Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2005. Ґ1(31)

УДК 517.9

© **Л.И. Данилов**
danilov@otf.pti.udm.ru

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВЕЙЛЮ МЕРОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЯХ

Ключевые слова: почти периодические по Вейлю функции, мерозначные функции, вероятностные борелевские меры

Abstract. We consider measure-valued functions $\mathbb{R} \ni t \to \mu[.;t]$ taking values in the metric space $(\mathcal{M}_0(U), \rho_w)$ of probability Borel measures defined on the σ-algebra of Borel subsets of a complete seperable metric space U. The metric space $(\mathcal{M}_0(U), \rho_w)$ is endowed with the metric ρ_w equivalent to the Lévy-Prokhorov metric. It is proved that the measure-valued function $\mathbb{R} \ni t \to \mu[\,.\,;t] \in (\mathcal{M}_0(U), \rho_w)$ is Weyl almost periodic if and only if the functions $\int\limits_U \mathcal{F}(x)\,\mu\,[\,dx;\,.\,]$ are Weyl almost periodic (of order 1) for all bounded continuous functions $\mathcal{F} : U \to \mathbb{R}$.

Введение

Пусть (U, ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство, $C_b(U)$ – множество всех ограниченных непрерывных функций $\mathcal{F} : U \to \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(U)$ – множество функций $U \ni x \to \mathcal{F}(x) \in \mathbb{R}$ таких, что $0 \leqslant \mathcal{F}(x) \leqslant 1$ и $|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)| \leqslant \rho(x, y)$ для всех $x, y \in U$. Обозначим через $\mathcal{M}(U)$ линейное пространство борелевских знакопеременных мер (зарядов), определенных на σ-алгебре $\mathcal{B}(U)$ борелевских множеств $\mathcal{O} \subseteq U$, наделенное нормой

$$\|\mu\|_w = \sup_{\mathcal{F} \in \mathcal{L}(U)} \Big| \int\limits_U \mathcal{F}(x)\,\mu[dx] \Big|, \quad \mu[.] \in \mathcal{M}(U)\,; \tag{1}$$

$\mathcal{M}^+(U)$ – множество неотрицательных борелевских мер из $\mathcal{M}(U)$, $\mathcal{M}_0(U)$ – множество вероятностных борелевских мер, при этом

$\mathcal{M}_0(U) \subset \mathcal{M}^+(U) \subset \mathcal{M}(U)$. На множестве $\mathcal{M}_0(U)$ норма $\|.\|_w$ определяет метрику ρ_w , эквивалентную метрике Леви–Прохорова ρ_0 [1, с. 377].

Пусть $CAP(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$, $S_p(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$ и $W_p(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$ – соответственно множества почти периодических (п.п.) по Бору, п.п. по Степанову и п.п. по Вейлю порядка $p \geqslant 1$ мерозначных функций $\mathbb{R} \ni t \to \mu[.;t]$ со значениями в линейном нормированном пространстве $(\mathcal{M}(U),\|.\|_w)$. Мерозначная функция $\mathbb{R} \ni t \to \mu[.;t] \in \mathcal{M}(U)$ называется слабо почти периодической по Бору (слабо п.п. по Степанову или слабо п.п. по Вейлю порядка $p \geqslant 1$), если для любой функции $\mathcal{F} \in C_b(U)$ функция

$$\mathbb{R} \ni t \to \int\limits_U \mathcal{F}(x)\, \mu[dx;t] \in \mathbb{R}$$

п.п. по Бору (п.п. по Степанову или п.п. по Вейлю порядка p). Соответствующие множества слабо п.п. функций обозначим через $CAP^w(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$, $S^w_p(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$ и $W^w_p(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$.

Мерозначные функции $\mathbb{R} \ni t \to \mu[.;t] \in (\mathcal{M}_0(U),\rho_0)$ находят применение в задачах теории управления [2; 3]. В ряде задач рассматриваются функции $\mathbb{R} \ni t \to \mu[.;t]$ со знакопеременной мерой $\mathcal{B}(U) \ni \mathcal{O} \to \mu[\mathcal{O};t] \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ (см., например, [4; 5]). Слабо п.п. по Степанову мерозначные функции при исследовании оптимального п.п. управления использовались в [6] (см. также [7; 8]). В [9; 10] функции $\mu[.;.] \in S^w_1(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U))$ применялись при исследовании п.п. по Степанову сечений многозначных п.п. по Степанову отображений. В частности, в [10] доказано, что многозначные отображения $\mathbb{R} \ni t \to \operatorname{supp}\mu[.;t]$, где $\mu[.;.] \in S^w_1(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U))$, и только они представимы в виде $\overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} f_j(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, где функции $f_j : \mathbb{R} \to U$, $j \in \mathbb{N}$, принадлежат пространству п.п. по Степанову порядка 1 функций $S(\mathbb{R},U) = S_1(\mathbb{R},(U,\rho'))$ со значениями в метрическом пространстве (U,ρ') с метрикой $\rho'(x,y) = \min\{1,\rho(x,y)\}$, $x,y \in U$ ($\operatorname{supp}\mu$ – носитель меры $\mu \in \mathcal{M}_0(U)$, $\overline{A}$ – замыкание множества $A \subseteq U$).

В [11] (для полного сепарабельного метрического пространства (U,ρ)) доказано, что $CAP^w(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U)) = CAP(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U))$ и $S_1^w(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U)) = S_1(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U))$. Разные классы мерозначных п.п. (по Бору и по Степанову) функций $\mathbb{R}\ni t\to\mu[.;t]\in\mathcal{M}(U)$ изучались в [12], где доказано, что $\mu[.;.]\in CAP^w(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$ тогда и только тогда, когда $\mu[.;.]\in CAP(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$ и существует компакт $K\subset(\mathcal{M}(U),\|.\|_w)$ такой, что $|\mu|\,[.;t]\in K$ при всех $t\in\mathbb{R}$ ($|\mu|\in\mathcal{M}^+(U)$ – полная вариация меры $\mu\in\mathcal{M}(U)$). Условия $\mu[.;.]\in S_p^w(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$ и $\mu[.;.]\in S_p(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$ (для каждого $p\geqslant 1$) в общем случае независимы [12]. Если $\mu[.;t]\in\mathcal{M}^+(U)$ при почти всех (п.в.) $t\in\mathbb{R}$, то $\mu[.;.]\in S_p^w(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$ тогда и только тогда, когда $\mu[.;.]\in S_p(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$, $p\geqslant 1$ [12].

В работе доказано равенство $W_1^w(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U))=W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U))$.

В § 1 приведены определения и некоторые утверждения о п.п. функциях, а также о вероятностных борелевских мерах, которые используются в дальнейшем. Большинство утверждений о п.п. функциях можно найти в [13; 14]. Многие свойства п.п. по Вейлю функций приведены в [15]. Относительно утверждений о вероятностных борелевских мерах см., например, [16]. Основные результаты работы содержатся в § 2. В § 3 доказывается теорема 2.2, сформулированная в § 2.

1. Определения и некоторые свойства почти периодических функций

Пусть (U,ρ) – полное метрическое пространство. Через $\overline{A}$ обозначим замыкание множества $A\subseteq U$, $K_r(x)=\{y\in U:\rho(x,y)\leqslant r\}$, $x\in U$, $r\geqslant 0$. Множество $K\subseteq U$ предкомпактно, если $\overline{K}$ – компактное множество. Функция $f:\mathbb{R}\to U$ называется *простой*, если существуют точки $x_j\in U$ и непересекающиеся измеримые по Лебегу множества $T_j\subseteq\mathbb{R}$, $j=1,\dots,n$ (где $n\in\mathbb{N}$), такие, что $\operatorname{mes}\mathbb{R}\setminus\bigcup_j T_j=0$ и $f(t)=x_j$ при $t\in T_j$ (mes – мера Лебега на $\mathbb{R}$). Функция $f : \mathbb{R} \to U$ *измерима*, если она при почти всех (п.в.) $t \in \mathbb{R}$ совпадает с пределом почти всюду (п.в.) сходящейся последовательности простых функций. Совокупность измеримых функций $f : \mathbb{R} \to U$ обозначим через $M(\mathbb{R}, U)$ (функции, совпадающие при п.в. $t \in \mathbb{R}$, отождествляются); $(L_\infty(\mathbb{R}, U), D^{(\rho)}_\infty)$ – метрическое пространство в существенном ограниченных функций из $M(\mathbb{R}, U)$ с метрикой

$$D^{(\rho)}_\infty(f,g) = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} \rho(f(t),g(t)) , \quad f,g \in L_\infty(\mathbb{R},U) .$$

Фиксируем точку $x_0 \in U$. Пусть при $p \geqslant 1$

$$M_p(\mathbb{R},U) \doteq \Big\{ f \in M(\mathbb{R},U) : \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \int\limits_{\xi}^{\xi+1} \rho^p(f(t),x_0)\, dt < +\infty \Big\}.$$

На множестве $M_p(\mathbb{R}, U)$ для всех $l > 0$ определяются метрики

$$D^{(\rho)}_{p,l}(f,g) = \Big(\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{1}{l} \int\limits_{\xi}^{\xi+l} \rho^p(f(t),g(t))\, dt\Big)^{1/p}, \quad f,g \in M_p(\mathbb{R},U) .$$

Если $l_1 \geqslant l$, то справедливы оценки

$$\big(\tfrac{l}{l_1}\big)^{1/p} D^{(\rho)}_{p,l}(f,g) \leqslant D^{(\rho)}_{p,l_1}(f,g) \leqslant \big(1+\tfrac{l}{l_1}\big)^{1/p} D^{(\rho)}_{p,l}(f,g) ,$$

поэтому все метрики $D^{(\rho)}_{p,l}$, $l > 0$, эквивалентны и существует предел

$$\tilde{D}^{(\rho)}_p(f,g) = \lim_{l\to+\infty} D^{(\rho)}_{p,l}(f,g) = \inf_{l>0} D^{(\rho)}_{p,l}(f,g) , \quad f,g \in M_p(\mathbb{R},U) ,$$

который является полуметрикой на $M_p(\mathbb{R}, U)$ (для функций $f, g \in M_p(\mathbb{R}, U)$, отличающихся друг от друга на некотором ограниченном в $\mathbb{R}$ множестве, имеем $\tilde{D}^{(\rho)}_p(f, g) = 0$). Обозначим через $M^\sharp_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geqslant 1$, множество тех функций $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$, для которых

$$\lim_{\delta\to+0} \lim_{l_0\to+\infty} \sup_{l\geqslant l_0} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \Big[\frac{1}{l} \sup_{E\subset[\xi,\xi+l]:\ \mathrm{mes}E\leqslant\delta l} \int\limits_E \rho^p(f(t),x_0)\, dt\Big]^{1/p} = 0.$$

Множество $M_p^\sharp(\mathbb{R},U)$ (как и множество $M_p(\mathbb{R},U)$) не зависит от выбора точки x_0 .

Если $U=(\mathcal{H},\|.\|)$ – банахово пространство ($\rho(x,y)=\|x-y\|$, $x,y\in\mathcal{H}$; в случае $\mathcal{H}=\mathbb{C}$ полагаем $\|z\|=|z|$, $z\in\mathbb{C}$), то для функций $f\in L_\infty(\mathbb{R},\mathcal{H})$ определена норма

$$\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|\,,$$

а для функций $f\in M_p(\mathbb{R},\mathcal{H})$, $p\geqslant 1$, определены нормы

$$\|f\|_{p,l}^{(S)}=\Big(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\frac{1}{l}\int\limits_{\xi}^{\xi+l}\|f(t)\|^p dt\Big)^{1/p},\quad l>0\,,$$

и полунорма

$$\|f\|_p^{(W)}=\lim_{l\to+\infty}\|f\|_{p,l}^{(S)}\,.$$

В дальнейшем удобно предполагать, что $(\mathcal{H},\|.\|)$ – комплексное банахово пространство. Если банахово пространство $(\mathcal{H},\|.\|)$ вещественное, то можно рассматривать его комплексификацию $\mathcal{H}+i\mathcal{H}$, отождествляя пространство $\mathcal{H}$ с вещественным подпространством (норма $\|.\|_{\mathcal{H}+i\mathcal{H}}$ на вещественном подпространстве $\mathcal{H}$ совпадает с исходной нормой $\|.\|$).

Множество $T\subseteq\mathbb{R}$ называется *относительно плотным*, если существует число $a>0$ такое, что $[\xi,\xi+a]\cap T\neq\varnothing$ для всех $\xi\in\mathbb{R}$. Непрерывная функция $f\in C(\mathbb{R},U)$ принадлежит пространству $CAP\,(\mathbb{R},U)$ *п.п. по Бору* функций, если для любого $\varepsilon>0$ множество чисел $\tau\in\mathbb{R}$, для которых

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\rho(f(t),f(t+\tau))<\varepsilon\,,$$

относительно плотно. Имеем $CAP\,(\mathbb{R},U)\subseteq L_\infty(\mathbb{R},U)$, и каждая функция из $CAP\,(\mathbb{R},U)$ равномерно непрерывна. Число $\tau\in\mathbb{R}$ называется $(\varepsilon,D_\infty^{(\rho)})$ *-почти периодом* (или просто ε *-почти периодом*) функции $f\in L_\infty(\mathbb{R},U)$, $\varepsilon>0$, если $D_\infty^{(\rho)}(f(.),f(.+\tau))<\varepsilon$.

Число $\tau \in \mathbb{R}$ называется $(\varepsilon, D^{(\rho)}_{p,l})$ *-почти периодом* функции $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$, если $D^{(\rho)}_{p,l}(f(.), f(. + \tau)) < \varepsilon$. Число $\tau \in \mathbb{R}$ называется $(\varepsilon, \tilde{D}^{(\rho)}_p)$ *-почти периодом* функции $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$, если $\tilde{D}^{(\rho)}_p(f(.), f(. + \tau)) < \varepsilon$. Функция $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geqslant 1$, принадлежит пространству $S_p(\mathbb{R}, U)$ *п.п. по Степанову порядка* p функций, если для любого $\varepsilon > 0$ относительно плотно множество $(\varepsilon, D^{(\rho)}_{p,1})$-почти периодов функции f. Функция $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geqslant 1$, принадлежит пространству $W_p(\mathbb{R}, U)$ *п.п. по Вейлю порядка* p функций, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $l = l(\varepsilon, f) > 0$ такое, что множество $(\varepsilon, D^{(\rho)}_{p,l})$-почти периодов функции f относительно плотно [13]. (В последнее время ряд авторов для функций $f \in W_p(\mathbb{R}, U)$ использует название ґequi-Weyl almost periodic functionsЄ (см., например, [17; 18]), определяя п.п. по Вейлю (порядка p) функции как функции $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geqslant 1$, для которых для любого $\varepsilon > 0$ относительно плотно множество $(\varepsilon, \tilde{D}^{(\rho)}_p)$-почти периодов.)

Справедливы вложения

$$CAP(\mathbb{R}, U) \subseteq S_p(\mathbb{R}, U) \subseteq W_p(\mathbb{R}, U) \subseteq M^\sharp_p(\mathbb{R}, U),$$

$$S_{p_1}(\mathbb{R}, U) \subseteq S_p(\mathbb{R}, U), \quad W_{p_1}(\mathbb{R}, U) \subseteq W_p(\mathbb{R}, U), \quad p_1 \geqslant p \geqslant 1.$$

Последовательность $\{\tau_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ называется f *-возвращающей* для функции $f \in CAP(\mathbb{R}, U)$, если $D^{(\rho)}_\infty(f(.), f(. + \tau_j)) \to 0$ при $j \to +\infty$. Аналогично последовательность $\{\tau_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ называется f *-возвращающей* для $f \in S_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geqslant 1$, если $D^{(\rho)}_{p,1}(f(.), f(. + \tau_j)) \to 0$ при $j \to +\infty$ (последнее выполняется тогда и только тогда, когда $D^{(\rho)}_{p,l}(f(.), f(. + \tau_j)) \to 0$ при $j \to +\infty$ для какого-либо (и, следовательно, для всех) $l > 0$). Последовательность $\{\tau_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ называется f *-возвращающей* для функции $f \in W_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geqslant 1$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $l = l(\varepsilon, f) > 0$ и $j_0 \in \mathbb{N}$ такие, что все числа τ_j, для которых $j \geqslant j_0$, являются $(\varepsilon, D^{(\rho)}_{p,l})$-почти периодами функции f. Если п.п. функция $f : \mathbb{R} \to U$ принадлежит нескольким из рассматриваемых пространств п.п. функций ($CAP\,(\mathbb{R}, U)$, $S_p(\mathbb{R}, U)$ или $W_p(\mathbb{R}, U)$ для разных $p \geqslant 1$), то f-возвращающие последовательности не зависят от того, какому именно из рассматриваемых пространств п.п. функций функция f считается принадлежащей [15].

Для функций $f \in W_1(\mathbb{R}, U)$ через $\operatorname{Mod} f$ обозначается множество (модуль, группа по сложению) чисел $\lambda \in \mathbb{R}$ таких, что $e^{i\lambda\tau_j} \to 1$ при $j \to +\infty$ (где $i^2 = -1$) для любой f-возвращающей последовательности $\{\tau_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Если $\tilde{D}^{(\rho)}_1(f(.), y_0(.)) \neq 0$ для всех постоянных функций $y_0(t) \equiv y_0 \in U$, $t \in \mathbb{R}$, то $\operatorname{Mod} f$ – счетный модуль (в противном случае $\operatorname{Mod} f = \{0\}$).

Л е м м а 1.1 ([13]). *Пусть* $(\mathcal{H}, \|.\|)$ *– комплексное банахово пространство,* $f \in W_1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ *и* $g \in CAP\,(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. *Тогда для* $\xi \in \mathbb{R}$ *и* $a \in \mathbb{R}$ *существует предел* (*не зависящий от* $a \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{l\to+\infty} \frac{1}{l} \int\limits_a^{a+l} g(t) f(\xi - t)\, dt = (f * g)(\xi)$$

(*интеграл здесь понимается в смысле Бохнера* [19]), *при этом* $f * g \in CAP\,(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ *и сходимость равномерна по* $\xi \in \mathbb{R}$ *и* $a \in \mathbb{R}$.

Пусть $f \in W_1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ (где $(\mathcal{H}, \|.\|)$ – комплексное банахово пространство). Из леммы 1.1 следует, что для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ существует среднее значение

$$\lim_{l\to+\infty} \frac{1}{l} \int\limits_0^{l} e^{-i\lambda t} f(t)\, dt = M\,\{e^{-i\lambda t} f\}\,.$$

Обозначим через $\Lambda\{f\}$ множество *показателей Фурье* функции $f \in W_1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, т.е. тех чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых $M\,\{e^{-i\lambda t} f\} \neq 0$, и пусть $\operatorname{Mod}(\Lambda\{f\})$ – это *модуль показателей Фурье* функции $f \in W_1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ (наименьшая группа по сложению в $\mathbb{R}$, содержащая множество $\Lambda\{f\}$).

Л е м м а 1.2 ([15]). *Для всех* $f \in W_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ *справедливо равенство* $\operatorname{Mod} f = \operatorname{Mod}(\Lambda\{f\})$

Л е м м а 1.3. ([15; 20]). *Пусть* $f \in W_p(\mathbb{R},U) \subseteq W_1(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$. *Тогда для любой последовательности* $\{\tau_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *следующие условия эквивалентны:*

1) $\{\tau_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – f*-возвращающая последовательность,*

2) $\tilde{D}_p^{(\rho)}(f(.), f(. + \tau_j)) \to 0$ *при* $j \to +\infty$,

3) $e^{i\lambda\tau_j} \to 1$ *при* $j \to +\infty$ *для всех* $\lambda \in \operatorname{Mod} f$.

Если $\Lambda_j \subseteq \mathbb{R}$ – произвольные модули (где индекс j принадлежит любому непустому множеству), то через $\sum\limits_j \Lambda_j$ (или $\Lambda_1 + \cdots + \Lambda_n$ для конечного числа модулей Λ_j, $j = 1, \ldots, n$) обозначается наименьший модуль (группа по сложению) в $\mathbb{R}$, содержащий все множества Λ_j.

Если $f \in W_1(\mathbb{R},U)$ и $f_j \in W_1(\mathbb{R},U_j)$, $j \in \mathbb{N}$, где U, U_j – произвольные (полные) метрические пространства, то вложение $\operatorname{Mod} f \subseteq \sum\limits_j \operatorname{Mod} f_j$ имеет место тогда и только тогда, когда любая последовательность $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, являющаяся f_j-возвращающей для всех $j \in \mathbb{N}$, является также f-возвращающей.

Если $f, f_j \in W_p(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, $j \in \mathbb{N}$, и $\tilde{D}_p^{(\rho)}(f, f_j) \to 0$ при $j \to +\infty$, то $\operatorname{Mod} f \subseteq \sum\limits_j \operatorname{Mod} f_j$.

Пусть (U,ρ) и (V,ρ_V) – метрические пространства, $C(U,V)$ – метрическое пространство непрерывных функций $\mathcal{F} : U \to V$ (которые могут не быть ограниченными) с метрикой

$$d_{C(U,V)}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \sup_{x\in U} \min\{1, \rho_V(\mathcal{F}_1(x), \mathcal{F}_2(x))\}, \ \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in C(U,V).$$

Через $\mathcal{F}(.|_Y)$ будем обозначать ограничение (сужение) функции $\mathcal{F}(.) \in C(U,V)$ на непустое множество $Y \subseteq U$.

Т е о р е м а 1.1 ([15]). *Пусть* (U,ρ) *и* (V,ρ_V) *– полные метрические пространства,* $r>0$, $p\geqslant 1$. *Предположим, что функция* $\mathbb{R}\ni t\to\mathcal{F}(.;t)\in C(U,V)$ *удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) для каждого замкнутого шара $K_r(x)$, $x\in U$, *(фиксированного) радиуса* r *функция*

$$\mathbb{R}\ni t\to\mathcal{F}(.|_{K_r(x)};t)\in C(K_r(x),V)$$

принадлежит пространству $W_1(\mathbb{R},(C(K_r(x),V),d_{C(K_r(x),V)}))$,

2) при п.в. $t\in\mathbb{R}$ *для всех* $x\in U$ *справедливо неравенство* $\rho_V(\mathcal{F}(x;t),y_0)\leqslant B\rho(x,x_0)+B(t)$, *где* $x_0\in U$, $y_0\in V$ *– некоторые фиксированные точки и* $B\geqslant 0$, $B(.)\in M_p^{\sharp}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Тогда для любой $f\in W_p(\mathbb{R},U)$ *имеем* $\mathcal{F}(f(.);.)\in W_p(\mathbb{R},V)$ *и*

$$\operatorname{Mod}\mathcal{F}(f(.);.)\subseteq\operatorname{Mod}f(.)+\sum_{x\in U}\operatorname{Mod}\mathcal{F}(.|_{K_r(x)};.)\,.$$

С л е д с т в и е 1.1. *Пусть* (U,ρ) *и* (V,ρ_V) *– полные метрические пространства,* $\mathcal{F}:U\to V$ *– ограниченная непрерывная функция и* $f\in W_1(\mathbb{R},U)$. *Тогда* $\mathcal{F}(f(.))\in W_1(\mathbb{R},V)$ *и* $\operatorname{Mod}\mathcal{F}(f(.))\subseteq\operatorname{Mod}f(.)$.

Пусть (U,ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство, $\mathcal{B}(U)$ – σ-алгебра борелевских подмножеств метрического пространства (U,ρ), $(\mathcal{M}_0(U),\rho_w)$ – полное сепарабельное метрическое пространство вероятностных борелевских мер, определенных на σ-алгебре $\mathcal{B}(U)$, с метрикой ρ_w, порожденной нормой $\|.\|_w$ (см. (1)). Метрика ρ_w эквивалентна метрике Леви–Прохорова $\rho_0(\mu_1,\mu_2)\doteq\inf\bigl\{\varepsilon>0:\mu_1[A]\leqslant\mu_2[A^\varepsilon]+\varepsilon$ для всех непустых множеств $A\in\mathcal{B}(U)\bigr\}$, $\mu_1,\mu_2\in\mathcal{M}_0(U)$, где $A^\varepsilon=\{x\in U:\rho(x,A)\doteq\inf\limits_{y\in A}\rho(x,y)<\varepsilon\}$. В настоящей работе будет использоваться (как более удобная) метрика ρ_w. (Все результаты работы, доказанные для метрического пространства

$(\mathcal{M}_0(U), \rho_w)$, также справедливы при замене метрики ρ_w на метрику Леви–Прохорова ρ_0 .)

Каждая мера $\mu[.] \in \mathcal{M}_0(U)$ (так как пространство (U, ρ) предполагается сепарабельным) является *радоновской*, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon \subseteq U$, для которого $\mu[K_\varepsilon] > 1 - \varepsilon$. Множество $\mathcal{K}$ предкомпактно в метрическом пространстве $(\mathcal{M}_0(U), \rho_w)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon \subseteq U$ такой, что $\mu[K_\varepsilon] > 1 - \varepsilon$ для всех мер $\mu[.] \in \mathcal{K}$.

Пусть $(C_b(U), \|.\|_{C_b(U)})$ – банахово пространство ограниченных непрерывных функций $\mathcal{F} : U \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|\mathcal{F}\|_{C_b(U)} = \sup_{x \in U} |\mathcal{F}(x)|, \quad \mathcal{F} \in C_b(U).$$

Каждой мере $\mu[.] \in \mathcal{M}_0(U)$ ставится в соответствие линейный (вероятностный) функционал $\mu(.)$ на банаховом пространстве $C_b(U)$:

$$\mu(\mathcal{F}) = \int_U \mathcal{F}(x)\, \mu[dx], \quad \mathcal{F} \in C_b(U),$$

при этом $|\mu(\mathcal{F})| \leqslant \|\mathcal{F}\|_{C_b(U)}$.

Если $\mu, \mu_j \in \mathcal{M}_0(U)$, $j \in \mathbb{N}$, и $\rho_w(\mu, \mu_j) \to 0$ при $j \to +\infty$, то $\mu_j(\mathcal{F}) \to \mu(\mathcal{F})$ при $j \to +\infty$ для любой функции $\mathcal{F} \in C_b(U)$. Наоборот, если $\varphi(.)$ – линейный вероятностный функционал на $C_b(U)$, $\mu_j \in \mathcal{M}_0(U)$, $j \in \mathbb{N}$, и $\mu_j(\mathcal{F}) \to \varphi(\mathcal{F})$ при $j \to +\infty$ для любой функции $\mathcal{F} \in C_b(U)$, то найдется мера $\mu \in \mathcal{M}_0(U)$ такая, что $\varphi(.) = \mu(.)$ и $\rho_w(\mu, \mu_j) \to 0$ при $j \to +\infty$.

2. Основные результаты

Мерозначная функция $t \to \mu[.; t] \in \mathcal{M}_0(U)$, $t \in \mathbb{R}$, *измерима*, если $\mu[.;.] \in M(\mathbb{R}, (\mathcal{M}_0(U), \rho_w))$. Для произвольной мерозначной функции $\mathbb{R} \ni t \to \mu[.; t] \in \mathcal{M}_0(U)$ следующие условия эквивалентны:

1) $\mu[.;.] \in M(\mathbb{R}, (\mathcal{M}_0(U), \rho_w))$,

2) $\mathbb{R} \ni t \to \mu[\mathcal{O};t] \in \mathbb{R}$ – измеримая функция для любого множества $\mathcal{O} \in \mathcal{B}(U)$,

3) $\mathbb{R} \ni t \to \mu(\mathcal{F};t) \doteq \int\limits_U \mathcal{F}(x)\,\mu[dx;t] \in \mathbb{R}$ – измеримая функция для любой функции $\mathcal{F} \in C_b(U)$.

Мерозначные п.п. по Вейлю функции $\mathbb{R} \ni t \to \mu[.;t] \in \mathcal{M}_0(U)$ определяются как (п.п. по Вейлю порядка 1) функции со значениями в метрическом пространстве $(\mathcal{M}_0(U),\rho_w)$, т.е. это функции из пространства $W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U)) \doteq W_1(\mathbb{R},(\mathcal{M}_0(U),\rho_w))$. Через $W_1^w(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U))$ обозначим множество

$$\{\,\mu[.;.] \in M(\mathbb{R},(\mathcal{M}_0(U),\rho_w)) : \ \ \mu(\mathcal{F};.) \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad \forall \mathcal{F} \in C_b(U)\,\}.$$

Функции из $W_1^w(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U))$ называются *слабо п.п. по Вейлю мерозначными* функциями. Аналогичным образом определяются (слабо) п.п. по Бору и п.п. по Степанову мерозначные функции $\mathbb{R} \ni t \to \mu[.;t] \in \mathcal{M}_0(U)$.

Л е м м а 2.1. *Пусть* (U,ρ) *– полное сепарабельное метрическое пространство и* $\mu[.;.] \in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U))$ *. Тогда для любой функции* $\mathcal{F} \in C_b(U)$ *имеем* $\mu(\mathcal{F};.) \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *и* $\operatorname{Mod}\mu(\mathcal{F};.) \subseteq \operatorname{Mod}\mu[.;.]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждой функции $\mathcal{F} \in C_b(U)$ соответствует функция $l_{\mathcal{F}}(.) \in C_b(\mathcal{M}_0(U))$, определяемая равенством $l_{\mathcal{F}}(\mu) = \mu(\mathcal{F})$, $\mu \in \mathcal{M}_0(U)$, причем $\|l_{\mathcal{F}}\|_{C_b(\mathcal{M}_0(U))} = \|\mathcal{F}\|_{C_b(U)}$. Так как метрическое пространство $(\mathcal{M}_0(U),\rho_w)$ полное и $\mu[.;.] \in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U))$, то в силу следствия 1.1 для всех функций $\mathcal{F} \in C_b(U)$ получаем

$$l_{\mathcal{F}}(\mu[.;.]) = \mu(\mathcal{F};.) \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

$$\operatorname{Mod} l_{\mathcal{F}}(\mu[.;.]) = \operatorname{Mod}\mu(\mathcal{F};.) \subseteq \operatorname{Mod}\mu[.;.]\,.$$

Т е о р е м а 2.1. *Пусть* (U,ρ) – *полное сепарабельное метрическое пространство и* $\mu[.;.] \in W_1^w(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U))$. *Тогда* $\mu[.;.] \in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U))$ *и* $\operatorname{Mod}\mu[.;.] \subseteq \sum\limits_{\mathcal{F}\in C_b(U)} \operatorname{Mod}\mu(\mathcal{F};.)$.

С л е д с т в и е 2.1. *Пусть* (U,ρ) – *полное сепарабельное метрическое пространство. Тогда справедливо равенство* $W_1^w(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U)) = W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U))$ *и* $\operatorname{Mod}\mu[.;.] = \sum\limits_{\mathcal{F}\in C_b(U)} \operatorname{Mod}\mu(\mathcal{F};.)$ *для любой мерозначной функции* $\mu[.;.] \in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U))$.

Следствие 2.1 непосредственно вытекает из теоремы 2.1 и леммы 2.1. Теорема 2.1 доказывается в конце этого параграфа, при этом ключевую роль в доказательстве играет теорема 2.3, которая в свою очередь является следствием теоремы 2.2, доказываемой в § 3.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть* $f_j \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $j\in\mathbb{N}$, $f_j(t) \geqslant 0$ *при п.в.* $t\in\mathbb{R}$. *Предположим, что* $\sum\limits_{j\in J} f_j(.) \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *для любого непустого множества* $J\subseteq\mathbb{N}$ (*в частности, это означает, что* $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} f_j(t) < +\infty$ *при п.в.* $t\in\mathbb{R}$). *Обозначим* $g_j(.) = \sum\limits_{n\geqslant j} f_n(.)$, $j\in\mathbb{N}$. *Тогда* $\|g_j(.)\|_1^{(W)} \to 0$ *при* $j\to+\infty$.

Т е о р е м а 2.3. *Пусть* (U,ρ) – *полное сепарабельное метрическое пространство и* $\mu[.;.] \in W_1^w(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U))$. *Предположим, что* $\mathcal{F}_j \in C_b(U)$, $j\in\mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \cdots \leqslant \mathcal{F}_{j+1}(x) \leqslant \mathcal{F}_j(x) \leqslant \cdots \leqslant \mathcal{F}_1(x)$$

и $\mathcal{F}_j(x)\to 0$ *при* $j\to+\infty$ *для всех* $x\in U$. *Тогда* $\|\mu(\mathcal{F}_j\,;.)\|_1^{(W)} \to 0$ *при* $j\to+\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{G}_j(.) = \mathcal{F}_j(.) - \mathcal{F}_{j+1}(.)$, $j\in\mathbb{N}$. Тогда $\mu(\mathcal{G}_j\,;.) \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\mu(\mathcal{G}_j\,;t) \geqslant 0$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$.

Для произвольного непустого множества $J \subseteq \mathbb{N}$ положим

$$\mathcal{G}(J;x) = \sum_{j\in J} \mathcal{G}_j(x)\,, \quad x \in U\,.$$

Так как $\mathcal{G}(J;.) \in C_b(U)$, то $\mu(\mathcal{G}(J;.);.) \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. С другой стороны, для всех $x \in U$ справедливо $\sum\limits_{j\in J,\, j\leqslant n} \mathcal{G}_j(x) \to \mathcal{G}(J;x)$ при $n \to +\infty$, поэтому при п.в. $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $\mu(\mathcal{G}(J;.);t) = \sum\limits_{j\in J} \mu(\mathcal{G}_j\,;t)$ и $\sum\limits_{j\in J} \mu(\mathcal{G}_j\,;.) \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Осталось воспользоваться теоремой 2.2.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть точки $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, образуют счетное плотное множество в сепарабельном метрическом пространстве (U,ρ). Для всех $\varepsilon' > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ определим функции

$$U \ni x \to G_{\varepsilon',n}(x) = \min\{1, (\varepsilon')^{-1}\rho(x, \bigcup_{j\leqslant n} K_{\varepsilon'}(x_j))\},$$

где $\rho(x,A) = \inf\limits_{y\in A} \rho(x,y)$ – расстояние от точки $x \in U$ до непустого множества $A \subseteq U$; $G_{\varepsilon',n}(.) \in C_b(U)$ (поэтому справедливо включение $\mu(G_{\varepsilon',n}\,;.) \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$). Из теоремы 2.3 вытекает, что (для любого $\varepsilon' > 0$) $\|\mu(G_{\varepsilon',n}\,;.)\|_1^{(W)} \to 0$ при $n \to +\infty$. Фиксируем число $\varepsilon > 0$. Положим далее $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{24}$. Найдется число $n \in \mathbb{N}$ такое, что для замкнутого множества $F \doteq \bigcup\limits_{j\leqslant n} K_{2\varepsilon'}(x_j)$ справедлива оценка

$$\|\mu[U\backslash F;.]\|_1^{(W)} \leqslant \|\mu(G_{\varepsilon',n}\,;.)\|_1^{(W)} < \tfrac{\varepsilon}{16}\,.$$

Выберем функции $\Theta_{\varepsilon',j}(.) \in C_b(U)$, $j = 1,\ldots,n$, для которых выполнено: $\Theta_{\varepsilon',j}(x) \geqslant 0$ при всех $x \in U$, $\Theta_{\varepsilon',j}(x) = 0$ при всех $x \in U\backslash K_{3\varepsilon'}(x_j)$, $\sum\limits_{j\leqslant n} \Theta_{\varepsilon',j}(x) = 1$ при всех $x \in F$ и $\sum\limits_{j\leqslant n} \Theta_{\varepsilon',j}(x) \leqslant 1$ при всех $x \in U$. Каждой функции $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(U)$

поставим в соответствие функцию

$$U \ni x \to \mathcal{F}'(x) \doteq \sum_{j\leqslant n} \mathcal{F}(x_j)\Theta_{\varepsilon',j}(x)$$

из $C_b(U)$. Если $x \in F$, то

$$|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}'(x)| = \Big| \sum_{j\leqslant n} (\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(x_j))\, \Theta_{\varepsilon',j}(x) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\leqslant n} |\, \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(x_j)\, | \cdot \Theta_{\varepsilon',j}(x) \leqslant 3\varepsilon',$$

при этом для всех $x \in U$

$$0 \leqslant \mathcal{F}'(x) = \sum_{j\leqslant n} \mathcal{F}(x_j)\, \Theta_{\varepsilon',j}(x) \leqslant \sum_{j\leqslant n} \Theta_{\varepsilon',j}(x) \leqslant 1\,.$$

При п.в. $t \in \mathbb{R}$ для любой функции $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(U)$ имеем

$$|\, \mu(\mathcal{F};t) - \mu(\mathcal{F}';t)\, | \leqslant \Big(\sup_{x\in F} |\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}'(x)| \Big) \cdot \mu[F;t] +$$

$$+ \Big(\sup_{x\in U\setminus F} \mathcal{F}(x) + \sup_{x\in U\setminus F} \mathcal{F}'(x) \Big) \cdot \mu[U\setminus F;t] \leqslant 3\varepsilon' + 2\mu[U\setminus F;t]\,,$$

поэтому при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и п.в. $t \in \mathbb{R}$

$$|\mu(\mathcal{F};t) - \mu(\mathcal{F};t+\tau)| \leqslant |\mu(\mathcal{F}';t) - \mu(\mathcal{F}';t+\tau)| +$$

$$+6\varepsilon' + 2\mu[U\setminus F;t] + 2\mu[U\setminus F;t+\tau] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\leqslant n} \mathcal{F}(x_j) \cdot |\mu(\Theta_{\varepsilon',j}\,;t) - \mu(\Theta_{\varepsilon',j}\,;t+\tau)| +$$

$$+6\varepsilon' + 2\mu[U\setminus F;t] + 2\mu[U\setminus F;t+\tau]\,,$$

следовательно,

$$\|\mu[.;t] - \mu[.;t+\tau]\|_w \doteq \sup_{\mathcal{F}\in\mathcal{L}(U)} |\mu(\mathcal{F};t) - \mu(\mathcal{F};t+\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\leqslant n} |\mu(\Theta_{\varepsilon',j}\,;t)-\mu(\Theta_{\varepsilon',j}\,;t+\tau)|+6\varepsilon'+2\mu[U\backslash F;t]+2\mu[U\backslash F;t+\tau]\,.$$

Так как $\mu(\Theta_{\varepsilon',j}\,;.) \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $j = 1,\dots,n$, то найдутся число $l > 0$ и относительно плотное множество общих $(\frac{\varepsilon}{2n}\,, D^{(\rho')}_{1,\,l})$-почти периодов $\tau \in \mathbb{R}$ функций $\mu(\Theta_{\varepsilon',j}\,;.)$, $j = 1,\dots,n$ (где $\rho'(\xi_1\,,\xi_2) = |\xi_1 - \xi_2|$, $\xi_1\,,\xi_2 \in \mathbb{R}$), для которых также

$$\|\mu[U\backslash F;.]\|^{(S)}_{1,\,l} < \tfrac{\varepsilon}{16}$$

(см., например, [15]). Для таких (общих $(\frac{\varepsilon}{2n}\,, D^{(\rho')}_{1,\,l})$-почти периодов) $\tau \in \mathbb{R}$ (и числа $l > 0$) имеем

$$\|\mu[.;.] - \mu[.;.+\tau]\|^{(S)}_{1,\,l} \doteq \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \tfrac{1}{l} \int\limits_{\xi}^{\xi+l} \|\mu[.;t] - \mu[.;t+\tau]\|_w\, dt \leqslant \tag{2}$$

$$\leqslant \sum_{j\leqslant n} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \tfrac{1}{l} \int\limits_{\xi}^{\xi+l} |\mu(\Theta_{\varepsilon',j}\,;t) - \mu(\Theta_{\varepsilon',j}\,;t+\tau)|\, dt+$$

$$+6\varepsilon' + 4\|\mu[U\backslash F;.]\|^{(S)}_{1,\,l} < n\cdot\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\,.$$

Так как число $\varepsilon > 0$ можно выбирать сколь угодно малым, то $\mu[.;.] \in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}_0(U))$. Из (2) также следует, что всякая последовательность $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, которая является $\mu(\Theta_{\varepsilon'_m,j}\,;.)$-возвращающей для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех чисел $\varepsilon'_m > 0$, $m \in \mathbb{N}$, из какой-либо последовательности $\{\varepsilon'_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, для которой $\varepsilon'_m \to 0$ при $m \to +\infty$, является также и $\mu[.;.]$-возвращающей, поэтому

$$\mathrm{Mod}\,\mu[.;.] \subseteq \sum_{j,\,m\in\mathbb{N}} \mathrm{Mod}\,\mu(\Theta_{\varepsilon'_m,j}\,;.) \subseteq \sum_{\mathcal{F}\in C_b(U)} \mathrm{Mod}\,\mu(\mathcal{F};.)\,.$$

Теорема 2.1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2.2

Предположим, что теорема 2.2 неверна. Тогда $\|g_j(.)\|_1^{(W)} \geqslant \varepsilon > 0$ для некоторого числа $\varepsilon > 0$ и для всех $j \in \mathbb{N}$. Из леммы 1.1 следует, что существуют пределы

$$\overline{f}_j = \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{l} \int\limits_{\xi}^{\xi+l} f_j(t)\, dt \geqslant 0\,, \quad j \in \mathbb{N}\,,$$

при этом сходимость равномерна по $\xi \in \mathbb{R}$. Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ (и любого $\xi \in \mathbb{R}$) имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{f}_j = \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{l} \int\limits_{\xi}^{\xi+l} \Big(\sum_{j=1}^{n} f_j(t) \Big)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{l} \int\limits_{\xi}^{\xi+l} g_1(t)\, dt = \|g_1(.)\|_1^{(W)} < +\infty\,,$$

то ряд $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \overline{f}_j$ сходится. Поэтому можно выбрать такие числа $\tilde{j}_s \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$, что $\tilde{j}_{s+1} > \tilde{j}_s$ для всех $s \in \mathbb{N}$ (тогда $\tilde{j}_s \to +\infty$ при $s \to +\infty$) и для всех $n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_2 > n_1 \geqslant \tilde{j}_s$

$$\|g_{n_1}(.) - g_{n_2}(.)\|_1^{(W)} = \Big\| \sum_{j=n_1}^{n_2-1} f_j(.) \Big\|_1^{(W)} < 2^{-3-s}\varepsilon\,, \quad s \in \mathbb{N}. \qquad (3)$$

Положим $j_1 = \tilde{j}_1$. Так как $\|g_{j_1}(.)\|_1^{(W)} \geqslant \varepsilon$, то существует число $l_1 \geqslant 1$ такое, что

$$\frac{1}{l_1} \int\limits_{0}^{l_1} g_{j_1}(t)\, dt \geqslant \frac{3}{4}\, \varepsilon\,. \qquad (4)$$

Выберем число $j_1' \in \mathbb{N} : j_1' > j_1$ так, что

$$\frac{1}{l_1} \int\limits_{0}^{l_1} g_{j_1'}(t)\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \qquad (5)$$

(это можно сделать, так как $g_j(t) \to 0$ при $j \to +\infty$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$). Обозначим $G_1(.) = g_{j_1}(.) - g_{j_1'}(.) \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Из (4), (5) следует оценка

$$\frac{1}{l_1} \int\limits_0^{l_1} G_1(t)\,dt \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6}$$

Из (3) (при $s = 1$) вытекает, что существует число $l_1' \geqslant l_1$ такое, что для всех $l \geqslant l_1'$

$$\|G_1(.)\|_{1,\,l}^{(S)} \leqslant \frac{\varepsilon}{16}\,. \tag{7}$$

Будем далее последовательно при $s = 2, 3, \ldots$ находить числа $j_s\,, j_s' \in \mathbb{N}$ и $l_s\,, l_s' > 0$ (для которых $l_s \geqslant s$, $l_s' \geqslant l_s$ и $j_s' > j_s \geqslant \tilde{j}_s$). Предположим, что они уже определены при некотором $s \in \mathbb{N}$, при этом $G_s(.) = g_{j_s}(.) - g_{j_s'}(.) \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Выберем число $j_{s+1} \in \mathbb{N}$ так, что $j_{s+1} \geqslant j_s'$, $j_{s+1} \geqslant \tilde{j}_{s+1}$ и для всех $n = 1, \ldots, s$

$$\frac{1}{l_n'} \int\limits_0^{l_n'} g_{j_{s+1}}(t)\,dt \leqslant 2^{-3-(s+1)+n}\varepsilon\,. \tag{8}$$

Так как $\|g_{j_{s+1}}(.)\|_1^{(W)} \geqslant \varepsilon$, то существует число $l_{s+1} \geqslant s+1$, для которого $l_{s+1} > l_s'$ и

$$\frac{1}{l_{s+1}} \int\limits_0^{l_{s+1}} g_{j_{s+1}}(t)\,dt \geqslant \frac{3}{4}\,\varepsilon\,. \tag{9}$$

Выберем число $j_{s+1}' \in \mathbb{N} : j_{s+1}' > j_{s+1}$ так, что

$$\frac{1}{l_{s+1}} \int\limits_0^{l_{s+1}} g_{j_{s+1}'}(t)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \tag{10}$$

(это можно сделать в силу того, что $g_j(t) \to 0$ при $j \to +\infty$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$). Обозначим $G_{s+1}(.) = g_{j_{s+1}}(.) - g_{j_{s+1}'}(.) \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Из (9), (10) получаем

$$\frac{1}{l_{s+1}} \int\limits_0^{l_{s+1}} G_{s+1}(t)\,dt \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{11}$$

Так как $\|G_{s+1}(.)\|_1^{(W)} < 2^{-3-(s+1)}\varepsilon$ (см. (3)), то существует число $l'_{s+1} > l_{s+1}$ такое, что для всех $l \geqslant l'_{s+1}$

$$\|G_{s+1}(.)\|_{1,\,l}^{(S)} \leqslant 2^{-3-(s+1)}\varepsilon\,. \tag{12}$$

Продолжим неограниченно нахождение чисел $j_s\,, j'_s\,, l_s$ и l'_s , $s \in \mathbb{N}$, при этом $G_s(.) = g_{j_s}(.) - g_{j'_s}(.)$, $s \in \mathbb{N}$. Положим

$$G(.) = \sum_{s\in\mathbb{N}} G_s(.) = \sum_{s\in\mathbb{N}} \sum_{n=j_s}^{j'_s-1} f_n(.) \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})\,.$$

Для всех $s \in \mathbb{N}$ из (6), (11) получаем

$$\tfrac{1}{l_s} \int\limits_0^{l_s} G(t)\,dt \geqslant \tfrac{1}{l_s} \int\limits_0^{l_s} G_s(t)\,dt \geqslant \tfrac{\varepsilon}{2}\,. \tag{13}$$

Пусть теперь $\mathbb{N} \ni s \geqslant 2$. Если $n \in \{1,\ldots,s-1\}$, то $l'_s > l_s > l'_n$, поэтому из (7), (12) следует

$$\tfrac{1}{l'_s} \int\limits_0^{l'_s} G_n(t)\,dt \leqslant \|G_n(.)\|_{1,\,l'_s}^{(S)} \leqslant 2^{-3-n}\varepsilon\,. \tag{14}$$

Если $\mathbb{N} \ni n > s$, то из (8) вытекает оценка

$$\tfrac{1}{l'_s} \int\limits_0^{l'_s} G_n(t)\,dt \leqslant \tfrac{1}{l'_s} \int\limits_0^{l'_s} g_{j_n}(t)\,dt \leqslant 2^{-3-n+s}\varepsilon\,. \tag{15}$$

Поэтому из (12), (14) и (15) получаем

$$\tfrac{1}{l'_s} \int\limits_0^{l'_s} G(t)\,dt = \sum_{n=1}^{s-1} \tfrac{1}{l'_s} \int\limits_0^{l'_s} G_n(t)\,dt + \tag{16}$$

$$+\tfrac{1}{l'_s} \int\limits_0^{l'_s} G_s(t)\,dt + \sum_{n=s+1}^{+\infty} \tfrac{1}{l'_s} \int\limits_0^{l'_s} G_n(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{s-1} 2^{-3-n}\varepsilon + \|G_s(.)\|_{1,\,l'_s}^{(S)} + \sum_{n=s+1}^{+\infty} 2^{-3-n+s}\varepsilon < \tfrac{\varepsilon}{8} + \tfrac{\varepsilon}{8} = \tfrac{\varepsilon}{4}\,.$$

Так как $l'_s > l_s \geqslant s$, $s \in \mathbb{N}$, то из (13) и (16) следует, что не существует предела

$$\lim_{l \to +\infty} \frac{1}{l} \int\limits_0^l G(t)\, dt\,. \tag{17}$$

Последнее противоречит тому, что $G(.) \in W_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (следовательно, в силу леммы 1.1 предел (17) должен существовать). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.2.

Список литературы

1. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
3. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
4. Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
5. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
6. Иванов А.Г. Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений на средние типа равенств и неравенств. I, II, III // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. Ѓ 2. С. 167-176; Ѓ 3. С. 316-323; Ѓ 4. С. 478-485.
7. Иванов А.Г. Мерозначные почти периодические функции. Препринт. Свердловск, 1990.
8. Иванов А.Г. Мерозначные почти периодические функции. II. Ижевск: УдГУ, 1991. Деп. в ВИНИТИ 24.04.91, Ѓ 1721-В91.
9. Данилов Л.И. О мерозначных почти периодических функциях // Вестн. Удм. ун-та. Ижевск, 1993. Ѓ 1. С. 51-58.
10. Данилов Л.И. Мерозначные почти периодические функции и почти периодические сечения многозначных отображений // Матем. сборник. 1997. Т. 188, Ѓ 10. С. 3-24.
11. Данилов Л.И. Мерозначные почти периодические функции // Матем. заметки. 1997. Т. 61, Ѓ 1. С. 57-68.
12. Данилов Л.И. О почти периодических мерозначных функциях // Матем. сборник. 2000. Т. 191, Ѓ 12. С. 27-50.

13. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953.
14. Левитан Б.М., Жиков В.В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.
15. Данилов Л.И. О почти периодических по Вейлю сечениях многозначных отображений. Ижевск: ФТИ УрО РАН, 2004. 104 с. Деп. в ВИНИТИ 09.06.2004, Ѓ 981-В2004.
16. Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985.
17. Andres J. Bounded, almost-periodic and periodic solutions of quasilinear differential inclusions // Differential Inclusions and Optimal Control (ed. by J. Andres, L. Górniewicz and P. Nistri), LN in Nonlin. Anal. 1998. V. 2. P. 35-50.
18. Andres J., Bersani A.M., Leśniak K. On some almost-periodicity problems in various metrics // Acta Appl. Math. 2001. V. 65, Ѓ 1-3. P. 35-57.
19. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
20. Danilov L.I. On equi-Weyl almost periodic selections of multivalued maps. Preprint arXiv: math.CA/0310010, 2003.

Рассматриваются мерозначные функции $\mathbb{R} \ni t \to \mu[.;t]$ со значениями в метрическом пространстве $(\mathcal{M}_0(U), \rho_w)$ вероятностных борелевских мер, определенных на σ-алгебре борелевских подмножеств полного сепарабельного метрического пространства U, с метрикой ρ_w, эквивалентной метрике Леви-Прохорова. Доказано, что мерозначная функция $\mathbb{R} \ni t \to \mu[.;t] \in (\mathcal{M}_0(U), \rho_w)$ является почти периодической по Вейлю тогда и только тогда, когда для любой ограниченной непрерывной функции $\mathcal{F} : U \to \mathbb{R}$ функция $\int\limits_U \mathcal{F}(x)\, \mu[dx;.]$ является почти периодической по Вейлю (порядка 1).

Weyl almost periodic functions, measure-valued function, probability Borel measure.