Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2005. Ґ1(31)

УДК 517.958 : 530.145.6

© **Н.И. Плетникова**
chuburin@otf.pti.udm.ru

ОБ УРОВНЯХ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА ГРАНИЦЕ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

Ключевые слова: уравнение Шредингера, нелокальный потенциал, ступенчатый потенциал, собственное значение, резонанс, асимптотика

Abstract. We consider the one-dimensional Schrödinger operator H with the non-local perturbed step potential. We prove that there exists the unique level (i.e. eigenvalue or resonance of the operator H) in the neighborhood of the boundary of the essential spectrum of the operator H . We investigate the asymptotic behaviour of this level.

Введение

Рассматривается уравнение

$$H\psi = E\psi, \tag{0.1}$$

где $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0\theta(x) + \lambda(\cdot,\varphi_0)\varphi_0$, а $E \in \mathbb{C}$. Полагаем, что функция $\varphi_0(x)$ экспоненциально убывает, т. е. выполняется неравенство $|\varphi_0(x)| \leqslant Ce^{-\alpha|x|}$, где $C, \alpha = \mathrm{const} > 0$, причем $\alpha > 2\sqrt{|V_0|}$. Считаем $V_0 = \mathrm{const} < 0$ (случай $V_0 > 0$ аналогичен).

Введем следующие обозначения: $\theta(x)$ – функция Хевисайда, $\lambda(\cdot,\varphi_0)\varphi_0$ – одномерный оператор (ґсепарабельный потенциалЄ, см. [1]), $\lambda \in \mathbb{R}$ – параметр. Рассматриваются (обобщенные) собственные функции оператора H , т. е. ненулевые решения $\psi(x)$ уравнения Шредингера (0.1), удовлетворяющие условию

$$\psi \cdot \varphi_0 \in L^1(\mathbb{R}). \tag{0.2}$$

Обозначим $(\psi,\varphi_0)=\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(x)\overline{\varphi_0(x)}\,dx$, положим $H_1=-\frac{d^2}{dx^2}+V_0\theta(x)$ и запишем уравнение (0.1) в виде

$$H_1\psi+\lambda(\psi,\varphi_0)\varphi_0=E\psi. \tag{0.3}$$

Ядро резольвенты $(H_1-E)^{-1}$ будем для краткости называть функцией Грина. Вид функции Грина $G_1(x,y,E)$ оператора H_1 приведен в работе [2], там же доказано, что спектр $\sigma(H_1)$ оператора H_1 равен существенному спектру $\sigma_{\text{ess}}(H)$ оператора H и равен $[V_0,+\infty)$.

В работе исследуются собственные значения и резонансы, которые находятся рядом с границей V_0 существенного спектра оператора H. В работе [2] рассматривается такой же оператор H при условии, что V_0 мало. Подобное исследование в трехмерном случае для локального потенциала и малого V_0 проведено в статье [3].

Пусть $E\notin[V_0,+\infty)$, тогда уравнение (0.3) приводимо к интегральному виду

$$\psi(x)=-\lambda(\psi,\varphi_0)\int\limits_{\mathbb{R}}G_1(x,y,E)\varphi_0(y)dy. \tag{0.4}$$

О п р е д е л е н и е 0.1. Под резонансом оператора H будем понимать такое $E\in\mathbb{C}$, для которого существует решение уравнения (0.4), удовлетворяющее условию (0.2), причем выполняется условие $\mathrm{Im}\sqrt{E-V_0}<0$.

О п р е д е л е н и е 0.2. Уровнем E оператора H будем называть собственное значение или резонанс оператора (а также соответствующее E число $\kappa=\sqrt{E-V_0}$).

Вместо $G_1(x,y,E)$ в дальнейшем будем применять обозначение $G_1(x,y,\kappa)$. Уравнение (0.4) принимает вид

$$\psi(x)=-\lambda(\psi,\varphi_0)\int\limits_{\mathbb{R}}G_1(x,y,\kappa)\varphi_0(y)dy, \tag{0.5}$$

где

$$G_1(x,y,\kappa)=-\theta(x)\theta(y)\big(\tfrac{1}{2i\kappa}e^{i\kappa|x-y|}+\tfrac{-\sqrt{\kappa^2+V_0}+\kappa}{2i\kappa(\sqrt{\kappa^2+V_0}+\kappa)}e^{i\kappa(x+y)}\big)-$$

$$-\theta(x)\theta(-y)\frac{1}{i(\sqrt{\kappa^2+V_0}+\kappa)}e^{i\kappa x-i\sqrt{\kappa^2+V_0}y}-$$

$$-\theta(-x)\theta(y)\frac{1}{i(\sqrt{\kappa^2+V_0}+\kappa)}e^{-i\sqrt{\kappa^2+V_0}x+i\kappa y}-$$

$$-\theta(-x)\theta(-y)\Big(\frac{1}{2i\sqrt{\kappa^2+V_0}}e^{i\sqrt{\kappa^2+V_0}|x-y|}-$$

$$-\frac{-\sqrt{\kappa^2+V_0}+\kappa}{2i\sqrt{\kappa^2+V_0}(\sqrt{\kappa^2+V_0}+\kappa)}e^{-i\sqrt{\kappa^2+V_0}(x+y)}\Big).$$

1. Существование уровня около границы непрерывного спектра

Л е м м а 1.1. *Функция* $F(\kappa)=\big(\int\limits_{\mathbb{R}}\kappa G_1(x,y,\kappa)\varphi_0(y)dy,\varphi_0\big)$ *является аналитической функцией в некоторой достаточно малой окрестности точки* $\kappa=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем функцию Грина $G_1(x,y,\kappa)$ оператора H_1 к виду

$$G_1(x,y,\kappa)=\frac{1}{\kappa}g_1(x,y,\kappa)+g_2(x,y,\kappa),$$

где

$$g_1(x,y,\kappa)=-\theta(x)\theta(y)\Big(\frac{1}{2i}e^{i\kappa|x-y|}+\frac{-\sqrt{\kappa^2+V_0}+\kappa}{2i(\sqrt{\kappa^2+V_0}+\kappa)}e^{i\kappa(x+y)}\Big),$$

$$g_2(x,y,\kappa)=-\theta(x)\theta(-y)\frac{1}{i(\sqrt{\kappa^2+V_0}+\kappa)}e^{i\kappa x-i\sqrt{\kappa^2+V_0}y}-$$

$$-\theta(-x)\theta(y)\frac{1}{i(\sqrt{\kappa^2+V_0}+\kappa)}e^{-i\sqrt{\kappa^2+V_0}x+i\kappa y}-$$

$$-\theta(-x)\theta(-y)\Big(\frac{1}{2i\sqrt{\kappa^2+V_0}}e^{i\sqrt{\kappa^2+V_0}|x-y|}-$$

$$-\frac{-\sqrt{\kappa^2+V_0}+\kappa}{2i\sqrt{\kappa^2+V_0}(\sqrt{\kappa^2+V_0})+\kappa)}e^{-i\sqrt{\kappa^2+V_0}(x+y)}\Big).$$

Для доказательства аналитичности функции $F(\kappa)$ достаточно доказать равномерную (по κ из окрестности нуля) сходимость интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial\kappa}\big(g_1(x,y,\kappa)+\kappa g_2(x,y,\kappa)\big)\varphi_0(y)\overline{\varphi_0(x)}\,dx\,dy.$$

Согласно неравенству Коши–Буняковского справедливо

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial\kappa}\big(g_1(x,y,\kappa)+\kappa g_2(x,y,\kappa)\big)\varphi_0(y)\overline{\varphi_0(x)}\,dx\,dy\,\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^2} \Big|\frac{\partial}{\partial\kappa}\big(g_1(x,y,\kappa)+\kappa g_2(x,y,\kappa)\big)\Big|^2 \big|\varphi_0(y)\varphi_0(x)\,\big|\,dx\,dy}\ \times$$

$$\times\sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\varphi_0(y)\varphi_0(x)|\,dx\,dy}.$$

Специфика функций g_1 и g_2 и условия на φ_0 обеспечивают сходимость данных интегралов.

Для функции $F(\kappa)$ из леммы 1.1 получаем

$$F'(0)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Big[-\theta(x)\theta(y)\big(\tfrac{|x-y|}{2}-\tfrac{1}{i\sqrt{V_0}}-\tfrac{x+y}{2}\big)-$$

$$-\theta(x)\theta(-y)\tfrac{1}{i\sqrt{V_0}}e^{-i\sqrt{V_0}y}-\theta(-x)\theta(y)\tfrac{1}{i\sqrt{V_0}}e^{-i\sqrt{V_0}x}-$$

$$-\theta(-x)\theta(-y)\big(\tfrac{1}{2i\sqrt{V_0}}e^{i\sqrt{V_0}|x-y|}+\tfrac{1}{2i\sqrt{V_0}}e^{-i\sqrt{V_0}(x+y)}\big)\Big]\varphi_0(y)\overline{\varphi_0(x)}\,dy\,dx,$$

$$F''(0)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Big[-\theta(x)\theta(y)\big(-\tfrac{(x-y)^2}{2i}-\tfrac{2}{iV_0}+\tfrac{x+y}{\sqrt{V_0}}+\tfrac{(x+y)^2}{2i}\big)-$$

$$-2\theta(x)\theta(-y)e^{-i\sqrt{V_0}y}\tfrac{-1+i\sqrt{V_0}x}{iV_0}-2\theta(-x)\theta(y)e^{-i\sqrt{V_0}x}\tfrac{-1+i\sqrt{V_0}y}{iV_0}-$$

$$-2\tfrac{1}{i}\theta(-x)\theta(-y)\Big]\varphi_0(y)\overline{\varphi(x)}\,dy\,dx.$$

Предположим, что $F'(0)\neq 0$ и обозначим $\lambda_0=-\frac{1}{F'(0)}$.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть $F'(0)\neq 0$, $F''(0)\neq 0$. Существует такая окрестность λ_0, что для любого λ из этой окрестности оператор H имеет единственный уровень $\kappa=\sqrt{E-V_0}$ в достаточно малой окрестности нуля.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 1.1 уравнение (0.5) можно записать в виде

$$\psi(x)=-\tfrac{\lambda(\psi,\varphi_0)}{\kappa}\int\limits_{\mathbb{R}}\bigl(g_1(x,y,\kappa)+\kappa g_2(x,y,\kappa)\bigr)\varphi_0(y)\,dy. \tag{1.1}$$

Пусть $C=(\psi,\varphi_0)$ и $I(x,\kappa)=\int\limits_{\mathbb{R}}\bigl(g_1(x,y,\kappa)+\kappa g_2(x,y,\kappa)\bigr)\varphi_0(y)\,dy$, тогда уравнение (1.1) принимает вид

$$\psi(x)=-\tfrac{\lambda C}{\kappa}I(x,\kappa). \tag{1.2}$$

Подставляя выражение (1.2) в уравнение (1.1), получаем

$$\kappa=-\lambda(I(x,\kappa),\varphi_0)=F(\kappa). \tag{1.3}$$

Функция $F(\kappa)$ является аналитической функцией при κ, близких к нулю (см. лемму 1.1), поэтому уравнение (1.3) можно записать в виде

$$\kappa=-\lambda\bigl(F(0)+F'(0)\kappa+\tfrac{1}{2}F''(0)\kappa^2+o(\kappa^2)\bigr), \tag{1.4}$$

где, как легко проверить, $F(0)=0$. Разделим обе части уравнения на κ, тогда уравнение (1.4) приобретает вид

$$1=-\lambda\bigl(F'(0)+\tfrac{1}{2}F''(0)\kappa+o(\kappa)\bigr), \tag{1.5}$$

а из теоремы Руше следует требуемое утверждение.

2. Асимптотика уровней

Т е о р е м а 2.1. *В условиях теоремы* 1.1 *для уровня оператора H справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\kappa=\tfrac{2(F'(0))^2}{F''(0)}(\lambda-\lambda_0)+o(\lambda-\lambda_0).$$

Доказательство. Пусть $h(\kappa)=\frac{F''(0)}{2}\lambda_0^2\kappa+o(\kappa)$ – аналитическая функция в окрестности точки $\kappa=0$. Уравнение (1.5) можно записать в виде $\lambda-\lambda_0=h(\kappa)$. Пусть $\tau=\lambda-\lambda_0$. Поскольку $h'(0)\neq 0$, то в окрестности $\tau=0$ существует обратная функция $\kappa=h^{-1}(\tau)$. Разложим правую часть этого уравнения по формуле Тейлора: $\kappa=h^{-1}(0)+(h^{-1})'(0)\tau+o(\tau)$. Так как $h^{-1}(0)=0$ и $(h^{-1})'(0)=\frac{1}{h'(0)}=\frac{2}{F''(0)\lambda_0^2}$, то

$$\kappa=\frac{2}{F''(0)\lambda_0^2}\tau+o(\tau)=\frac{2(F'(0))^2}{F''(0)}(\lambda-\lambda_0)+o(\lambda-\lambda_0).$$

Замечание 2.1. Как легко видеть, $F'(0)$ – число вещественное, а $F''(0)$ – чисто мнимое, отсюда вытекает, что

а) если $\frac{i(F'(0))^2}{F''(0)}(\lambda-\lambda_0)>0$, то κ – резонанс;

б) если $\frac{i(F'(0))^2}{F''(0)}(\lambda-\lambda_0)<0$, то κ – собственное значение.

Отсюда следует, что если λ переходит через λ_0, то собственное значение превращается в резонанс (или наоборот) (ср. [4]).

Список литературы

1. Демков Ю. Н., Островский В.Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975. 240 с.
2. Плетникова Н.И. Об одномерном уравнении Шредингера с нелокальным потенциалом типа возмущенной ступеньки // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2004. Вып. 3(29). С. 95-108.
3. Чубурин Ю.П. Об операторе Шредингера с малым потенциалом типа возмущенной ступеньки // Теор. и матем. физика. 1999. Т. 120, Ѓ 2. С. 277-290.
4. Чубурин Ю. П. О попадании собственного значения (резонанса) оператора Шредингера на границу зоны // Теор. и матем. физика. 2001. Т. 126, Ѓ 2. С. 196-205.

Аннотация.

Исследуется одномерный оператор Шредингера с нелокальным потенциалом в виде возмущенной ступеньки. Доказано существование уровня на границе существенного спектра. Для данного случая получена асимптотическая формула.