Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2005. Ґ1(31)

УДК 517.958 : 530.145.6

© **М.С. Сметанина**
chuburin@otf.pti.udm.ru

АСИМПТОТИКА УРОВНЕЙ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Ключевые слова: уравнение Шредингера, нелокальный потенциал, собственное значение, резонанс, асимптотика

Abstract. We investigate the one-dimensional Schrödinger operator with the potential that is the sum of n separable potentials. There are n levels (eigenvalues or resonances) of this Schrödinger operator. We study the asymptotic behaviour of levels in the case n=2.

1. Введение

Рассматривается одномерное уравнение Шредингера

$$-d^2\psi/dx^2 + V\psi = E\psi, \tag{1.1}$$

где потенциал V представляет собой оператор конечного ранга:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\cdot, \varphi_i)\, \varphi_i. \tag{1.2}$$

Здесь $\lambda_i \in \mathbb{R}$ – параметры, φ_i – линейно независимые и экспоненциально убывающие функции: $|\ \varphi_i(x)\ | \leqslant C_i e^{-\alpha_i |x|}$, где C_i, $\alpha_i = \mathrm{const}$, причем $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Потенциалы V такого вида часто используются в физике (см., например, [1]).

Пусть $H_0 = -d^2/dx^2$ – оператор Шредингера для свободной частицы. Обозначим через $R_0(E) = (H_0 - E)^{-1}$, $R(E) = (H - E)^{-1}$

резольвенты операторов H_0 и H. Положим $k=\sqrt{E}$ (разрез выбираем вдоль полуоси $[0,+\infty)$). Как известно, ядро $R_0(E)$ имеет вид $G(x,y,k)=-(2ik)^{-1}e^{ik|x-y|}$. Спектр оператора A обозначим через $\sigma(A)$. Если $\psi(x)\cdot\varphi(x)\in L^1(\mathbb{R})$, то через (ψ,φ) будет обозначаться интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(x)\overline{\varphi(x)}dx$.

В работе доказывается существование уровней (т.е. собственных значений или резонансов; см. определение ниже) оператора H для малых V. В случае $n=2$ получена асимптотика этих уровней (случай $n=1$ изучался в работе [2]).

2. Исследование уровней в случае n=2

Уравнение Шредингера (1.1) согласно (1.2) имеет вид

$$H\psi=-d^2\psi/dx^2+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\psi,\varphi_i)\,\varphi_i=E\psi. \tag{2.1}$$

Для $E\notin[0,+\infty)$ и $\psi\in L^2(\mathbb{R})$ имеем эквивалентное интегральное уравнение

$$\psi=-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\psi,\varphi_i)R_0(E)\varphi_i. \tag{2.2}$$

Для исследования резонансов уравнение (2.2) будет также рассматриваться на втором листе римановой поверхности функции $k=\sqrt{E}$, для этого достаточно продолжить по E функцию $G(x,y,E)$ (т.е. $G(x,y,k)$ с $k=\sqrt{E}$). Соответствующие решения $\psi(x)$, вообще говоря, экспоненциально возрастают, поэтому для того чтобы включить их в рассмотрение, рассмотрим класс функций $\psi(x)$ таких, что

$$\psi\cdot\varphi_i\in L^1(\mathbb{R}),\quad i=1,2,...,n. \tag{2.3}$$

Будем говорить, что $k\in\mathbb{C}$ (или соответствующее $E=k^2$) является уровнем оператора H, если существует ненулевое решение $\psi(x)$ уравнения (2.2) в классе функций (2.3). Пусть $\varphi(x)$

– вещественно-аналитическая функция, определенная в окрестности нуля такая, что $\varphi(0)=0$. Предполагаем, что $\lambda_i=\varphi(\varepsilon^{\sigma_i})$, $\sigma_i>0$, $i=1,2,...,n$, где ε достаточно мало. Тогда, разлагая $\varphi(x)$ в ряд Тейлора, получаем $\lambda_i = A_i\varepsilon^{\sigma_i}+o(\varepsilon^{\sigma_i})$, где $A_i=\mathrm{const}\neq 0$, $\sigma_i>0$, $i=1,2,...,n$. Для простоты выкладок всюду в последующих доказательствах полагаем

$$\lambda_i = A_i\varepsilon^{\sigma_i}, \quad i=1,2,...,n, \tag{2.4}$$

хотя все рассуждения справедливы в общем случае.

В силу экспоненциального убывания функций $\varphi_i(x)$ функции

$$b_{ij}(k)=\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{ik|x-y|}\varphi_i(x)\overline{\varphi_j(y)}dxdy$$

– аналитические в некоторой комплексной окрестности нуля.

Т е о р е м а 2.1. *Предположим, что в случае* $\sigma_1=\sigma_2$ *выполнено условие*

$$\left(\tfrac{A_1}{2i}b_{11}(0)-\tfrac{A_2}{2i}b_{22}(0)\right)^2 - A_1A_2\mid b_{12}(0)\mid^2\neq 0, \tag{2.5}$$

а в случае $\sigma_1>\sigma_2$ *– условие*

$$b_{22}(0)\neq 0. \tag{2.6}$$

Тогда для всех достаточно малых ε *существует ровно два уровня оператора* H, *для которых справедлива следующая асимптотика: в случае* $\sigma_1=\sigma_2$

$$k_{1,2}=\varepsilon^{\sigma}\Big(\tfrac{A_1}{2i}b_{11}(0)+\tfrac{A_2}{2i}b_{22}(0)\pm$$

$$\pm\sqrt{\left(\tfrac{A_1}{2i}b_{11}(0)-\tfrac{A_2}{2i}b_{22}(0)\right)^2-A_1A_2\mid b_{12}(0)\mid^2}\ \Big)+O(\varepsilon^{2\sigma}),$$

а в случае $\sigma_1>\sigma_2$

$$k_{1,2}=\tfrac{A_2\varepsilon^{\sigma_2}b_{22}(0)}{2i}(1\pm 1)+O(\varepsilon^{\min\{\sigma_1,2\sigma_2\}}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (2.2) видно, что $\psi = C_1\tilde{\varphi}_1 + C_2\tilde{\varphi}_2$, где $C_i = \text{const}$, $\tilde{\varphi}_i = -\lambda_i R_0(E)\varphi_i$, $i = 1,2$. Подставляя это выражение в (2.2) и пользуясь линейной независимостью функций φ_1 и φ_2 (после применения оператора $-d^2/dx^2 - E$ из $B_1\tilde{\varphi}_1 + B_2\tilde{\varphi}_2 = 0$ вытекает, что $B_1\varphi_1 + B_2\varphi_2 = 0$, откуда $B_1 = B_2 = 0$, так как φ_1 и φ_2 линейно независимые функции), получаем линейную однородную систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = -\lambda_1 C_1(R_0(E)\varphi_1,\varphi_1) - \lambda_2 C_2(R_0(E)\varphi_2,\varphi_1) \\ C_2 = -\lambda_1 C_1(R_0(E)\varphi_1,\varphi_2) - \lambda_2 C_2(R_0(E)\varphi_2,\varphi_2) \end{cases}. \tag{2.7}$$

Система (2.7) имеет ненулевое решение в том и только в том случае, если

$$\Delta(E) = \begin{vmatrix} 1 + \lambda_1(R_0(E)\varphi_1,\varphi_1) & \lambda_2(R_0(E)\varphi_2,\varphi_1) \\ \lambda_1(R_0(E)\varphi_1,\varphi_2) & 1 + \lambda_2(R_0(E)\varphi_2,\varphi_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Существование уровней оператора H, таким образом, эквивалентно существованию ненулевых решений следующего уравнения (переходим для удобства к величине $k = \sqrt{E}$):

$$1 + \tfrac{i\lambda_1}{2k} b_{11}(k) + \tfrac{i\lambda_2}{2k} b_{22}(k) - \tfrac{\lambda_1\lambda_2}{4k^2} b_{11}(k) b_{22}(k) + \tfrac{\lambda_1\lambda_2}{4k^2} b_{12}(k) b_{21}(k) = 0.$$

Обозначая

$$A(k) = \tfrac{\lambda_1}{2i} b_{11}(k) + \tfrac{\lambda_2}{2i} b_{22}(k), \quad B(k) = \tfrac{\lambda_1\lambda_2}{4}(b_{12}(k) b_{21}(k) - b_{11}(k) b_{22}(k)),$$

получаем уравнение

$$k^2 - A(k)k + B(k) = 0. \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8) можно переписать в виде двух уравнений

$$k = \tfrac{A(k) \pm \sqrt{A^2(k) - 4B(k)}}{2}$$

или

$$k = F_{1,2}(k), \tag{2.9}$$

где $F_{1,2}(k)=\frac{A(k)\pm\sqrt{A^2(k)-4B(k)}}{2}$. Уравнения (2.9) являются уравнениями на неподвижную точку. Будем их решать с помощью принципа сжимающих отображений, рассматривая в качестве метрического пространства замкнутый круг $S=\{\mid k\mid\leqslant\delta\}$ комплексной плоскости, где $\delta>0$ настолько мало, что функции $b_{ij}(k)$ аналитичны в несколько большем круге.

Докажем, что при достаточно малых ε функция $F_{1,2}(k)$ переводит S в себя. Используя условие (2.4), запишем

$$F_{1,2}=\frac{1}{2}\Big(\frac{A_1\varepsilon^{\sigma_1}}{2i}b_{11}(k)+\frac{A_2\varepsilon^{\sigma_2}}{2i}b_{22}(k)\pm$$

$$\pm\sqrt{\Big(\frac{A_1\varepsilon^{\sigma_1}}{2i}b_{11}(k)-\frac{A_2\varepsilon^{\sigma_2}}{2i}b_{22}(k)\Big)^2-A_1A_2\varepsilon^{\sigma_1+\sigma_2}b_{12}(k)b_{21}(k)}\Big). \tag{2.10}$$

В случае $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ выражение (2.10) принимает вид

$$F_{1,2}(k)=\frac{\varepsilon^{\sigma}}{2}\Big(\frac{A_1}{2i}b_{11}(k)+\frac{A_2}{2i}b_{22}(k)\pm$$

$$\pm\sqrt{\Big(\frac{A_1}{2i}b_{11}(k)-\frac{A_2}{2i}b_{22}(k)\Big)^2-A_1A_2b_{12}(k)b_{21}(k)}\Big).$$

Для всех $k\in S$ имеем $\mid F_{1,2}(k)\mid\leqslant C\mid\varepsilon^{\sigma}\mid\leqslant\delta$ (при достаточно малых ε), где $C=\mathrm{const}$, что и доказывает требуемое утверждение. В случае $\sigma_1>\sigma_2$ получаем

$$F_{1,2}(k)=\frac{\varepsilon^{\sigma_2}}{2}\Big(\frac{A_1\varepsilon^{\sigma_1-\sigma_2}}{2i}b_{11}(k)+\frac{A_2}{2i}b_{22}(k)\pm$$

$$\pm\sqrt{\Big(\frac{A_1\varepsilon^{\sigma_1-\sigma_2}}{2i}b_{11}(k)-\frac{A_2}{2i}b_{22}(k)\Big)^2-A_1A_2\varepsilon^{\sigma_1-\sigma_2}b_{12}(k)b_{21}(k)}\Big),$$

откуда $\mid F_{1,2}(k)\mid\leqslant C\mid\varepsilon^{\sigma_2}\mid\leqslant\delta$ для $k\in S$ и малых ε, что и требовалось.

Условие сжимаемости отображений $F_{1,2}(k)$ выполнено, если существуют производные $F_{1,2}^{'}(k)$ и в круге S справедлива оценка $\mid F_{1,2}^{'}(k)\mid\leqslant q<1$.

Условия (2.5) и (2.6) эквивалентны для достаточно малых ε

одному условию

$$\left(\tfrac{A_1\varepsilon^{\sigma_1}}{2i}b_{11}(0)-\tfrac{A_2\varepsilon^{\sigma_2}}{2i}b_{22}(0)\right)^2-A_1A_2\varepsilon^{\sigma_1+\sigma_2}b_{12}(0)b_{21}(0)=$$

$$=A^2(0)-4B(0)\neq 0,$$

из которого следует дифференцируемость корня $\sqrt{A^2(k)-4B(k)}$ в окрестности нуля и, таким образом, существование производных $F'_{1,2}(k)$ вблизи нуля. Очевидно, для $k\in S$ в случае $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ имеем $\mid F'_{1,2}(k)\mid\leqslant C\mid\varepsilon^{\sigma}\mid\leqslant q<1$, а в случае $\sigma_1>\sigma_2$ справедливо $\mid F'_{1,2}(k)\mid\leqslant C\mid\varepsilon^{\sigma_2}\mid\leqslant q<1$ (подробную оценку см. в [2]). Таким образом, принцип сжимающих отображений применим к отображениям $F_1(k)$ и $F_2(k)$. Следовательно, отображения $F_1(k)$ и $F_2(k)$ имеют в окрестности нуля только по одной неподвижной точке.

Для нахождения асимптотики уровней рассмотрим, как и выше, два случая. Пусть сначала $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$. За нулевое приближение как в первом, так и во втором случае принимаем $k^0=0$. Первым приближением является

$$k^1=F_{1,2}(k^0)=F_{1,2}(0)=\tfrac{\varepsilon^{\sigma}}{2}\Big(\tfrac{A_1}{2i}b_{11}(0)+\tfrac{A_2}{2i}b_{22}(0)\pm$$

$$\pm\sqrt{\left(\tfrac{A_1}{2i}b_{11}(0)-\tfrac{A_2}{2i}b_{22}(0)\right)^2-A_1A_2\mid b_{12}(0)\mid^2}\;\Big)=O(\,\varepsilon^{\sigma}).$$

В силу известной формулы для погрешности справедливо

$$k=k^1+O(q)\mid k^1-k^0\mid=k^1+O(\,\varepsilon^{2\sigma}),$$

что и доказывает утверждение в случае $\sigma_1=\sigma_2$.

Когда $\sigma_1>\sigma_2$, первое приближение имеет вид

$$k^1=F_{1,2}(k^0)=F_{1,2}(0)=\tfrac{A_2\varepsilon^{\sigma_2}}{2i}b_{22}(0)\pm\tfrac{A_2\varepsilon^{\sigma_2}}{2i}b_{22}(0)+O(\varepsilon^{\sigma_1})=O(\varepsilon^{\sigma_2}).$$

Как и выше, $k=k^1+O(q)\mid k^1-k^0\mid=k^1+O(\varepsilon^{2\sigma})$.

3. Исследование уровней в общем случае

Аналогично предыдущему разделу будем рассматривать уравнение (2.2) с продолженной по $k = \sqrt{E}$ на второй лист римановой поверхности функцией $G(x, y, k)$. Здесь и далее считаем, что выполнено условие (2.4), причем $\sigma_i > 0$ – целое число.

Т е о р е м а 3.1. *Существует ровно n уровней оператора Шредингера H, которые представляют собой аналитические функции от аргумента ε в окрестности нуля, за исключением, возможно, конечного числа точек, в которых уровни сливаются. Вблизи нуля эти функции раскладываются в сходящиеся ряды Пюизо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (2.2) имеем

$$\psi = C_1\tilde{\varphi}_1 + C_2\tilde{\varphi}_2 + \ldots + C_n\tilde{\varphi}_n,$$

где $C_i = \mathrm{const}$, $\tilde{\varphi}_i = -\lambda_i R_0(E)\varphi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Подставляя это выражение в (2.2) и пользуясь линейной независимостью функций $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n$ (доказательство проводится как и в случае $n = 2$), получаем линейную однородную систему уравнений относительно $C_1, \ldots, C_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\left(\delta_{ij} + \lambda_i(R_0(E)\varphi_i, \varphi_j)\right) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где δ_{ij} - символ Кронекера. Эта система имеет ненулевое решение в том и только в том случае, если

$$\Delta(E) = \det\left(\delta_{ij} + \lambda_i(R_0(E)\varphi_i, \varphi_j)\right) = 0.$$

Перейдя к $k = \sqrt{E}$ и умножая каждую строчку данного определителя на $2ik$, получим равенство

$$P(k, \varepsilon) = \begin{vmatrix} 2ik - \lambda_1 b_{11}(k) & \ldots & -\lambda_n b_{n1}(k) \\ -\lambda_1 b_{12}(k) & \ldots & -\lambda_n b_{n2}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_1 b_{1n}(k) & \ldots & 2ik - \lambda_n b_{nn}(k) \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.1)$$

В силу (2.4) уравнение (3.1) имеет вид

$$P(k,\varepsilon) = (2ik)^n - \sum_{j=1}^{n} a_j(k,\varepsilon)(2ik)^{n-j} = 0, \qquad (3.2)$$

где $a_j(k,\varepsilon)$ – аналитические функции в окрестности точки $(0,0)$, причем $a_j(k,0) = 0$. Функция $P(k,\varepsilon)$ является аналитической в окрестности нуля, причем $P(0,0) = 0$, но $P(k,0) = (2ik)^n \neq 0$. Следовательно, к уравнению (3.2) применима подготовительная теорема Вейерштрасса [3, гл. 2], из которой следует, что уравнение (3.2) имеет n (возможно, сливающихся) решений $k = k_j(\varepsilon)$, $j = 1, \ldots, n$, являющихся уровнями, которые, согласно теореме Пюизо [4, теорема XII.2], раскладываются в ряды Пюизо. Кроме того, аналитичность функций $k_j(\varepsilon)$ нарушается лишь в точках их слияния, которые удовлетворяют уравнению $f(\varepsilon) = 0$, где $f \neq 0$ – некоторая аналитическая функция в окрестности нуля. По теореме единственности в окрестности нуля может быть лишь конечное число нулей функции f.

Список литературы

1. Демков Ю. Н., Островский В.Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975. 240 с.
2. Сметанина М.С. Об уравнении Шредингера с нелокальным потенциалом // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2002. N3(26). С. 99-114.
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. Функции нескольких переменных. М.: Наука, 1976. 400 с.
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 432 с.

Аннотация.

Исследуется одномерный оператор Шредингера с потенциалом, представляющим собой сумму n сепарабельных потенциалов. Доказано существование n уровней (собственных значений или резонансов) такого оператора Шредингера. Изучается асимптотика уровней в случае n=2.