}_{ij}\, x,\varphi)^{S_{ij}}.$$

Перейдем, однако, к изучению более простого уравнения, прототипом которого служит система обыкновенных дифференциальных уравнений $x' = Q'Ax$, где A – квадратная матрица, $Q \in \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$ – скалярная функция.

Пусть $T \in \mathbb{T}(K)$, $\alpha \in K$, $Q \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$ (допускается $T = \varnothing$ и $T(Q) = \varnothing$), $X = \{x \in \mathrm{G}^{T}_{\mathrm{loc}} : T(x) \cap T(Q) = \varnothing\}$, A – квадратная матрица порядка n с элементами $A_{ij} \in \mathbb{C}$. Для оператора $(\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} Ax\, dQ$, действующего из X^n в $\mathrm{G}^{T,n}_{\mathrm{loc}}$ (в прямое произведение n одинаковых пространств $\mathrm{G}^{T}_{\mathrm{loc}}$), и для любого $y \in \mathrm{G}^{T,n}_{\mathrm{loc}}$ определено уравнение $(\dot{\mathrm{V}}x,\varphi)^T \equiv (\dot{y},\varphi)^T$ или $\dot{\mathrm{V}}x = \dot{y}$.

З а м е ч а н и е 9.6. В силу следствия 3.1 оператор V определен корректно. В семейство уравнений $\dot{\mathrm{V}}x = \dot{y}$ (с разными $y \in \mathrm{G}^{T,n}_{\mathrm{loc}}$) входит уравнение $\dot{\mathrm{V}}x = f$, где f – произвольная прерывистая векторная функция. Дело в том, что в соответствии с (9.4) каждая компонента вектор-функционала (f,φ) равна правой части этой цепочки.

Уравнение $\dot{\mathrm{V}}x=\dot{y}$ равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} (\mathrm{V}x)^T-y^T=\gamma+\varrho \\ x\in X^n \end{cases} \qquad \forall\,\gamma\in\mathbb{C}^n \ \ \forall\,\varrho\in\mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}.$$

В силу уравнения ϱ непрерывна в точках T, поэтому $\varrho\in\mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,n}[T]$. Пусть $P\doteq T\cap T(Q)$, $R\doteq T(Q)\backslash T$, $S\doteq T\backslash T(Q)$, $U\doteq T\cup T(Q)$. Справедливо $y^T=y^U+y_R$ и $Q=q+Q_R+Q_P$, где $q\doteq Q^c\in\mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}$, поэтому уравнения из совокупности имеют вид

$$x(t)-\int\limits_\alpha^t Ax\,dq=y^U(t)+\big[\,y_R(t)+\int\limits_\alpha^t Ax\,dQ_R\big]+\big[\,x_T(t)+\gamma\big]+\varrho(t). \tag{9.7}$$

Воспользовались тем, что поскольку $P\subseteq T$, то $\big(\int\limits_\alpha^t x\,dQ_P\big)^T=0$. Согласно лемме 3.3 функции, стоящие в квадратных скобках, являются функциями скачков, причем если обозначить их через u и v соответственно, то $u\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[R]$ и $v\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[T]$. Все функции (кроме v), входящие в (9.7), непрерывны во всех точках $t\in P$, поэтому и v непрерывна там, т. е. $v\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[S]$. Следовательно, совокупность уравнений превращается в совокупность систем

$$\begin{cases} x(t)-\int\limits_\alpha^t Ax\,dq=y^U(t)+u(t)+v(t)+\varrho(t) \\ u(t)=y_R(t)+\int\limits_\alpha^t Ax\,dQ_R \\ x\in X^n \end{cases} \qquad \forall\,v\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[S] \ \ \forall\,\varrho\in\mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[T]. \tag{9.8}$$

Все функции (кроме u и ϱ), входящие в первое уравнение (9.8), непрерывны в точках $t\in R$, поэтому функция $z\doteq u+\varrho$, а вместе с ней и z_L (напомним, что $z_L(t) = z(t-0)$) также непрерывна в точках разбиения R. В соответствии с замечанием 7.1 имеет место представление $u = u_L + u_0$, где $u_L \in \mathrm{G}^n_L$, $u_0 \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[K \backslash R]$. Поскольку $u_L \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[R]$, $u_L = z_L$, а z_L непрерывна в R, то $u_L(t)$ – вектор-константа ($= u_L(\alpha)$), поэтому $u(t) = u_L(\alpha) + u_0(t)$, т. е. u – функция, эквивалентная вектор-константе ($u \sim c \in \mathbb{C}^n$).

Если $\vartheta(\cdot) \doteq u_L(\alpha) + v(\cdot)$ (очевидно, $\vartheta \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[S]$) и $r \doteq u_0 + \varrho$ (очевидно, r непрерывна в точках разбиения T), то первое уравнение (9.8) принимает вид $x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} Ax\,dq = y^U(t) + \vartheta(t) + r(t)$. В силу этого уравнения функция r непрерывна в точках разбиения $T(Q)$, поэтому $r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[T \cup T(Q)] = \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[U]$. Таким образом, уравнение $\dot{\mathrm{V}}x = \dot{y}$ равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} Ax\,dq = y^U(t) + \vartheta(t) + r(t) \\ x \in Y^n \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\,\vartheta \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[S] \;\; \forall\, r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[U], \end{cases}$$

где через Y^n обозначено линейное многообразие

$$Y^n \doteq \Big\{ x \in X^n \;\Big|\; y_R(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} Ax\,dQ_R \sim c \in \mathbb{C}^n \Big\}.$$

Согласно (1.2) каждое уравнение совокупности эквивалентно

$$x(t) = \Phi(t) + e^{Aq(t)} \Big[e^{-Aq(\alpha)} (y^U(\alpha) + \vartheta(\alpha)) + \int\limits_{\alpha}^{t} e^{-Aq(\cdot)}\,d\vartheta \Big] + r(t), \tag{9.9}$$

где $\Phi(t) \doteq \int\limits_{\alpha}^{t} e^{A(q(t)-q(s))}\,dy^U(s)$ – функция, зависящая лишь от исходных параметров. Через h обозначим функцию, стоящую в квадратных скобках (9.9). Отображение $\vartheta \to h$ является биекцией $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[S]$, поэтому $\dot{\mathrm{V}}x = \dot{y}$ равносильно совокупности

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t) + e^{Aq(t)}\,h(t) + r(t) \\ x \in Y^n \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[S] \;\; \forall\, r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[U]. \end{cases}$$

Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что

$$x(t)=e^{Aq(t)}\Big[\,h(t)+\int\limits_{\alpha}^{t} e^{-Aq(\cdot)}\,dy^{U}\,\Big]+r(t)\quad \forall\, h\in \mathrm{H}\ \ \forall\, r\in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[U], \tag{9.10}$$

где через H обозначено линейное многообразие

$$\mathrm{H}\doteq\Big\{h\in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_{n}[S]\;\Big|\;y_{R}(t)+\int\limits_{\alpha}^{t} A\,[\Phi(s)+e^{Aq(s)}h(s)\,]\,dQ_{R}(s)\sim c\in\mathbb{C}^{\,n}\Big\}=$$

$$=\Big\{h\in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_{n}[S]\;\Big|\;y_{R}(t)+\int\limits_{\alpha}^{t} Ae^{Aq(s)}[h(s)+\int\limits_{\alpha}^{s} e^{-Aq}\,dy^{U}]\,dQ_{R}(s)\sim c\in\mathbb{C}^{\,n}\Big\}.$$

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 9.1. *Пусть* $T\in\mathbb{T}(K)$, $\alpha\in K$, $Q\in\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$, $X=\big\{x\in \mathrm{G}^{T}_{\mathrm{loc}}:\,T(x)\cap T(Q)=\varnothing\big\}$, A *– квадратная матрица порядка* n *с элементами* $A_{ij}\in\mathbb{C}$. *Для оператора* $\mathrm{V}:\,X^{n}\to \mathrm{G}^{T,\,n}_{\mathrm{loc}}$, *что* $(\mathrm{V}x)(t)\doteq x(t)-\int\limits_{\alpha}^{t} Ax\,dQ$, *и для любого* $y\in \mathrm{G}^{T,\,n}_{\mathrm{loc}}$ *уравнение* $(\dot{\mathrm{V}}x,\varphi)^{T}\equiv(\dot y,\varphi)^{T}$ *разрешимо тогда и только тогда, когда* $\mathrm{H}\neq\varnothing$. *При этом семейством решений является многообразие* (9.10).

С л е д с т в и е 9.1. *Если* $T\supseteq T(Q)$, *то* $R=\varnothing$, *поэтому* $\mathrm{H}=\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_{n}[T\backslash T(Q)]$, *а семейством решений уравнения* $(\dot{\mathrm{V}}x,\varphi)^{T}\equiv(\dot y,\varphi)^{T}$ *является многообразие* (9.10), *в котором* $U=T$:

$$x(t)=e^{Aq(t)}\Big[\,h(t)+\int\limits_{\alpha}^{t} e^{-Aq(\cdot)}\,dy^{T}\,\Big]+r(t)\qquad \forall\, h\in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_{n}[T\backslash T(Q)]\quad \forall\, r\in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[T].$$

Если к тому же $T\supseteq T(y)$, *то* $y^{T}=y^{c}$ *– непрерывная функция, а совокупность* $x(t)=e^{Aq(t)}\Big[\,c+\int\limits_{\alpha}^{t} e^{-Aq(\cdot)}dy^{c}\Big]$, $c\in\mathbb{C}^{\,n}$, *является в этом случае семейством всех непрерывных решений уравнения.*

П р и м е р 9.2. При любом μ функция $Q \doteq (1-\mu)\xi + \mu\eta$ порождает δ-функцию $\varphi \to \varphi(0)$, поскольку

$$(Q', \varphi) = \int_K \varphi \, dQ = (1-\mu) \int_K \varphi \, d\xi + \mu \int_K \varphi \, d\eta = \varphi(0).$$

Другими словами, $Q' = \delta$. Если $(\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \int_\alpha^t x \, dQ$, то при любом $T \in \mathbb{T}(K)$ уравнение $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^T \equiv 0$ можно интерпретировать как импульсное уравнение $\dot{x} = \delta(t)x$. Здесь мы имеем $n = 1$, $A = 1$, $y = 0$, $T(Q) = \{0\}$ и $q = \mathrm{const}$. Следовательно, если $0 \in T$, то множество всех решений уравнения имеет вид

$$x(t) = h(t) + r(t) \qquad \forall\, h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[\,T \backslash \{0\}] \;\; \forall\, r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}[\,T].$$

Константы, и только они, являются непрерывными решениями уравнения. Если же $0 \notin T$, то $U = T \cup \{0\}$, $S = T$, $R = \{0\}$ и

$$\mathrm{H} = \Big\{ h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T] \;\Big|\; \int_\alpha^t e^{q(\cdot)} h \, dQ \sim \mathrm{const} \Big\} = \Big\{ h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T] \;\Big|\; h(0) = 0 \Big\},$$

а множество всех решений уравнения имеет вид

$$x(t) = h(t) + r(t) \qquad \forall\, h \in \mathrm{H} \;\; \forall\, r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}[T \cup \{0\}].$$

Единственным непрерывным решением при $0 \notin T$ является $x = 0$.

З а м е ч а н и е 9.7. При любом T однородное уравнение $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^T \equiv 0$ имеет нетривиальные решения (решение $x = 0$ очевидно). Действительно. При $y = 0$ справедливо

$$x(t) = e^{Aq(t)}\, h(t) + r(t) \qquad \forall\, h \in \mathrm{H} \;\; \forall\, r \in \mathrm{G}_{0,\,n}^{\mathrm{loc}}[U], \tag{9.11}$$

где $\mathrm{H} = \Big\{ h \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[S] \;\Big|\; \int_\alpha^t e^{Aq(\cdot)} \, h \, dQ_R \sim c \in \mathbb{C}^n \Big\}$. Если все разрывы функции Q – устранимые, т.е. если $Q(t-0) = Q(t+0)$ для всех $t \in K$, то $\mathrm{H} = \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[S] \neq \varnothing$. Заметим, что в этом случае при $n = 1$ семейство (9.11) содержится в семействе решений из первой колонки табл. 3. ґЛишнимиЄ там являются функции, имеющие разрывы в точках разбиения $T(Q)$. Если у Q имеются неустранимые разрывы, то H состоит из тех $h \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[S]$, что $h(t) = 0$ как только $t \in R$ и $Q(t{-}0) \neq Q(t{+}0)$. Другими словами,

$$\mathrm{H} = \big\{ h \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[S] \;\big|\; h(t)\,[Q(t{+}0) - Q(t{-}0)] = 0 \quad \forall t \in R \big\}.$$

Если искать только непрерывные решения, т.е. если $X = C$, то для ядер Q с устранимыми разрывами семейство решений уравнения $\dot{\mathrm{V}}x = 0$ состоит из функций $x(t) = e^{Aq(t)}\,c$, $c \in \mathbb{C}^n$. Сравнивая с непрерывными решениями из примера 9.1, замечаем, что непрерывные решения ґне реагируютЄ на отдельные импульсные устранимые воздействия на непрерывное ядро. Если же Q имеет неустранимые разрывы, то единственным непрерывным решением является функция, тождественно равная нулю.

П р и м е р 9.3. Пусть $T = \varnothing$, $\alpha = 0$, $Q(t) = \chi_{(-1,1)}(t)$ – характеристическая функция интервала $(-1,1)$, $n = 1$, $A = 1$, $y \in C$. Имеем $S = \varnothing$, $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[\varnothing] \approx \mathbb{C}$, $R = U = T(Q) = \{-1,1\}$, $q = 1$ и $\mathrm{H} = \big\{ c \in \mathbb{C} \;\big|\; \int\limits_0^t (c + y)\,dQ \sim \mathrm{const} \big\}$. Если $y(t) = t^2$, то $c = -1$, а $x(t) = t^2 - 1 + r(t)$ – ґединственноеЄ решение (с точностью до слагаемого $r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}[U]$). Если $y(t) = t$, то $\mathrm{H} = \varnothing$.

Т е о р е м а 9.2. *Пусть* $\alpha \in K$, $Q \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$, A – *квадратная матрица порядка* n *с элементами* $A_{ij} \in \mathbb{C}$. *Для оператора* $\mathrm{V} : X^n \to \Gamma_n^{\mathrm{loc}}$ *такого, что* $X = \big\{ x \in \Gamma^{\mathrm{loc}} : T(x) \cap T(Q) = \varnothing \big\}$, $(\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \int\limits_\alpha^t Ax\,dQ$, *и для любого* $y \in \Gamma_n^{\mathrm{loc}}$ *семейство решений уравнения* $(\mathring{\mathrm{V}}x, \varphi) \equiv (\mathring{y}, \varphi)$ *представимо в виде* (*где* $q \doteq Q^c$)

$$x(t) = e^{Aq(t)} \big[\, h(t) + \int\limits_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\,dy^c \,\big] \qquad \forall\, h \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[\,K \backslash T(Q)]. \tag{9.12}$$

Совокупность $x(t) = e^{Aq(t)} \big[\, c + \int\limits_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\,dy^c \,\big]$, $c \in \mathbb{C}^n$, *является семейством всех непрерывных решений уравнения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение $\overset{\circ}{\mathrm{V}}x = \overset{\circ}{y}$ равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} (\mathrm{V}x)^c - y^c = \gamma \\ x \in X^n \end{cases} \qquad \forall\, \gamma \in \mathbb{C}^n.$$

Так как $Q = q + Q_c$, $q \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}$ и $\big(\int\limits_{\alpha}^{t} Ax\, dQ_c\big)^c = 0$, то уравнения принимают вид $x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} Ax\, dq = y^c(t) + \big[\, x_c(t) + \gamma\, \big]$. Функция, стоящая в квадратных скобках (обозначим ее v), является функцией скачков, т.е. $v \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}$. Все функции (кроме v), входящие в уравнение, непрерывны во всех точках $t \in T(Q)$, поэтому и v непрерывна там, т. е. $v \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[K \backslash T(Q)]$. Согласно (1.2) уравнение эквивалентно (учитывая, что введенное ниже отображение $v \to h$ является биекцией $\mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[K \backslash T(Q)]$)

$$x(t) = e^{Aq(t)} \Big\{ \big[e^{-Aq(\alpha)}(y^c(\alpha) + v(\alpha)) + \int\limits_{\alpha}^{t} e^{-Aq(\cdot)} dv \big] + \int\limits_{\alpha}^{t} e^{-Aq(\cdot)} dy^c \Big\} =$$

$$= e^{Aq(t)} \big[\, h(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} e^{-Aq(\cdot)}\, dy^c \big].$$

З а м е ч а н и е 9.8. Легко заметить, что семейство решений (9.12) (обозначим его $\mathcal{X}$) есть объединение семейств решений из следствия 9.1, у которых $r = 0$, взятое по всем T, что $T \supseteq T(Q) \cup T(y)$. Если обозначить эти семейства через $\mathcal{X}^T$, то

$$\mathcal{X} = \bigcup_{T \supseteq T(Q) \cup T(y)} \mathcal{X}^T.$$

Множества непрерывных решений в семействах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^T$ совпадают. В частности, решениями импульсного уравнения $\dot{x} = \delta(t)x$ из примера 9.2 (т.е. уравнения $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}, \varphi) \equiv 0$) являются функции $x = h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[K \backslash \{0\}]$, а непрерывные решения – это константы.

9.3. О сингулярных уравнениях

Естественным обобщением уравнений из предыдущего пункта являются уравнения с оператором $(\mathrm{V}x)(t) \doteq B(t)x(t) - \int\limits_\alpha^t Ax\,dQ$, где B – это функциональная квадратная матрица порядка n. Данный оператор, в свою очередь, допускает обобщение вида $(\mathrm{V}x)(t) \doteq B(t)x(t) - \int\limits_\alpha^t [\,dQ\,]\,x$, где Q – квадратная матрица порядка n с элементами $Q_{ij} \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$. В последнее семейство входит также семейство операторов вида $(\mathrm{V}x)(t) \doteq \int\limits_\alpha^t P\,dx - \int\limits_\alpha^t [\,dQ\,]\,x$, где P – квадратная матрица порядка n с элементами $P_{ij} \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$. [Достаточно проинтегрировать по частям первое слагаемое, а векторная константа $P(\alpha)x(\alpha)$ никак не влияет на уравнение.] Поскольку матрица B (или P) может быть необратимой, то перечисленные уравнения будем называть *сингулярными* [17].

П р и м е р 9.4. Легко проверить, что решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases}$ являются функции $x_1(t) = x_2(t) = c\,e^t$, $t \in K$, (при любом $c \in \mathbb{C}$), поэтому не всякая начальная задача разрешима. В то же время уравнение $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x, \varphi) \equiv 0$, заданное в терминах присоединенных распределений через оператор $(\mathrm{V}x)(t) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) - \int\limits_\alpha^t x(s)\,ds$ (где $X = \Gamma^{\mathrm{loc}}$, $\mathrm{V} : X^2 \to \Gamma_2^{\mathrm{loc}}$), эквивалентно совокупности

$$\begin{cases} x_1(t) - \int\limits_\alpha^t x_1(s)\,ds = h_1(t) \\ x_1(t) - \int\limits_\alpha^t x_2(s)\,ds = h_2(t) \end{cases} \qquad \forall\, h_1, h_2 \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}.$$

Согласно примеру 9.1 решением первого уравнения являются функции $x_1(t) = h(t)\,e^t$, $h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$. Вычитая второе уравнение из первого, получаем $\int\limits_\alpha^t \big(x_2(s) - x_1(s)\big)\,ds = h_1(t) - h_2(t)$. Левая часть – непрерывная функция, поэтому правая часть (как функция скачков) равна константе. При $t = \alpha$ левая часть равна нулю, следовательно, $\int\limits_\alpha^t \big(x_2(s) - x_1(s)\big)\,ds = 0$ для всех $t \in K$, поэтому $x_2 \sim x_1$ (см. лемму 2.1), т.е. $x_2 = x_1 + r$, где $r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}} \cap \Gamma^{\mathrm{loc}}$. В частности, каковы бы ни были $(t_0, x_{10}, x_{20}) \in K \times \mathbb{C}^2$, функции

$$x_1(t) = \begin{cases} x_{10}\, e^{t-t_0}, & t \leqslant t_0 \\ x_{20}\, e^{t-t_0}, & t > t_0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad x_2(t) = \begin{cases} x_{10}\, e^{t-t_0}, & t < t_0 \\ x_{20}\, e^{t-t_0}, & t \geqslant t_0 \end{cases}$$

являются решением системы и удовлетворяют начальным условиям $x_1(t_0) = x_{10}$ и $x_2(t_0) = x_{20}$.

П р и м е р 9.5. Пусть $K = \mathbb{R}$, $X = \{x \in \mathrm{G} : t\,x(t) \in \Gamma^{\mathrm{loc}}\}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Оператор $\mathrm{V} : X \to \Gamma^{\mathrm{loc}}$, что $(\mathrm{V}x)(t) \doteq t\,x(t) - \mu \int\limits_\alpha^t x(s)\,ds$, порождает уравнение $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x, \varphi) \equiv 0$. Оно разрешимо, так как $x = 0$ – одно из его решений. Пусть $x \in X$ – какое-нибудь решение уравнения, тогда существует $\gamma \in \mathbb{C}$, что $(\,t\,x(t))^c - \mu \int\limits_\alpha^t x(s)\,ds = \gamma$. В соответствии с замечанием 3.7 справедливо $(\,t\,x(t))^c = t\,x(t) - (\,t\,x(t))_c = t\,x(t) - \int\limits_\alpha^t s\,dx_c(s)$, следовательно,

$$t\,x(t) - \mu \int\limits_\alpha^t x(s)\,ds = v(t), \qquad v \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[\,\mathbb{R}\backslash\{0\}]\,.$$

Мы обозначили $v(t) \doteq \gamma + \int\limits_\alpha^t s\,dx_c(s)$, поэтому в силу специфики правой части справедливо $v \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$, причем v непрерывна в нуле. Так как $x \in \mathrm{G}$, то функция $t\,x(t)$ тоже непрерывна в нуле, поэтому $\lim\limits_{\tau\to 0-0} \tau\,x(\tau) = \lim\limits_{\tau \to 0+0} \tau\,x(\tau) = 0$, следовательно, для функции $h(t) \doteq \begin{cases} x(t)\,|\,t\,|^{1-\mu}, & t \neq 0 \\ \quad 0 \quad, & t = 0 \end{cases}$ справедливы равенства

$$\lim_{\tau\to 0-0} h(\tau)\,|\,\tau\,|^{\mu} = \lim_{\tau\to 0+0} h(\tau)\,|\,\tau\,|^{\mu} = 0. \qquad (9.13)$$

Зафиксируем отрезок $[\alpha,\beta] \subset (0,\infty)$ (или $[\alpha,\beta] \subset (-\infty,0)$). Если $q(t) \doteq t\,|\,t\,|^{\mu-1}$, $t \in [\alpha,\beta]$, то $q'(t) = \mu\,|\,t\,|^{\mu-1}$, поэтому

$$v(t) = t\,x(t) - \mu \int\limits_{\alpha}^{t} x(s)\,ds = h(t)\,q(t) - \mu \int\limits_{\alpha}^{t} h(s)\,|\,s\,|^{\mu-1}\,ds =$$

$$= h(t)\,q(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} h\,dq = h(\alpha)\,q(\alpha) + \int\limits_{\alpha}^{t} q\,dh = v(\alpha) + \int\limits_{\alpha}^{t} q\,dh\,,$$

$$h(t) - h(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{t} dh = \int\limits_{\alpha}^{t} q^{-1}(s)\,d\Big(\int\limits_{\alpha}^{s} q\,dh\Big) = \int\limits_{\alpha}^{t} q^{-1}\,dv\,.$$

Таким образом, для сужений $h\,|_{(0,\infty)}$ и $h\,|_{(-\infty,0)}$ справедливо $h\,|_{(0,\infty)} \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(0,\infty)$ и $h\,|_{(-\infty,0)} \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(-\infty,0)$. Кроме того, h удовлетворяет условию (9.13), следовательно, всякое решение уравнения $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x,\varphi) \equiv 0$ представимо в виде

$$x(t) = \begin{cases} h_1(t)\,|\,t\,|^{\mu-1} & , \quad t<0 \\ c & , \quad t=0 \\ h_2(t)\,|\,t\,|^{\mu-1} & , \quad t>0 \end{cases},$$

где $h_1 \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(-\infty,0)$, $c \in \mathbb{C}$, $h_2 \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(0,\infty)$, причем функции скачков h_1, h_2 таковы, что $\lim\limits_{\tau\to 0-0} h_1(\tau)\,|\,\tau\,|^{\mu} = \lim\limits_{\tau\to 0+0} h_2(\tau)\,|\,\tau\,|^{\mu} = 0$.

Отметим некоторые любопытные решения уравнения. В первую очередь заметим, что при $\mu \geqslant 1$ существуют непрерывные решения. Действительно. Если $\mu = 1$, то константы, и только они, являются непрерывными решениями уравнения. При $\mu > 1$ для непрерывности необходимо $h_1(t) = c_1$ при всех $t \in (-\infty,0)$, $h_2(t) = c_2$ при всех $t \in (0,\infty)$ и, следовательно, $c = 0$, поэтому непрерывные решения имеют вид $x(t) = |\,t\,|^{\mu-1} \begin{cases} c_1, & t \leqslant 0 \\ c_2, & t > 0 \end{cases}$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Следует отметить, что нет непрерывных функций, решающих начальную задачу с условием $x(0) = x_0$ при $x_0 \neq 0$. В то же время эта задача имеет решения, непрерывные в нуле. В качестве иллюстрации приведем такое решение для уравнения, в котором $\mu = 2$. Без ограничения общности считаем, что $x_0 = 1$. Пусть $h_1(-t) = h_2(t) = \left[\frac{1}{t}\right]$ – целая часть числа $\frac{1}{t}$ (при $t > 0$), а $c = 1$. В силу четности x достаточно считать, что $t \geqslant 0$. Итак, $x(0) = 1$ и $x(t) = t\left[\frac{1}{t}\right]$ при $t > 0$. На каждом полуинтервале $t \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$, $k = 1, 2, \ldots$, имеем $x(t) = k\,t$, т.е. x линейно возрастает от величины $\frac{k}{k+1}$ до 1. Тем самым $x(0{+}0) = 1 = x(0{-}0)$. Это решение интересно еще тем, что $x \notin \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$. Действительно, в правой части тождества $1 - x(t) = t\left\{\frac{1}{t}\right\}$ стоит функция из примера 1.1 (с оговоркой, что $t \in (0,1]$, а при $t = 0$ справедливо $1 - x(0) = 0$), имеющая неограниченное изменение на отрезке $[0,1]$. При $\mu < 1$ единственным непрерывным решением, определенным на всем $\mathbb{R}$, является тривиальное решение $x = 0$, однако существуют решения, непрерывные в нуле, отличные от тривиального. Например, если $\mu = 0$, $h_1(-t) = h_2(t) = \left[\frac{1}{t}\right]^{-1}$ при $0 < t \leqslant 1$, $h_1(-t) = h_2(t) = 1$ при $t > 1$ и $c = 1$, то для решения x с данными компонентами мы можем повторить предыдущие выкладки и показать непрерывность в нуле и неограниченность вариации на отрезке $[0,1]$. До сих пор мы не встречали решений, имеющих неограниченную вариацию на каком-нибудь отрезке, сингулярные же уравнения подобное явление обнаруживают.

9.4. О функционально-дифференциальных уравнениях

В отличие от предыдущих пунктов в дальнейшем будем вести речь не только о тех решениях, которые определены на всем K, но и о тех, которые определены на внутренних интервалах K. Объединение $\mathcal{G} \doteq \mathcal{G}(K) \doteq \bigcup\limits_{I \subseteq K} \mathrm{G}(I)$, взятое по всем интервалам $I \subseteq K$, представляет собой совокупность прерывистых функций $x(t)$, $t \in I$ (каждая функция x со своей областью задания I). Для любого $X \subseteq \mathcal{G}$ через $X(I)$ обозначим семейство тех функций $x : I \to \mathbb{C}$, что $x \in X$. Зафиксируем разбиение $T \in \mathbb{T}(K)$ и оператор $\mathrm{V} : X \to \mathcal{G}$, действующий из $X(I)$ в $\mathrm{G}(I)$ при всех $I \subseteq K$. Будем говорить, что прерывистая функция $x \in X(I)$

является решением уравнения $\dot{\mathrm{V}}x = 0$, если $\mathrm{V}x \in \mathrm{G}^S_{\mathrm{loc}}(I)$ и $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^S = 0$ для всех $\varphi \in D(I)$ (где $S \doteq T \cap I$). Совокупность всех таких решений обозначим через $\dot{\mathcal{X}}_{\mathrm{V}}(I)$. Будем говорить, что прерывистая функция $x \in X(I)$ является решением уравнения $\overset{\circ}{\mathrm{V}}x = 0$, если $\mathrm{V}x \in \Gamma^{\mathrm{loc}}(I)$ и $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x, \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in D(I)$. Совокупность всех таких решений обозначим через $\overset{\circ}{\mathcal{X}}_{\mathrm{V}}(I)$.

Объединение $\dot{\mathcal{X}}_{\mathrm{V}} \doteq \bigcup\limits_{I \subseteq K} \dot{\mathcal{X}}_{\mathrm{V}}(I)$, взятое по всем $I \subseteq K$, будем называть семейством решений уравнения $\dot{\mathrm{V}}x = 0$. На множестве $\dot{\mathcal{X}}_{\mathrm{V}}$ определен частичный порядок: решение $x_1(t)$, $t \in I_1$, предшествует решению $x_2(t)$, $t \in I_2$, если $I_1 \subseteq I_2$ и $x_1(t) = x_2(t)$ при всех $t \in I_1$. Максимальные элементы этого частичного порядка будем называть *непродолжаемыми решениями* уравнения $\dot{\mathrm{V}}x = 0$. Аналогичным образом определяется семейство $\overset{\circ}{\mathcal{X}}_{\mathrm{V}}$ всех решений уравнения $\overset{\circ}{\mathrm{V}}x = 0$ и понятие непродолжаемого решения этого уравнения.

З а м е ч а н и е 9.9. Все решения, о которых шла речь в предыдущих пунктах, определены на всем интервале K и, следовательно, являются непродолжаемыми решениями соответствующих уравнений. Тем не менее, при любом $I \subseteq K$ существуют и другие непродолжаемые решения этих уравнений. Например, в примере 9.5 имеются непродолжаемые решения вида $x(t) = h(t)\,|\,t\,|^{\mu-1}$, $t \in I$, где $I = (-\infty, 0)$ либо $I = (0, \infty)$, а h таковы, что нарушается условие $\lim\limits_{\tau \to 0-0} h(\tau)\,|\,\tau\,|^{\mu} = 0$ либо $\lim\limits_{\tau \to 0+0} h(\tau)\,|\,\tau\,|^{\mu} = 0$. Более того, для любого $I \subset K$ можно указать непродолжаемые решения вида $x(t) = h(t)\,|\,t\,|^{\mu-1}$, $t \in I$.

З а м е ч а н и е 9.10. Пусть $T \in \mathbb{T}(K)$. В частном случае, когда $X \subseteq \mathcal{G}$ таково, что $X(I) \subseteq \mathrm{G}^S_{\mathrm{loc}}(I)$ при любом $I \subseteq K$ (где $S \doteq T \cap I$), оператор $F : X \to \mathcal{L}$ (где $\mathcal{L} \doteq \mathcal{L}(K) \doteq \bigcup\limits_{I \subseteq K} \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}(I)$), действующий при каждом $I \subseteq K$ из $X(I)$ в $\mathrm{L}^{\mathrm{loc}}(I)$, порождает новый оператор V следующего вида. Областью задания V является множество пар $(x,\alpha)\in X(I)\times I$ при всех $I\subseteq K$, а действие оператора определяется правой частью выражения

$$\mathrm{V}(x(t),\alpha)\doteq x(t)-\int\limits_{\alpha}^{t}(Fx)(s)ds. \tag{9.14}$$

При любых $\alpha\in I$, $x\in X(I)$ и $\varphi\in D(I)$ справедливо равенство $(\dot{\mathrm{V}}x,\varphi)^S=(\dot{x},\varphi)^S-(Fx,\varphi)$, следовательно, уравнение $\dot{\mathrm{V}}x=0$ принимает вид $\dot{x}=Fx$, а при $T=\varnothing$ имеем $x'=Fx$, поэтому в соответствии со сложившейся традицией [18; 19] будем называть такие уравнения *функционально-дифференциальными.* Если каждое $X(I)$ содержится в $\Gamma^{\mathrm{loc}}(I)$ [или в $\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}(I)$], то определена присоединенная обобщенная производная (9.2) и для всех $\alpha\in I$, $x\in X(I)$ и $\varphi\in D(I)$ выполнено $(\mathring{\mathrm{V}}x,\varphi)=(\mathring{x},\varphi)-(Fx,\varphi)$, т.е. определено еще одно функционально-дифференциальное уравнение $\mathring{\mathrm{V}}x=0$, имеющее вид $\mathring{x}=Fx$. Так как $\mathrm{V}(x(t),\alpha)-\mathrm{V}(x(t),\beta)=\mathrm{const}$ для любых $\alpha,\beta\in I$, то уравнения $\dot{x}=Fx$ и $\mathring{x}=Fx$ не зависят от параметра α.

Уравнения $\dot{x}=Fx$ и $\mathring{x}=Fx$ эквивалентны совокупностям

$$\begin{cases} x(t)-\int\limits_{\alpha}^{t}(Fx)(s)\,ds=h(t)+r(t) & \forall\, I\subseteq K\\ x\in X(I) & \forall\, h\in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(I)[T]\ \ \forall\, r\in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(I)[T], \end{cases} \tag{9.15}$$

$$\begin{cases} x(t)-\int\limits_{\alpha}^{t}(Fx)(s)\,ds=h(t) & \forall\, I\subseteq K\\ x\in X(I) & \forall\, h\in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(I) \end{cases} \tag{9.16}$$

соответственно. Более точным обозначением для пространств из (9.15) является $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(I)[T\cap I]$ и $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(I)[T\cap I]$. Оно подчеркивает зависимость разбиения от интервала I, однако перегружает запись. Отметим еще, что в силу замечаний 9.2 и 9.10 всегда можно считать, что $\alpha\in I$ фиксировано.

В соответствии с определением (9.14) решения уравнения (9.16), если они существуют, представляют собой сумму локально абсолютно непрерывной функции (интегральное слагаемое в (9.16)) и функции скачков (правая часть (9.16)). Решения уравнения (9.15) могут иметь добавки в виде функций из пространства $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, причем для ряда операторов F зависимость решений от слагаемого $r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$ носит весьма существенный характер.

Будем говорить, что оператор $F : X \to \mathcal{G}$ – *сильный*, если для любых $x, y \in X$ таких, что $x \sim y$, следует $Fx \sim Fy$. Если оператор F не является сильным, будем называть его *слабым*. Например, если непрерывная функция $f(\cdot)$ действует из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, то согласно замечанию 7.2 оператор $F : x(\cdot) \to f(x(\cdot))$ – сильный. Слабый оператор приведен в примере 9.8.

Если F – сильный оператор, то в соответствии с леммой 2.1 замена $x = y + r$ приводит уравнение (9.15) к виду

$$y(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} (Fy)(s)\, ds = h(t). \tag{9.17}$$

Это означает, что если $y : I \to \mathbb{C}$ – какое-нибудь решение уравнения (9.17), то, во-первых, прерывистая функция y является суммой локально абсолютно непрерывной функции и функции скачков и, во-вторых, всякая прерывистая функция $x : I \to \mathbb{C}$, эквивалентная y, является решением уравнения $\dot{x} = Fx$. Другими словами, если F – сильный оператор, то поиск решений уравнения $\dot{x} = Fx$ сводится к процедуре решения уравнения (9.17) с последующим добавлением к y функций из пространства $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(I)[T]$. Как показывает приводимый ниже пример 9.8, ситуация меняется, когда F – слабый оператор.

П р и м е р 9.6. Пусть $T \in \mathbb{T}(K)$, $X = \bigcup\limits_{I \subseteq K} \mathrm{G}_{\mathrm{loc}}^{T \cap I}(I)$ (либо $X = \bigcup\limits_{I \subseteq K} \Gamma^{\mathrm{loc}}(I)$, либо $X = \bigcup\limits_{I \subseteq K} \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}(I)$), $(Fx)(t) = p(t)\, x(t)$, где $p \in \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}$. Очевидно, если $p \in \mathrm{G}$, то F – сильный оператор. Оператор (9.14) принимает вид $\mathrm{V}(x(t), \alpha) = x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} x\, dq$, где

$q(t) \doteq \int\limits_{\alpha}^{t} p(s)\,ds$, поэтому мы попадаем в условия примера 9.1. Следовательно, все решения уравнения $\overset{\circ}{x} = Fx$ имеют вид

$$x(t) = h(t) \exp \int\limits_{\alpha}^{t} p(s)\,ds, \ \ t \in I, \qquad \forall\, I \subseteq K \ \ \forall\, h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(I).$$

При любом I достаточно легко описать семейство всех непродолжаемых решений уравнения. Например, если $I = (\alpha, \beta)$, $\alpha = a$, $\beta < b$, а функция h такова, что нет предела $\lim\limits_{\tau \to \beta - 0} h(\tau)$, то соответствующее решение – непродолжаемое (если бы предел существовал, мы могли бы продолжить решение на полуинтервал $[\,\beta, b)$ нулем). Аналогично для уравнения $\dot{x} = Fx$.

П р и м е р 9.7. Если $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ задана и непрерывна в области $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, то определены интервал $K \doteq (a, b)$, где $a \doteq \inf\limits_{(t,x)\in\Omega} t$ и $b \doteq \sup\limits_{(t,x)\in\Omega} t$, и оператор $(Fx)(t) = f(t, x(t))$, действующий из X в $\mathcal{G}^n$. Множество X состоит из тех функций $x(t)$, $t \in I$, что $I \subseteq K$, $x \in \mathrm{G}^n(I)$ и $(t, x(t)) \in \Omega$ при всех $t \in I$. Если вместо включений $x \in \mathrm{G}^n(I)$ потребовать $x \in \mathrm{G}^{T \cap I,\, n}_{\mathrm{loc}}(I)$ при некотором $T \in \mathbb{T}(K)$ или $x \in \Gamma^{\mathrm{loc}}_n(I)$, то для оператора (9.14)

$$\mathrm{V}(x(t), \alpha) \doteq x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} (Fx)(s) ds = x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} f(s, x(s)) ds$$

определены уравнения $\dot{x} = Fx$ или $\overset{\circ}{x} = Fx$, прототипом которых служит система обыкновенных дифференциальных уравнений $x' = f(t, x)$. Уравнения равносильны совокупностям (9.15) и (9.16) соответственно, а поскольку F – сильный оператор (доказательство этого утверждения повторяет доказательство для функций из замечания 7.2), то решение совокупности (9.15) сводится к решению (9.17).

Отметим любопытные решения некоторых уравнений. Пусть $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, $f(t, x) = x^2$. Семейство непродолжаемых решений обыкновенного дифференциального уравнения $x' = x^2$ выглядит следующим образом: $x=0$ является непродолжаемым решением; если константа $c \in \mathbb{R}$ такова, что $c \neq 0$, то функция $x(t) = \frac{1}{ic-t}$, $t \in \mathbb{R}$, также является непродолжаемым решением; наконец, для любого $c \in \mathbb{R}$ функции $x(t) = \frac{1}{c-t}$, $t \in (-\infty, c)$, и $x(t) = \frac{1}{c-t}$, $t \in (c, \infty)$, – непродолжаемые решения. Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ периодическая прерывистая функция $x(t) = \frac{1}{\varepsilon+1-\{t\}}$, $t \in \mathbb{R}$, является решением уравнения $\overset{\circ}{x} = x^2$. Действительно. Пусть $t \geqslant 0$ и $n = [\,t\,]$, тогда $\{t\} = t - n$, а на каждом полуинтервале $s \in [\,k-1, k)$, $k = 1, \ldots, n$, справедливо $x(s) = \frac{1}{\varepsilon+k-s}$. Следовательно, для интегрального слагаемого из (9.16) имеет место цепочка равенств

$$\int\limits_0^t x^2(s)\,ds = \sum_{k=1}^n \int\limits_{k-1}^k \frac{ds}{(\varepsilon+k-s)^2} + \int\limits_n^t \frac{ds}{(\varepsilon+n+1-s)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\varepsilon+k-s}\Big|_{k-1}^k + \frac{1}{\varepsilon+n+1-s}\Big|_n^t = \frac{1}{\varepsilon+n+1-t} + \frac{n-\varepsilon}{\varepsilon(\varepsilon+1)} = x(t) - h(t),$$

где $h(t) \doteq \frac{\varepsilon-[\,t\,]}{\varepsilon(\varepsilon+1)}$, $t \in \mathbb{R}$, – функция скачков, т.е. $h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ (для отрицательных t выкладки аналогичны).

Пусть $\Omega = \mathbb{R} \times \{x \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Im} x = 0\}$, $f(t,x) = -2\sqrt{x}$. Непродолжаемые решения обыкновенного дифференциального уравнения $x' = -2\sqrt{x}$ имеют вид $x(t) = (c-t)^2$, $t \in (-\infty, c)$, т.е. нет ни одного решения, определенного на всем $\mathbb{R}$. Покажем, что прерывистая (периодическая) функция $x(t) = (1 - \{t\})^2$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет уравнению $\overset{\circ}{x} = -2\sqrt{x}$. Действительно. Пусть $t \geqslant 0$ и $n = [\,t\,]$, тогда $\{t\} = t - n$, а на каждом полуинтервале $s \in [\,k-1, k)$, $k = 1, \ldots, n$, справедливо $x(s) = (k-s)^2$. Следовательно, для интегрального слагаемого из (9.16) имеет место

$$-2\int\limits_0^t \sqrt{x(s)}\,ds = -2\sum_{k=1}^n \int\limits_{k-1}^k (k-s)\,ds - 2\int\limits_n^t (n+1-s)\,ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k-s)^2 \Big|_{k-1}^{k} + (n+1-s)^2 \Big|_{n}^{t} = (n+1-t)^2 - (n+1) = x(t) - h(t),$$

где $h(t) \doteq 1 + [\,t\,]$, $t \in \mathbb{R}$, – функция скачков, т.е. $h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ (для отрицательных t выкладки аналогичны).

П р и м е р 9.8. Если $(Fx)(t) = x(0)\,\theta(t)$, где $\theta(t)$ – функция Хевисайда, т.е. $\theta(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $\theta(t) = 1$ при $t > 0$, то оператор F – слабый. Совокупность (9.16) имеет вид

$$\begin{cases} x(t) - x(0)\big(t\,\theta(t) - \alpha\,\theta(\alpha)\big) = h(t) & \forall\, I \subseteq \mathbb{R} :\ 0 \in I \\ x \in \Gamma^{\mathrm{loc}}(I) & \forall\, h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(I) \end{cases}$$

(интеграл вычислили интегрированием по частям). Подставив в это равенство $t = 0$, исключив $\alpha\,\theta(\alpha)$ и введя обозначение $c = x(0)$, получаем множество всех решений уравнения $\overset{\circ}{x} = Fx$ – это функции $x(t) = c\big(1 + t\,\theta(t)\big) + h(t) - h(0)$, $t \in I$, с произвольными параметрами $c \in \mathbb{C}$, $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$, $h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(I)$. Непрерывные непродолжаемые решения – это функции $x(t) = c\big(1 + t\,\theta(t)\big)$, $t \in \mathbb{R}$. Это семейство совпадает с семейством непродолжаемых решений уравнения-аналога $x'(t) = x(0)\,\theta(t)$, понимаемого как равенство п.в. (т.е. уравнения $x(t) - x(\alpha) = \int_{\alpha}^{t} x(0)\theta(s)\,ds$). Что касается уравнения $\dot{x} = Fx$ (при некотором T), то проделав аналогичные выкладки с совокупностью (9.15), получим семейство

$$x(t) = c\big(1 + t\,\theta(t)\big) + h(t) - h(0) + r(t) - r(0), \qquad t \in I,$$

с параметрами $c \in \mathbb{C}$, $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$, $h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(I)[T]$, $r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(I)[T]$. Отметим любопытное явление, характерное для уравнений со слабым оператором. При $T = \varnothing$ уравнение имеет вид $x' = Fx$, а его решения – это функции $x(t) = c\big(1 + t\,\theta(t)\big) + r(t) - r(0)$, $t \in I$, где $r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(I)$. Это семейство отличается от семейства решений уравнения-аналога $x'(t) = x(0)\,\theta(t)$, понимаемого как равенство п.в., наличием дополнительного параметра r, который дает существенный вклад в решение при $r(0) \neq 0$.

Исследования, посвященные слабым операторам, анонсированы в [20] и готовы к печати в рамках другой работы.

9.5. Об уравнениях с разрывной правой частью

Мы вскользь затронем этот важный класс уравнений [21], проиллюстрировав применимость теории присоединенных распределений на следующем примере. Пусть $\Omega = \mathbb{R} \times \{x \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} x = 0\}$,

$$f(t,x) = -\operatorname{sign} x \doteq -\begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ \gamma & , \quad x = 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases} , \qquad (t,x) \in \Omega,$$

– разрывная по x функция, зависящая от параметра $\gamma \in \mathbb{R}$. При $\gamma = 0$ непродолжаемые решения уравнения $x' = -\operatorname{sign} x$, понимаемого как равенство п.в. (т.е. уравнения $x(t) - x(\alpha) = -\int\limits_{\alpha}^{t} \operatorname{sign} x(s)\, ds$), имеют вид $x(t) = \pm \begin{cases} c - t, & t \leqslant c \\ 0 \ , & t \geqslant c \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, а при $\gamma \neq 0$ непродолжаемые решения этого уравнения имеют вид $x(t) = \pm(c - t)$, $t \in (-\infty, c)$. Покажем, что при любом γ прерывистая (периодическая) функция $x(t) = 1 - \{t\}$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет уравнению $\overset{\circ}{x} = -\operatorname{sign} x$. Действительно, так как $x(t) > 0$ при всех t, то $\operatorname{sign} x(t) = 1$, а для интеграла из (9.16) имеем $-\int\limits_{0}^{t} \operatorname{sign} x(s)\, ds = -t = x(t) - h(t)$, где $h(t) \doteq 1 + [\,t\,]$, $t \in \mathbb{R}$, – функция скачков, т.е. $h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Список литературы

1. Демышев А.С., Родионов В.И. О прерывистых функциях нескольких переменных // Тез. докл. Рос. унив.-акад. конф. Ижевск, 2004. Ч. 2. С. 77-78.
2. Hönig Ch.S. Volterra-Stieltjes integral equations. Mathematics Studies 16. Amsterdam: North-Holland, 1975. 152 p.
3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. 3-е изд. М.: Наука, 1974. 480 с.
4. Родионов В.И. О пространстве регулярно дифференцируемых функций // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2004. Вып. 1(29). С. 3-32.

5. Курцвейль Я. Об обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнениях, обладающих разрывными решениями // ПММ. 1958. Т. 22, Ѓ 1. С. 27-45.
6. Родионов В.И. Квазиинтегральные уравнения в пространстве прерывистых функций // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1997. Вып. 2(10). С. 3-51.
7. Родионов В.И. Квазиинтегралы // Дифференц. уравнения. 2000. Т.36, Ѓ 6. С. 859.
8. Hildebrandt T.H. Introduction to the theory of integration. N.Y.; L.: Academic Press, 1963. 385 p.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. М.: Наука, 1981. 544 с.
10. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 448 с.
11. Tvrdý M. Regulated functions and the Perron-Stieltjes integral // Časopis pěst. mat. 1989. Ѓ 114. P. 187-209.
12. Общая алгебра. Т.1. / Под ред. Л.А.Скорнякова. М.: Наука, 1990. 592 с.
13. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976. 648 с.
14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. 5-е изд. М.: Наука, 1969. 656 с.
15. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы: Модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.
16. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев.: Вища шк., 1987. 288 с.
17. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980. 224 с.
18. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
19. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: АНО ґИнститут компьютерных исследованийЄ, 2002. 384 с.
20. Родионов В.И. Об уравнениях со слабым оператором // Тез. докл. Рос. унив.-акад. конф. Ижевск, 2004. Ч. 2. С. 88-90.
21. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.