Известия Института математики и информатики. Ижевск, 2005. Ґ2(32)

УДК 517.934

© **В.И. Ухоботов**
ukh@csu.ru

АНАЛИТИЧЕСКАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ СТАБИЛЬНЫХ МОСТОВ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ПРОГРАММНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ С ИНВАРИАНТНЫМИ СЕМЕЙСТВАМИ МНОЖЕСТВ

Ключевые слова: стабильный мост, оператор программного поглощения, дифференциальная игра.

Abstract. Consider one analitytical schema for building a stable bridge.

Введение

При построении управления в дифференциальной игре основополагающим является вопрос о построении стабильного моста [1]. Сама процедура построения стабильного моста [1;2;3] сложна. Поэтому представляет интерес выделение классов дифференциальных игр, в которых вопрос о построении стабильного моста сводится к исследованию хорошо изученных задач.

В данной статье продолжается исследование дифференциальных игр, начатое в работе [4], в которых оператор программного поглощения обладает инвариантным семейством множеств.

1. Постановка задачи

Пусть в пространстве $Z = R^n$ происходит движение вектора z по закону

$$\dot{z} = f(t, z, u, v). \tag{1.1}$$

Здесь u - управление первого игрока, v - управление второго игрока. На выбор управлений накладываются геометрические ограничения

$$u \in U \subset R^n, \; v \in V \subset R^l.$$

Предполагаем, что для любых чисел $t_0 < t_1$ и любых измеримых управлений $u : [t_0, t_1] \to U, \; v : [t_0, t_1] \to V$ задача Коши

$$\dot{z} = f(t, z, u(t), v(t)), \; z(t_0) = z_0 \tag{1.2}$$

для любого начального условия $z_0 \in Z$ имеет единственное решение $z(t)$.

Введем оператор программного поглощения T [2]. Зафиксируем множество $X \subset Z$. Точка z_0 принадлежит множеств $T_{t_0}^{t_1}(X)$ тогда и только тогда, когда для любого измеримого управления $v : [t_0, t_1] \to V$ существует измеримое управление $u : [t_0, t_1] \to U$ такое, что $z(t_1) \in X$. Здесь $z(t)$ - решение задачи Коши (1.2).

Многозначная функция $W : [a, b] \to 2^Z$ называется стабильным мостом [1] на отрезке $[a, b]$, если для любых чисел $a \leqslant t \leqslant \tau \leqslant b$ выполнено включение

$$T_t^{\tau}\left(W(\tau)\right) \supset W(t).$$

Если известен стабильный мост, то при ряде дополнительных предположений на правую часть системы (1.1) можно построить [1] управление $u(t, z) \in U$, которое для начального состояния $z(a) \in W(a)$ обеспечивает включение $z(t) \in W(t)$ при всех $a \leqslant t \leqslant b$ и при любом управлении $v(t, z) \in V$.

2. Построение стабильного моста при наличии семейства инвариантных множеств

В линейном нормированном пространстве Z с нормой $||z||, \; z \in Z$ задан оператор T_t^{τ}, который каждой паре чисел из промежутка $I \subset R$ и любому множеству $X \subset Z$ ставит в соответствие множество $T_t^\tau(X) \subset Z$. Считаем, что это отображение удовлетворяет следующим свойствам

С в о й с т в о 2.1. $T_t^\tau(X) \subset T_t^\tau(X_1)$ при $X \subset X_1$.

С в о й с т в о 2.2. Если X замкнуто, то $T_t^\tau(X)$ замкнуто.

С в о й с т в о 2.3. $T_t^\tau(T_\tau^\tau(X)) \subset T_t^\tau(X)$.

Предположим, что задано замкнутое множество Y в конечномерном пространстве R^l с нормой $|y|,\ y \in R^l$. Считаем, что при любых $y \in Y,\ t \in I$ определено непустое замкнутое множество $B(t,y) \subset Z$.

У с л о в и е А. Если последовательность $y_n \to y$, а точка $z \in B(t,y)$, то существует последовательность $z_n \in B(t,y_n)$, $z_n \to z$.

У с л о в и е Б. Заданы открытое множество $D \subset I \times Y$ и число $a > 0$. При любых $(t,y) \in D,\ 0 < h < a$ определена функция $f(h,t,y) \in Y$ такая, что $f(0,t,y) = 0$ и $|f(h_i,t_i,y_i) - y_i| \to 0$ для любых последовательностей

$$(t_i,y_i) \in D,\ t_i + h_i \in I,\ 0 < h_i < a$$

сходящихся $(t_i,y_i) \to (t,y) \in D,\ h_i \to 0$. Пусть выполнено включение

$$T_t^{t+h}(B(t+h, f(h,t,y))) \supset B(t,y); \tag{2.1}$$

при всех $(t,y) \in D,\ 0 < h < a,\ t + h \in I$.

У с л о в и е В. При всех $(t,y) \in D$ определена непрерывная функция $F(t,y) \in R^l$ такая, что для любых последовательностей $(t_i,y_i) \in D,\ t_i + h_i \in I,\ 0 < h_i < a$, сходящихся

$$(t_i,y_i) \to (t,y) \in D,\ h_i \to 0,$$

выполнено равенство

$$\lim_{i\to\infty} \frac{f(h_i,t_i,y_i) - y_i}{h_i} = F(t,y). \tag{2.2}$$

Рассмотрим задачу об отыскании функции $y(t)$, удовлетворяющей следующим условиям:

$$(t, y(t)) \in D,\ \dot{y}(t) = F(t, y(t)),\ \forall t \in [q, p]. \qquad (2.3)$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Будем говорить, что задача (2.3) удовлетворяет свойствам единственности, если она удовлетворяет следующему условию: пусть $x : [t_0, \tau] \to Y$ и $y : [t_0, \tau] \to Y$ — два решения задачи (2.3) и $x(t_1) = y(t_1)$ при некотором $t_1 \in [t_0, \tau]$, тогда $x(t) = y(t)$ при всех $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть функция* $y : [q, p] \to Y$ *является решением задачи* (2.3), *а сама задача* (2.3) *обладает свойством единственности решения. Тогда*

$$T_t^{\tau}(B(\tau, y(\tau))) \supset B(t, y(t)),\ q \leqslant t < \tau \leqslant p. \qquad (2.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество D - открыто, и $(t, y(t)) \in D$ при $q \leqslant t \leqslant p$. Существует число $m > 0$ такое, что множество

$$D_m = \{(t, y) \in D : |y - y(t)| \leqslant m,\ q \leqslant t \leqslant p\} \subset D. \qquad (2.5)$$

Это множество является замкнутым и ограниченным.

Из условия В следует, что существуют числа $M > 0$ и $\varepsilon \in (0, a)$ такие, что

$$\Big|\frac{f(h, t, y) - y}{h}\Big| \leqslant M,\ \forall h \in (0, \varepsilon),\ (t, y) \in D_m,\ t + h \leqslant p. \qquad (2.6)$$

Доказательство проводится от противного.

Из замкнутости множества D_m следует, что существует число $0 < \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon$ такое, что

$$D(t) = \{(\tau, y) :\ |\tau - t| \leqslant \varepsilon_0, |y - y(t)| \leqslant \varepsilon_0\} \subset D_m,\ \forall t \in [q, p]. \ (2.7)$$

Обозначим

$$\delta = \max(\frac{\varepsilon_0}{M}; \varepsilon_0). \qquad (2.8)$$

Допустим, что включение (2.4) доказано для любых точек $q \leqslant t < \tau \leqslant t+\delta,\ \tau \leqslant p$. Тогда для любой точки $\tau \in (t,p]$ можно построить числа

$$t = t_0 < t_1 < ... < t_k < \tau \leqslant t_{k+1},\ t_i = t_0 + i\delta,\ i = 1,...,k+1.$$

Из свойств 2.1 и 2.3 отображения T следует, что

$$T_t^\tau(B(\tau, y(\tau))) \supset T_t^{t_1}(...T_{t_{k-1}}^{t_k}(T_{t_k}^\tau(B(\tau, y(\tau)))...) \supset$$

$$\supset T_t^{t_1}(...T_{t_{k-1}}^{t_k}(B(t_k, y(t_k))) \supset ... \supset B(t, y(t)).$$

Возьмем два числа $t_0 \in [q,p],\ \tau \in [q,p]$ такие, что $t_0 < \tau \leqslant t_0 + \delta$. Возьмем точки

$$t_0 < t_1 < ... < t_n = \tau,\ t_i = t_0 + i\sigma_n,\ \sigma_n = \frac{\tau - t}{n} \leqslant \frac{\delta}{n}. \qquad (2.9)$$

Обозначим

$$x_n(0) = y(t_0),\ x_n(1) = f(\sigma_n, t_0, x_n(0)), ...,$$

$$x_n(i) = f(\sigma_n, t_{i-1}, x_n(i-1)). \qquad (2.10)$$

Покажем, что

$$(t_i, x_n(i)) \in D(t_0),\ |x_n(i) - x_n(i-1)| \leqslant \delta_n M. \qquad (2.11)$$

Из формул (2.7) и (2.8) имеем, что

$$(t_0, x_n(0)) = (t_0, y(t_0)) \subset D(t_0);$$

$$|x_n(1) - x_n(0)| = |f(\sigma_n, t_0, x_n(0)) - x_n(0)| \leqslant \sigma_n M.$$

Допустим, что условия (2.11) выполнены для числа i. Тогда

$$|t_{i+1} - t_0| = (i+1)\sigma_n \leqslant n\sigma_n \leqslant \delta \leqslant \varepsilon_0. \qquad (2.12)$$

Далее, из формулы (2.6) получим, что

$$|x_n(i+1) - x_n(i)| = |f(\sigma_n, t_i, x_n(i)) - x_n(i)| \leqslant \sigma_n M.$$

Следовательно,

$$|x_n(i+1)-y(t_0)| \leqslant |x_n(i+1)-x_n(i)|+|x_n(i)-x_n(i-1)|+...$$

$$+|x_n(1)-x_n(0)| \leq \sigma_n M+...+\sigma_n M=$$

$$=(i+1)\sigma_n M \leqslant n\sigma_n M=\delta M \leqslant \varepsilon_0.$$

Отсюда и из (2.12) получим включение

$$(t_{i+1}, x_n(i+1)) \in D(t_0).$$

Определим при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$ последовательность ломаных

$$x_n(t)=x_n(i-1)+\frac{x_n(i)-x_n(i-1)}{\sigma_n}(t-t_{i-1}),\ t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i. \quad (2.13)$$

Функция $x_n(t)$ непрерывна при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$ и, как следует из неравенства (2.11), $|\dot{x}_n(t)| \leqslant M$ для почти всех $t \in [t_0, \tau]$. Отсюда следует, что каждая из функций (2.13) удовлетворяет условию Липшица с константой М. Поэтому последовательность функций $x_n(t)$ удовлетворяет условию теоремы Арцела [5]. Отсюда (переходя, если нужно, к подпоследовательности) можно считать, что последовательность $x_n(t)$ равномерно сходится к некоторой функции $x(t)$. Предельная функция также удовлетворяет условию Липшица с той же постоянной М. Поэтому у нее почти всюду на отрезке $[t_0, \tau]$ существует производная. Кроме того, из неравенства (2.10) и из включения (2.11) получим, что

$$x(t_0)=y(t_0), (t, x(t)) \in D(t_0),\ \forall t \in [t_0, \tau]. \quad (2.14)$$

Покажем, что

$$\dot{x}(t)=F(t, x(t)),\ t_0 \leqslant t \leqslant \tau. \quad (2.15)$$

Пусть в точке $t \in [t_0, \tau)$ существует производная $\dot{x}(t)$. Для любого $0 < h < \tau - t$ выполнено равенство

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \dot{x}_n(t+hr)dr. \qquad (2.16)$$

Из формул (2.10) и (2.13) следует, что для почти всех $r \in [0,1]$ выполнено равенство

$$\dot{x}_n(t+hr) =$$

$$= \frac{f(\sigma_n, t_0 + r_n\sigma_n, x_n(t_0 + r_n\sigma_n)) - x_n(t_0 + r_n\sigma_n)}{\sigma}. \qquad (2.17)$$

Здесь посредством r_n обозначена целая часть числа $(t + hr - t_0)/\sigma_n$. Так как последовательность $r_n\sigma_n \to t + hr - t_0$, а последовательность функций $x_n(t)$ сходится к функции $x(t)$ равномерно, то $x_n(t_0 + r_n\sigma_n) \to x(t + hr)$ при $n \to \infty$. Из формул (2.2) и (2.17) получим, что $\dot{x}_n(t+hr) \to F(t+hr, x(t+hr))$ почти всюду на отрезке $[0,1]$. Кроме того, $|\dot{x}_n(t+hr)| \leqslant M$. Следовательно, применяя к равенству (2.16) теорему Лебега [5], получим, что

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \dot{x}_n(t+hr)dr = \int_0^1 F(t+hr, x(t+hr))dr.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $h \to 0$ и используя непрерывность функции F, получим равенство (2.15).

Из равенства $x_0(t) = y(t_0)$, учитывая единственность решения задачи (2.3), получим, что $x(t) = y(t)$ для всех $t \in [t_0, \tau]$.

Итак доказано, что существует последовательность точек $x_n(n) = x_n(\tau)$, которая сходится к $y(\tau)$.

Из условия Б и из формул (2.10) и (2.11) получим, что

$$B(t_i, x_n(i)) = B(t_i, f(\sigma_n, t_{i-1}, x_n(i-1))) =$$

$$= B(t_{i-1} + \sigma_n, f(\sigma_n, t_{i-1}, x_n(i-1)) \subset T^{t_i}_{t_{i-1}}(B(t_{i-1}, x_n(i-1)).$$

Из этого включения, используя свойства 2.1 и 2.3 отображения T, получим, что

$$B(\tau, x_n(n)) \subset T_{t_0}^{\tau}(B(t_0, y(t_0))). \tag{2.18}$$

Возьмем точку $z \in B(\tau, y(\tau))$. Поскольку $x_n(n) \to y(\tau)$, то из условия A следует, что существует последовательность точек $z_n \in B(\tau, x_n(n))$ такая, что $z_n \to z$. Следовательно, точки z_n принадлежат множеству, стоящему в правой части включения (2.18). Согласно свойству 2.2 отображения T, это множество замкнуто. Следовательно, точка z принадлежит этому множеству.

Таким образом, включение (2.4) доказано.

Рассмотрим теперь случай, когда вместо включения (2.1) выполнено включение

$$T_t^{t+h}(B(t+h, y)) \supset B(t, f(h, t, y)). \tag{2.19}$$

Т е о р е м а 2.2. *Пусть функция* $y : [q, p] \to R^l$ *является единственным решением следующей задачи:*

$$(t, y(t)) \in D,\ \dot{y}(t) = -F(t, y(t)),\ \forall t \in [q, p]. \tag{2.20}$$

Тогда выполнено включение (2.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вместо формул (2.10) запишем следующие формулы:

$$x_n(n) = y(\tau), ..., x_n(i) = f(\sigma_n, t_i, x_n(i+1)),\ i = 0, ..., n. \tag{2.21}$$

Покажем, что

$$(t_i, x_n(i)) \in D(\tau),\ |x_n(i) - x_n(i-1)| \leqslant \sigma_n M. \tag{2.22}$$

Из формул (2.7) и (2.8) имеем, что

$$(t_n, x_n(n)) = (\tau, y(\tau)) \in D(\tau);$$

$$|x_n(n) - x_n(n-1)| = |f(\sigma_n, t_{n-1}, x_n(n)) - x_n(n)| \leqslant \sigma_n M.$$

Допустим, что условия (2.22) выполнены для числа $(i+1)$. Тогда из формулы (2.21) получим, что

$$|x_n(i) - x_n(i-1)| = |f(\sigma_n, t_{i-1}, x_n(i)) - x_n(i)| \leqslant \sigma_n M.$$

Следовательно,

$$|x_n(i) - y(\tau)| = |x_n(i) - x_n(n)| \leqslant$$

$$\leqslant |x_n(i) - x_n(i+1)| + ... + |x_n(n-1) - x_n(n)| \leqslant n\sigma_n M = \delta M = \varepsilon_0.$$

Отсюда и из условия $|t_i - \tau| \leqslant n\sigma_n \leqslant \delta \leqslant \varepsilon_0$ получим включение (2.22).

Формулой (2.13) для набора $x_n(i)$ (2.21) определим ломаные (2.13). Поскольку $x_n(i) - x_n(i-1) = -(f(\sigma_n, t_{i-1}, x_n(i)) - x_n(i))$, то производная $\dot{x}_n(t + hr)$ равняется выражению, стоящему в правой части (2.17), взятому со знаком минус. Поэтому предельная функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (2.20). Дальнейшие рассуждения те же, что и в теореме 2.1.

Включение (2.4) было доказано в предположении, что отображение T удовлетворяет условиям 2.1-2.3. Однако, например, свойство 2.3 для операторов, которые строятся на основе аппроксимирующей модели, может и не выполняться.

У с л о в и е Г. Заданы непрерывная функция $y : [q,p] \to R^l$ и число $m > 0$ такие, что выполнено включение (2.5). Существует число $L > 0$ такое, что для любых $\tau \in [q,p]$, $|y - y(\tau)| \leqslant m$,

$$B(\tau, y(\tau)) + L|y(\tau) - y|S \supset B(t, y). \tag{2.23}$$

Здесь обозначено $S = \{z \in Z : ||z|| \leqslant 1\}$.

Т е о р е м а 2.3. *Пусть оператор T удовлетворяет свойству* 2.1 *и выполнены условия Б и Г. Тогда существует число* $\delta_0 > 0$ *такое, что для всех* $t, \tau \in [q,p]$, $t < \tau \leqslant t + \delta_0$ *выполнено включение*

$$T_t^\tau(B(\tau, y(\tau)) + \varphi(\tau, t)S) \supset B(t, y(t)). \tag{2.24}$$

Здесь обозначено

$$\varphi(\tau,t) = |f(\tau - t, t, y(t)) - y(\tau)|L. \qquad (2.25)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $y(t)$ непрерывна на отрезке $[q,p]$. Поэтому она на этом отрезке равномерно непрерывна. Следовательно, существует число $\delta_1 > 0$ такое, что для всех $t,\tau \in [q,p]$, $t < \tau \leqslant t + \delta_0$ выполнено неравенство

$$|y(\tau) - y(t)| \leqslant \frac{m}{2}.$$

Используя свойства функции f, сформулированные в условии Б, можно считать, что также выполнено и неравенство

$$|f(\tau - t, t, y(t)) - y(t)| \leqslant \frac{m}{2},\ t,\tau \in [q,p],\ t < \tau \leqslant t + \delta.$$

Объединяя оба эти неравенства, получим, что для всех $t,\tau \in [q,p]$, $t < \tau \leqslant t + \delta_0$ выполнено неравенство

$$|y(\tau) - f(\tau - t, t, y(t))| \leqslant m. \qquad (2.26)$$

Стало быть, точка $(\tau; f(\tau - t, t, y(y))) \in D_m$ для всех $t,\ \tau \in [q,p],\ t < \tau \leqslant t + \delta_0$. Используя включение (2.23) и обозначение (2.25), а также свойство 2.1 отображения T, получим, что

$$T_t^\tau(B(\tau, y(\tau)) + \varphi(\tau,t)S) \supset T_t^\tau(B(\tau, f(\tau - t, t, y(t)))).$$

Отсюда, используя условие Б, получим требуемое включение (2.24).

З а м е ч а н и е 2.1. Пусть выполнено условие В, а функция $y : [q,p] \to Y$ является решением задачи (2.3). Покажем, что для любого числа $\gamma > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что

$$\varphi(\tau,t) \leqslant (\tau - t)\gamma,\ \forall t,\tau \in [q,p],\ t < \tau \leqslant t + \delta. \qquad (2.27)$$

Допустим противное. Это значит, что существуют число $\gamma_0 > 0$ и последовательности точек $q \leqslant t_n < \tau_n \leqslant p$, $\tau_n - t_n \to 0$ такие, что

$$\gamma_0 \leqslant \frac{\varphi(\tau_n, t_n)}{\tau_n - t_n} = L\Big|\frac{f(\tau_n - t_n, t_n, y(t_n)) - y(\tau_n)}{\tau_n - t_n}\Big| =$$

$$= L\Big|\frac{f(\tau_n - t_n, t_n, y(t_n)) - y(t_n)}{\tau_n - t_n} - \frac{y(\tau_n) - y(t_n)}{\tau_n - t_n}\Big|. \qquad (2.28)$$

Считаем, что $\tau_n \to t$, $t_n \to t$ (иначе перейдем к подпоследовательности). Тогда из непрерывности производной $\acute{y}(t)$ следует, что

$$\frac{y(\tau_n) - y(t_n)}{\tau_n - t_n} \to \acute{y}(t).$$

Отсюда и из условия В следует, что выражение, стоящее в правой части неравенства (2.28), стремится к нулю. Получим противоречие.

Рассмотрим теперь случай, когда выполнено следующее условие.

У с л о в и е Д. Заданы непрерывная функция $y : [q, p] \to R^l$ и число $m > 0$ такие, что выполнено включение (2.5). Существует число $L > 0$ такое, что для любых $t \in [q, p]$, $|y - y(t)| \leqslant m$ выполнено включение

$$B(t, y) + L|y - y(t)|S \supset B(t, y(t)). \qquad (2.29)$$

Т е о р е м а 2.4. *Пусть выполнены условие Д и условие Б заменой включения* (2.1) *на включение* (2.19). *Тогда существует число* $\delta_0 > 0$ *такое, что для всех* t, $\tau \in [q, p]$, $t < \tau \leqslant t + \delta_0$ *выполнено включение*

$$T_t^\tau(B(\tau, y(\tau))) + \varphi_*(\tau, t)S \supset B(t, y(t)). \qquad (2.30)$$

Здесь обозначено

$$\varphi_*(\tau, t) = L|f(\tau - t, t, y(\tau)) - y(t)|. \qquad (2.31)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Число δ_0 возьмем из условия выполнения при всех $t,\ \tau\in[q,p],\ t<\tau\leqslant t+\delta_0$ двух неравенств

$$|y(\tau)-y(t)|\leqslant\frac{m}{2},\ |f(\tau-t,t,y(\tau))-y(\tau)|\leqslant\frac{m}{2}.$$

Тогда при всех $t,\ \tau\in[q,p],\ t<\tau\leqslant t+\delta_0$ выполнено неравенство

$$|f(\tau-t,t,y(\tau))-y(t)|\leqslant m.$$

Поэтому точка $(t,f(\tau-t,t,y(\tau)))\in D_m$ при всех $t,\ \tau\in[q,p]$, $t<\tau\leqslant t+\delta_0$.

Из включения (2.29) имеем, что

$$B(t,f(\tau-t,t,y(\tau)))+\varphi_*(\tau,t)S\supset B(t,y(t)).$$

Из включения (2.19) следует, что

$$T_t^\tau(B(\tau,y(\tau)))\supset B(t,f(\tau-t,t,y(\tau))).$$

Из этих двух включений получим включение (2.30).

З а м е ч а н и е 2.2. Пусть оператор T_t^τ удовлетворяет следующему свойству:

$$T_t^\tau(X_1+X)\supset T_t^\tau(X)+X_1,\ \forall X_1\subset Z.$$

Следовательно, из включения (2.30) получим включение (2.24) с функцией $\varphi=\varphi_*$.

Список литературы

1. Красовский Н.Н., Субботин А.Н. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И. О дифференциальных играх с фиксированным временем// Кибернетика. 1970. Ѓ2. С. 54-63.
3. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. 2 //Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, Ѓ4. С.764-766.
4. Ухоботов В.И. Об одном классе дифференциальных игр с интегральными ограничениями // Прикл. матем. и мех. 1977. Т. 41, вып. 5. С.819-824.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.