УДК 519.833:517.997.8

© **М. И. Высокос**
rzitlp_oz@t50.ru

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ТРЕХ ЛИЦ[1]

Ключевые слова: бескоалиционная игра, ситуация равновесия

Abstract. Sufficient existence conditions of modification of the Nash equilibrium for non-cooperation three-person differential game are established. The peculiarity of the game is that in the course of the game objective change of one of the players take place.

1. Постановка задачи

Дифференциальная бескоалиционная игра трех лиц определяется упорядоченным набором

$$\langle \{1,2,3\}, \Sigma, \{\mathbf{U}_i\}_{i=1,2,3}, \{J_i(U,t_0,x_0\}_{i=1,2,3}\rangle. \tag{1.1}$$

Здесь $\{1,2,3\}$ — множество порядковых номеров игроков; Σ обозначает управляемую динамическую систему, изменение текущего состояния $x(t)$ которой описывается векторным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

В (1.2) фазовый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство); время $t \in [t_0, \vartheta]$, где постоянные $\vartheta > t_0 \geqslant 0$, причем момент ϑ окончания игры фиксирован; вектор $u = (u_1, u_2, u_3)$, где $u_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ — вектор управляющих воздействий игрока

[1]Работа поддержана грантом РФФИ.

$i \in \{1,2,3\}$. Предполагаем, что компоненты вектор-функции $f(\cdot)$ непрерывны на $[0,\vartheta] \times \mathbb{R}^s$, $s = n + \sum_{i=1}^{3} n_i$, непрерывно дифференцируемы по x и при каждом $t \in [0,\vartheta]$ существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\|f(t,x,u)\| \leqslant \gamma(1 + \|x\| + \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|)$$

равномерно по t; здесь и далее $\|\cdot\|$ означает евклидову норму; пара $(t,x) \in [0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n$ называется *позицией игры* (1.1), тогда $(t_0, x(t_0)) = (t_0, x_0)$ — начальная позиция.

Стратегию U_i для i-го игрока $(i = 1,2,3)$ будем отождествлять $(\div)$ с вектор-функцией вида

$$u_i(t,x) = Q_i(t)x + q_i(t),$$

где элементы $n_i \times n$-матрицы $Q_i(t)$ и компоненты n_i-вектора $q_i(t)$ будем ограничивать кусочно-непрерывными (по $t \in [0,\vartheta]$) функциями, обладающими конечным числом точек разрыва
$t_1 < t_2 < \ldots < t_k$, (причем $t_1 > t_0$ и $t_k < \vartheta$), где допускаются разрывы только первого рода и в каждой точке разрыва $t_l \in \{t_1, \ldots, t_k\}$ эти функции непрерывны справа (это означает, что для всякой последовательности $\{t^{(r)}\}_0^\infty$, сходящейся к t_l справа, эти функции $q(t)$ (элементы матрицы $Q_i(t)$ или компоненты вектора $q_i(t)$) удовлетворяют равенству

$$\lim_{t^{(r)} \to t_{l+0}} q(t^{(r)}) = q(t_l).$$

Данный факт далее обозначим $Q_i(\cdot) \in C^{(k)}_{n_i \times n}[0,\vartheta]$, $q_i(\cdot) \in C^{(k)}_{n_i}[0,\vartheta]$; множество стратегий i-го игрока тогда примет вид

$$\mathbf{U}_i = \Big\{ U_i \div u_i(t,x) | u_i(t,x) = Q_i(t)x + q_i(t) \\ \forall\ Q_i(\cdot) \in C^{(k)}_{n_i \times n}[0,\vartheta], \quad q_i(\cdot) \in C^{(k)}_{n_i}[0,\vartheta] \Big\}.$$

ґРазвитиеЄ игры (1.1) с возрастанием времени t (от t_0 до ϑ) происходит следующим образом. Игроки независимо друг от друга (в этом заключается бескоалиционный ґхарактерЄ игры) выбирают каждый свою конкретную стратегию $U_i \in \mathbf{U}_i$, $U_i \div u_i(t,x)$ $(i=1,2,3)$. Этот выбор сводится к выбору конкретной кусочно-непрерывной матрицы $Q_i(\cdot) \in C^{(k)}_{n_i \times n}[0,\vartheta]$ и вектора $q_i(\cdot) \in C^{(k)}_{n_i}[0,\vartheta]$. В результате образуется *ситуация игры* (1.1):

$$U = (U_1, U_2, U_3) \in \mathbf{U} = \prod_{i=1}^{3} \mathbf{U}_i,$$

$$U \div (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x)) = u(t,x).$$

Затем строится решение $x(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, системы

$$\dot{x} = f(t,x,u(t,x)),\ x(t_0) = x_0. \tag{1.3}$$

В силу ограничений на $f(\cdot)$ и на вид множеств $\mathbf{U}_i$ $(i=1,2,3)$ система (1.3) допускает при любых $(t_0,x_0) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n$ единственное, непрерывное решение $x(t)$, продолжимое на весь интервал игры $[t_0,\vartheta]$. По этому решению $x(t)$ строятся реализации выбранных игроками стратегий

$$u_i[t] = u_i(t,x(t)) = Q_i(t)x(t) + q_i(t) \quad (i=1,2,3),$$

далее также используем вектор $u[t] = (u_1[t], u_2[t], u_3[t])$. Заметим, что в силу приведенных ограничений компоненты вектор-функции $u[t]$ будут кусочно-непрерывными на $[t_0,\vartheta]$ с конечным числом разрывов первого рода.

На полученных парах $(x(t), u[t] | t \in [t_0,\vartheta])$ определена *функция выигрыша i-го игрока*, заданная функционалом

$$J_i(U,t_0,x_0) = \Phi_i(x(\vartheta)) + \int_{t_0}^{\vartheta} \bar{F}(t,x(t),u[t])dt\ (i=1,2,3). \tag{1.4}$$

Предполагаем, что терминальная часть $\Phi_i(x)$ непрерывно дифференцируема, а интегральная часть $\bar{F}_i(t,x,u)$ непрерывна. Значение функционала $J_i(U,t_0,x_0)$ при конкретной ситуации $U \in \mathbf{U}$ называется *выигрышем i-го игрока.*

Цель игроков в игре (1.1) — выбор таких своих стратегий, при которых выигрыши игроков принимают возможно *большие* значения.

Подчеркнем одну особенность игры (1.1). Будем считать, что ґправилами игрыЄ задан момент времени $t_1 \in (t_0, \vartheta)$ такой, что до момента времени t_1 второй игрок не только стремится увеличить свой выигрыш, но и помочь первому в увеличении его выигрыша и одновременно помешать третьему в достижении его цели. А начиная с момента времени t_1 второй игрок ґмешаетЄ первому и ґпомогаетЄ третьему. Такая смена ґсимпатийЄ и ґантипатийЄ возникает в задачах экономической динамики и может быть вызвана перспективой объединения в коалицию, личными симпатиями, текущими изменениями внешней экономической среды, появлением новых прогрессивных технологий.

Итак, далее считаем, что априори задан момент времени $t_1 \in (t_0, \vartheta)$, до которого (при $t \in [t_0, t_1)$) игрок 2 помогает первому и препятствует третьему, а при $t \in [t_1, \vartheta]$ второй, наоборот, препятствует первому и помогает третьему игрокам в осуществлении их целей.

Прежде чем перейти к определению решения игры (1.1) в указанных условиях, проведем преобразование функций выигрыша игроков. Именно с учетом дифференцируемости $\Phi_i(x)$

$$\begin{aligned}\Phi_i(x(\vartheta)) = \int_{t_0}^{\vartheta} \Big[\frac{d\Phi_i(x)}{dx}\Big]'_{x=x(t)} \frac{dx(t)}{dt} dt + \Phi_i(x(t_0)) = \\ = \Phi_i(x(\vartheta)) - \Phi_i(x_0) + \Phi_i(x(t_0)),\end{aligned} \qquad (1.5)$$

где $x(t)$ — упомянутое выше решение системы (1.2), а $\frac{d\Phi_i}{dx}$ — градиент функции $\Phi_i(x)$, штрих сверху означает операцию транспонирования. Получаем из (1.5) и (1.4)

$$J_i(U,t_0,x_0) =$$
$$= \int_{t_0}^{\vartheta} \Big\{ \Big[\frac{d\Phi_i}{dx}\Big]'_{x=x(t)} f\big(t,x(t),u[t]\big) + \bar{F}_i\big(t,x(t),u[t]\big) \Big\}\, dt +$$
$$+\Phi_i(x_0) = \int_{t_0}^{\vartheta} F_i\,(t,x(t),u[t])\; dt,$$

здесь

$$F_i(t,x,u) = \big[\frac{d\Phi_i}{dx}\big]' f(t,x,u) + \bar{F}_i(t,x,u) + \frac{\Phi_i(x_0)}{\vartheta - t_0}. \tag{1.6}$$

Далее, *во-первых*, будем считать, что функция выигрыша i-го игрока имеет интегральный вид

$$J_i(U,t_0,x_0) = \int_{t_0}^{\vartheta} F_i(t,x(t),u[t])dt \quad (i=1,2,3),$$

где скалярная функция $F_i(t,x,u)$ определена в(1.6). Кроме того, представим функцию выигрыша i-го игрока в виде суммы

$$J_i(U,t_0,x_0) = J_i^{(1)}(U,t_0,x_0) + J_i^{(2)}(U,t_0,x_0),$$

здесь

$$\begin{aligned} J_i^{(1)}(U,t_0,x_0) &= \int_{t_0}^{t_1} F_i(t,x(t),u[t])\, dt, \\ J_i^{(2)}(U,t_0,x_0) &= \int_{t_1}^{\vartheta} F_i(t,x(t),u[t])\, dt, \quad (i=1,2,3). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Причем при построении функционалов $J_i^{(2)}(\cdot)$ будем считать, что начальное значение $x(t_1)$ решения $x(t)$ системы (1.2) (при $t \in [t_1,\vartheta]$) совпадает с правым концом решения $x(t)$ этой же системы при $t \in [t_0,t_1]$ (напомним, что решение $x(t)$ системы (1.2) порождено выбранными игроками стратегиями, образующими ситуацию $U = (U_1,U_2,U_3) \div u(t,x) = \big(u_1(t,x),u_2(t,x),u_3(t,x)\big)$.

Во-вторых, при формализации решения игры (1.1) будем также использовать сужения множества стратегий i-го игрока $\mathbf{U}_i$ на $[t_0, t_1)$ и на $[t_1, \vartheta]$, которые обозначим $\mathbf{U}_1^{(1)}$ и $\mathbf{U}_i^{(2)}$ соответственно $(i = 1, 2, 3)$. Итак, применяем далее множества

$$\begin{gathered}
\mathbf{U}_i^{(1)} = \{U_i^{(1)} \div u_i^{(1)}(t,x) | u_i^{(1)}(t,x) = Q_i^{(1)}(t)x + q_i^{(1)}(t) \\
\forall\, Q_i^{(1)}(\cdot) \in C_{n_i \times n}^{(k)}[0, t_1], \quad q_i^{(1)}(\cdot) \in C_{n_i}^{(k)}[0, t_1]\}, \\
\mathbf{U}_i^{(2)} = \{U_i^{(2)} \div u_i^{(2)}(t,x) | u_i^{(2)}(t,x) = Q_i^{(2)}(t)x + q_i^{(2)}(t) \\
\forall\, Q_i^{(2)}(\cdot) \in C_{n_i \times n}^{(k)}[t_1, \vartheta], \quad q_i^{(2)}(\cdot) \in C_{n_i}^{(k)}[t_1, \vartheta]\}, \\
\mathbf{U}^{(1)} = \prod_{i=1}^{3} \mathbf{U}_i^{(1)}, \quad \mathbf{U}^{(2)} = \prod_{i=1}^{3} \mathbf{U}^{(2)}.
\end{gathered} \tag{1.8}$$

Тогда любая пара стратегий $(U_i^{(1)}, U_i^{(2)})$ такова, что $U_i = (U_i^{(1)}, U_i^{(2)}) \in \mathbf{U}_i \quad (i = 1, 2)$. Подчеркнем, что стратегии $U_i^{(1)}$ определены лишь при $t \in [0, t_1)$, а $U_i^{(2)}$ — при $t \in [t_1, \vartheta]$.

В-третьих, будем считать, что стратегии $U_i \div u_i(t,x)$ таковы, что разрывы (по t) компонент вектор-функций $u_i(t,x)$ $(i = 1, 2, 3)$ могут происходить лишь в одной точке t_1 — момента переключения интересов второго игрока; фактически это означает, что элементы матриц $Q_i(t)$ и компоненты $q_i(t)$ всюду на $[0, \vartheta]$ предполагаются непрерывными за исключением, может быть, точки t_1, где могут иметь разрывы лишь первого рода.

2. Формализация равновесного решения

Предлагаемое здесь определение находится на стыке понятий равновестности по Нэшу (из теории бескоалиционных игр [1]) и векторных оптимумов (из теории многокритериальных задач [2]).

При формализации решения игры (1.1) будем исходить из трех обстоятельств.

Во-первых, игра разбивается на два периода, первый продолжается от начального момента t_0 до t_1, второй — от t_1 до момента окончания игры ϑ. На обоих периодах каждый из трех игроков за счет выбора своей стратегии стремится к возможно большему своему выигрышу к концу периода. Кроме того, ґправилами игрыЄ априори требуется учитывать, чтобы на первом периоде второй игрок ґпомогалЄ первому и ґмешалЄ третьему, а на втором периоде наоборот — первому препятствовал в достижении его цели, а третьему помогал.

Во-вторых, оба периода ґсвязаныЄ указанным выше одним и тем же решением $x(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, системы (1.2), причем правый конец $x(t_1)$ этого решения на первом периоде определяет начальную позицию $(t_1, x(t_1))$ во втором.

В-третьих, для любых двух стратегий i-го игрока $U_i^{(p)} \in \mathbf{U}_i^{(p)}$ $(p = 1, 2)$ стратегия

$$U_i = \begin{cases} U_i^{(1)} & \text{при } t \in [t_0, t_1), \\ U_i^{(2)} & \text{при } t \in [t_1, \vartheta] \end{cases}$$

должна удовлетворять включению $U_i \in \mathbf{U}_i \quad (i = 1, 2, 3)$.

В следующем определении будем использовать вектор $J = (J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3$ и обозначения(1.6)–(1.8).

О п р е д е л е н и е 2.1. Ситуацию $U^* \in \mathbf{U}$ назовем t_1-*равновесной* в дифференциальной игре (1.1), если при любом выборе начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, t_1) \times \mathbb{R}^n$

1) выполнены четыре равенства

$$\begin{gathered}
\max_{U_1^{(1)} \in \mathbf{U}_1^{(1)}} J_1^{(1)}(U_1^{(1)}, U_2^*, U_3^*, t_0, x_0) = J_1^{(1)}(U^*, t_0, x_0), \\
\max_{U_1^{(2)} \in \mathbf{U}_1^{(2)}} J_1^{(2)}(U_1^{(2)}, U_2^*, U_3^*, t_1, x(t_1)) = J_1^{(2)}(U^*, t_1, x(t_1)), \\
\max_{U_3^{(1)} \in \mathbf{U}_3^{(1)}} J_3^{(1)}(U_1^*, U_2^*, U_3^{(1)}, t_0, x_0) = J_3^{(1)}(U^*, t_0, x_0), \\
\max_{U_3^{(2)} \in \mathbf{U}_3^{(2)}} J_3^{(2)}(U_1^*, U_2^*, U_3^{(2)}, t_1, x(t_1)) = J_3^{(2)}(U^*, t_1, x(t_1));
\end{gathered} \tag{2.1}$$

2) на первом периоде $[t_0, t_1]$ при каждом $U_2 \in \mathbf{U}_2$ несовместна система неравенств

$$\begin{aligned}
&J_1^{(1)}(U_1^*, U_2^{(1)}, U_3^*, t_0, x_0) > J_1^{(1)}(U^*, t_0, x_0),\\
&J_2^{(1)}(U_1^*, U_2^{(1)}, U_3^*, t_0, x_0) > J_2^{(1)}(U^*, t_0, x_0),\\
&J_3^{(1)}(U_1^*, U_2^{(1)}, U_3^*, t_0, x_0) < J_3^{(1)}(U^*, t_0, x_0),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

на втором периоде $[t_1, \vartheta]$ несовместна при $\forall\, U_2^{(2)} \in \mathbf{U}_2^{(2)}$ система

$$\begin{aligned}
&J_1^{(2)}(U_1^*, U_2^{(2)}, U_3^*, t_1, x(t_1)) < J_1^{(2)}(U^*, t_1, x(t_1)),\\
&J_2^{(2)}(U_1^*, U_2^{(2)}, U_3^*, t_1, x(t_1)) > J_2^{(2)}(U^*, t_1, x(t_1)),\\
&J_3^{(2)}(U_1^*, U_2^{(2)}, U_3^*, t_1, x(t_1)) > J_3^{(2)}(U^*, t_1, x(t_1)).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

В (2.1)– (2.3) n-вектор $x(t_1)$ есть значение (при $t = t_1$) решения $x(t)$ системы (1.2) при $u_i = u_i^*(t, x)$ $(i = 1, 2, 3)$, где стратегии $U_i^* \div u_i^*(t, x)$ $(i = 1, 2, 3)$ фигурируют в определении (2.1).

З а м е ч а н и е 2.1. *a*) равенства (2.1) определяют равновесную по Нэшу ситуацию $(U_1^*, U_3^*) \in \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_3$ в каждой из двух бескоалиционных игр

$$\begin{aligned}
&\langle \{1, 3\}, \Sigma(U_2 = U_2^*), \{\mathbf{U}_1^{(1)}, \mathbf{U}_3^{(1)}\}, \{J_l(U_1^{(1)}, U_2^*, U_3^{(1)}, t_0, x_0)\}_{l=1,3}\rangle,\\
&\langle \{1, 3\}, \Sigma(U_2 = U_2^*), \{\mathbf{U}_1^{(2)}, \mathbf{U}_3^{(2)}\}, \{J_l(U_1^{(2)}, U_2^*, U_3^{(2)}, t_1, x_1)\}_{l=1,3}\rangle
\end{aligned}$$

(где $x_1 = x(t_1)$), которые получаем из (1.1), фиксируя стратегию 2-го игрока $U_2 \div U_2^* \in \mathbf{U}_2$, $U_2^* \div u_2^*(t, x)$; одновременно с тем множества $\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_l^{(1)}$ и $\mathbf{U}_l^{(2)}$, определенные в (1.8), таковы, что, например, ($x_1 = x(t_1)$)

$$\begin{aligned}
&\max_{U_1^{(1)} \in \mathbf{U}_1^{(1)}} J_1^{(1)}(U_1^{(1)}, U_2^*, U_3^*, t_0, x_0) + \max_{U_1^{(2)} \in \mathbf{U}_1^{(2)}} J_1^{(2)}(U_1^{(2)}, U_2^*, U_3^*, t_1, x_1) =\\
&\quad = J_1^{(1)}((U_1^{(1)})^*, U_2^*, U_3^*, t_0, x_0) + J_1^{(2)}((U_1^{(2)})^*, U_2^*, U_3^*, t_1, x_1) =\\
&\quad = \max_{U_1 \in \mathbf{U}_1} J_1(U_1, U_2^*, U_3^*, t_0, x_0) = J_1(U_1^*, U_2^*, U_3^*, t_0, x_0);
\end{aligned} \tag{2.4}$$

здесь учтено, что стратегия

$$U_1^* = \begin{cases} (U_1^{(1)})^* & \text{при } t \in [t_0, t_1), \\ (U_1^{(2)})^* & \text{при } t \in [t_1, \vartheta] \end{cases}$$

является элементом множества $\mathbf{U}_1$.

Аналогично строится стратегия $U_3^* \in \mathbf{U}_3$, удовлетворяющая

$$\max_{U_3 \in \mathbf{U}_3} J_3(U_1^*, U_2^*, U_3, t_0, x_0) = J_3(U^*, t_0, x_0).$$

Равенства (2.3) и (2.4) означают, что пара $(U_1^*, U_3^*) \in \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_3$ является ситуацией равновесия по Нэшу в бескоалиционной игре двух лиц

$$\left\langle \{1,3\}, \Sigma(U_2 = U_2^*), \{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_3\}, \{J_l(U_1, U_2^*, U_3, t_0, x_0)\}_{l=1,3} \right\rangle,$$

которую получаем из (1.1), фиксируя стратегию $U_2 = U_2^*$;

b) с учетом, что третье соотношение в (2.2) (первое в (2.3)) эквивалентно

$$-J_3^{(1)}(U_1^*, U_2^{(1)}, U_3^*, t_0, x_0) > -J_3^{(1)}(U^*, t_0, x_0)$$

(соответственно

$$-J_1^{(2)}(U_1^*, U_2^{(2)}, U_3^*, t_1, x(t_1)) > -J_1^{(2)}(U^*, t_1, x(t_1)))$$

несовместность неравенств (2.2) определяет максимальную по Слейтеру (слабо эффективную) альтернативу $(U_2^{(1)})^*$ в трехкритериальной динамической задаче

$$\Big\langle \Sigma(U_1 = U_1^*, U_3 = U_3^*), \mathbf{U}_2^{(1)}, \big\{ J_1^{(1)}(U_1^*, U_2, U_3^*, t_0, x_0),$$
$$J_2^{(1)}(U_1^*, U_2, U_3^*, t_0, x_0), -J_3^{(1)}(U_1^*, U_2, U_3^*, t_0, x_0) \big\} \Big\rangle,$$

которую получаем из (1.1), фиксируя стратегии $U_1 = U_1^*$, $U_1^* \div u_1^*(t,x)$, $U_3 = U_3^*$, $U_3^* \div u_3^*(t,x)$ и ограничивая время от t_0

до t_1. Аналогично несовместность системы (2.3) определяет максимальную по Слейтеру альтернативу $(U_2^{(2)})^*$ в трехкритериальной задаче

$$\Big\langle \Sigma(U_1 = U_1^*, U_3 = U_3^*), \mathbf{U}_2^{(2)}, \big\{ -J_1^{(2)}(U_1^*, U_2, U_3^*, t_1, x(t_1)),$$
$$J_2(U_1^*, U_2, U_3^*, t_1, x(t_1)), J_3(U_1^*, U_2, U_3^*, t_1, x(t_1)) \big\} \Big\rangle,$$

которую также получаем из (1.1), фиксируя $U_1 = U_1^*$, $U_3 = U_3^*$, ограничивая время от t_1 до ϑ, а в качестве начальной позиции выбирая $(t_1, x(t_1))$, где $x(t_1)$ — правый конец траектории $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, системы (1.2), порожденный ситуацией $U = U^* = (U_1^*, U_2^*, U_3^*)$. Причем $(U_2^{(1)})^*$ есть сужение стратегии U_2^* на $[t_0, t_1]$, а $(U_2^{(2)})^*$ — сужение U_2^* на $[t_1, \vartheta]$.

Фактически условия 1) и 2) определения (2.1) формализуют некоторую модификацию ситуации равновесия по Нэшу (составленную с учетом перемены отношений игрока 2 к своим партнерам в момент времени t_1).

З а м е ч а н и е 2.2. Используя в определении (2.1) вместо оптимума по Слейтеру другие понятия векторного оптимума (по Парето, по Борвейну, по Джоффриону или **A**-оптимум), получаем цепочку связанных между собой понятий t_1-равновесных ситуаций игры (1.1).

3. Достаточные условия

При построении достаточных условий существования t_1-равновесия игры (1.1) будем применять,

во-первых, достаточные условия оптимума по Слейтеру (из теории многокритериальных задач),

во-вторых, подходящее распространение метода динамического програмирования (из теории оптимального управления) на бескоалиционные дифференциальные трех лиц игры из [3].

Далее используем обозначения:

$$
\begin{aligned}
I_1^{(p)} &= J_1^{(p)},\\
I_2^{(1)} &= \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 - \alpha_3 J_3,\\
I_2^{(2)} &= -\beta_1 J_1 + \beta_2 J_2 + \beta_3 J_3,\\
I_3^{(p)} &= J_3^{(p)} \quad (p = 1, 2),
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где постоянные векторы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbf{A}$, множество

$$
\mathbf{A} = \Big\{ \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \gamma_m = \mathrm{const} \geqslant 0 \\
(m = 1, 2, 3) \wedge \sum_{m=1}^{3} \gamma_m > 0 \Big\}.
\tag{3.2}
$$

Из работы [2, с.71] следует

У т в е р ж д е н и е 3.1. *a) если существуют* $\alpha \in \mathbf{A}$ *и* $(U_2^{(1)})^* \in \mathbf{U}_2^{(1)}$ *такие, что*

$$
\max_{U_2^{(1)} \in \mathbf{U}_2^{(1)}} I_2^{(1)}(U_1^*, U_2^{(1)}, U_3^*, t_0, x_0) = I_2^{(1)}(U_1^*, (U_2^{(1)})^*, U_3^*, t_0, x_0),
$$

то стратегия $(U_2^{(1)})^*$ *является максимальной по Слейтеру в трехкритериальной динамической задаче*

$$
\Big\langle \Sigma(U_1 = U_1^*, U_3 = U_3^*), \mathbf{U}_2^{(1)}, \big\{ J_1^{(1)}(U_1^*, U_2^{(1)}, U_3^*, t_0, x_0), \\
J_2^{(1)}(U_1^*, U_2^{(1)}, U_3^*, t_0, x_0),\ -J_3^{(1)}(U_1^*, U_2^{(1)}, U_3^*, t_0, x_0) \big\} \Big\rangle,
$$

то есть несовместна система неравенств (2.2) *при любых* $U_2^{(1)} \in \mathbf{U}_2^{(1)}$*;*

b) если существуют $\beta \in \mathbf{A}$ *и* $(U_2^{(2)})^* \in \mathbf{U}_2^{(2)}$ *такие, что*

$$
\max_{U_2^{(2)} \in \mathbf{U}_2^{(2)}} I_2^{(2)}(U_1^*, U_2^{(2)}, U_3^*, t_1, x(t_1)) = I_2^{(2)}(U_1^*, (U_2^{(2)})^*, U_3^*, t_1, x(t_1)),
$$

то несовместна система неравенств (2.3) *при любых* $U_2^{(2)} \in \mathbf{U}_2^{(2)}$. *Здесь использованы множество* $\mathbf{A}$ *и функционалы* $I_2^{(p)}$ $(p = 1, 2)$, *определенные в* (3.2) *и* (3.1) *соответственно.*

Рассмотрим теперь две вспомогательные игры трех лиц:

$$\big\langle \{1,2,3\}, \Sigma, \{\mathbf{U}_i^{(1)}\}_{i=1,2,3}, \{I_i^{(1)}(U, t_0, x_0)\}_{i=1,2,3} \big\rangle, \tag{3.3}$$

$$\big\langle \{1,2,3\}, \Sigma, \{\mathbf{U}_i^{(2)}\}_{i=1,2,3}, \{I_i^{(2)}(U, t_1, x(t_1))\}_{i=1,2,3} \big\rangle. \tag{3.4}$$

В этих играх Σ то же, что в (1.1), $\mathbf{U}_i^{(p)}$, $I_i^{(p)}$ определены в (1.8) и (3.1), и игрок i выбирает свою стратегию $U_i^{(p)} \in \mathbf{U}_i^{(p)}$ $(i = 1, 2, 3)$ с целью, чтобы в сложившейся в результате ситуации $U^{(p)} = (U_1^{(p)}, U_2^{(p)}, U_3^{(p)})$ его выигрыш, определяемый значением функционала $I_i^{(p)}(\cdot)$, стал возможно большим $(p = 1, 2)$. Ситуация равновесия по Нэшу $(U^{(1)})^*$ в игре (3.3) определяется равенствами $(i = 1, 2, 3)$

$$\max_{U_i^{(1)} \in \mathbf{U}_i^{(1)}} I_i((U^{(1)})^* \| U_i^{(1)}, t_0, x_0) = I_i((U^{(1)})^*, t_0, x_0), \tag{3.5}$$

а в игре (3.4) ситуация равновесия $(U^{(2)})^*$ формализуется равенствами $(i = 1, 2, 3)$

$$\max_{U_i^{(2)} \in \mathbf{U}_i^{(2)}} I_i((U^{(2)})^* \| U_i^{(2)}, t_1, x(t_1)) = I_i((U^{(2)})^*, t_1, x(t_1)). \tag{3.6}$$

Здесь применено бытующее в теории бескоалиционных игр обозначение $(U^* \| U_i) = (U_1^*, \ldots, U_{i-1}^*, U_i, U_{i+1}^*, \ldots, U_3^*)$.

Из определения (2.1) и утверждения 3.1 следует

Утверждение 3.2. *Если для игры* (3.3) (*для* (3.4)) *найдена ситуация равновесия по Нэшу* $(U^{(1)})^*$ (*соответственно* $(U^{(2)})^*$), *то* t_1*-равновесная ситуация игры* (1.1) *– имеет вид*

$$U^* = (U_1^*, U_2^*, U_3^*) = \begin{cases} U^{(1)*} & \text{\textit{при}} \;\; t \in [t_0, t_1), \\ U^{(2)*} & \text{\textit{при}} \;\; t \in [t_1, \vartheta], \end{cases}$$

здесь $\big(U^{(p)*}\big) = \big((U_1^{(p)*}), (U_2^{(p)*}), (U_3^{(p)*})\big)$ $(p = 1, 2)$, *а*

$$U_i^{(p)*} = \begin{cases} U_i^{(1)*} & \textit{при} \;\; t \in [t_0, t_1), \\ U_i^{(2)*} & \textit{при} \;\; t \in [t_1, \vartheta] \quad (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Итак, задача построения ситуации t_1-равновесия игры (1.1) свелась к построению ситуации равновесия по Нэшу $(U^{(1)})^*$ и $(U^{(2)})^*$ для игр (3.3) и (3.4) соответственно. Для нахождения $(U^{(1)})^*$, $(U^{(2)})^*$ воспользуемся соответствующим вариантом динамического программирования из [3].

Введем функции:

$$\begin{gathered} W_j^{(p)}\big(t, x, u, V_j^{(p)}\big) = \frac{\partial V_j^{(p)}}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_j^{(p)}}{\partial x}\right]' f(t, x, u) + \\ + F_j(t, x, u), \quad (j = 1, 3; p = 1, 2), \\ W_2^{(1)}\big(t, x, u, V_2^{(1)}\big) = \frac{\partial V_2^{(1)}}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_2^{(1)}}{\partial x}\right]' f(t, x, u) + \\ + \alpha_1 F_1(t, x, u) + \alpha_2 F_2(t, x, u) - \alpha_3 F_3(t, x, u), \\ W_2^{(2)}\big(t, x, u, V_2^{(2)}\big) = \frac{\partial V_2^{(2)}}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_2^{(2)}}{\partial x}\right]' f(t, x, u) - \\ - \beta_1 F_1(t, x, u) + \beta_2 F_2(t, x, u) + \beta_3 F_3(t, x, u) \end{gathered} \tag{3.7}$$

и обозначим

$$V = \begin{cases} \big(V_1^{(1)}, V_2^{(1)}, V_3^{(1)}\big) = V^{(1)} & \text{при} \;\; t \in [t_0, t_1), \\ \big(V_1^{(2)}, V_2^{(2)}, V_3^{(2)}\big) = V^{(2)} & \text{при} \;\; t \in [t_1, \vartheta]. \end{cases}$$

У т в е р ж д е н и е 3.3. *Пусть существуют*

1) *вектор-функции*

$$u^{(1)}(t, x, V) = \big(u_1^{(1)}(t, x, V), u_2^{(1)}(t, x, V), u_3^{(1)}(t, x, V)\big),$$

определенные при $t \in [0, t_1]$, *а также*

$$u^{(2)}(t, x, V) = \big(u_1^{(2)}(t, x, V), u_2^{(2)}(t, x, V), u_3^{(2)}(t, x, V)\big),$$

определенные при $t \in [t_1, \vartheta]$ *;*

2) *постоянные векторы* $\alpha, \beta \in \mathbf{A}$,

3) *непрерывно дифференцируемые на* $(-\delta, t_1+\delta) \times \mathbb{R}^n$ *скалярные функции* $V_i^{(1)}(t,x)$ $(i=1,2,3)$ *и непрерывно дифференцируемые на* $(t_1-\delta, \vartheta+\delta)$ *скалярные функции* $V_i^{(2)}(t,x)$ $(i=1,2,3)$, *где* δ *— сколь угодно малое положительное число, такие, что*

a) *при всех* $x \in \mathbb{R}^n$

$$V_i^{(2)}(\vartheta,x)=0,\ V_i^{(1)}(t_1,x)=V_i^{(2)}(t_1,x)\ (i=1,2,3); \tag{3.8}$$

b) *для любых* $t \in [t_1,\vartheta]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $V \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
&\max_{u_1} W_1^{(2)}(t,x,u_1,u_2^{(2)}(t,x,V),u_3^{(2)}(t,x,V),V_1^{(2)}) =\\
&\qquad = W_1^{(2)}(t,x,u^{(2)}(t,x,V),V_1^{(2)}),\\
&\max_{u_2} W_2^{(2)}(t,x,u_1^{(2)}(t,x,V),u_2,u_3^{(2)}(t,x,V),V_2^{(2)}) =\\
&\qquad = W_2^{(2)}(t,x,u^{(2)}(t,x,V),V_2^{(2)}),\\
&\max_{u_3} W_3^{(2)}(t,x,u_1^{(2)}(t,x,V),u_2^{(2)}(t,x,V),u_3,V_3^{(2)}) =\\
&\qquad = W_3^{(2)}(t,x,u^{(2)}(t,x,V),V_3^{(2)});
\end{aligned} \tag{3.9}$$

при каждых $t \in [0,t_1)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $V \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
&\max_{u_1} W_1^{(1)}(t,x,u_1,u_2^{(1)}(t,x,V),u_3^{(1)}(t,x,V),V_1^{(1)}) =\\
&\qquad = W_1^{(1)}(t,x,u^{(1)}(t,x,V),V_1^{(1)}),\\
&\max_{u_2} W_2^{(1)}(t,x,u_1^{(1)}(t,x,V),u_2,u_3^{(1)}(t,x,V),V_2^{(1)}) =\\
&\qquad = W_2^{(1)}(t,x,u^{(1)}(t,x,V),V_2^{(1)}),\\
&\max_{u_3} W_3^{(1)}(t,x,u_1^{(1)}(t,x,V),u_2^{(1)}(t,x,V),u_3,V_3^{(1)}) =\\
&\qquad = W_3^{(1)}(t,x,u^{(1)}(t,x,V),V_3^{(1)});
\end{aligned} \tag{3.10}$$

c) при любых $t \in [0, t_1)$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$W_i^{(1)}(t, x, u^{(1)}(t, x, V(t, x)), V_i^{(1)}(t, x)) \equiv 0 \ (i = 1, 2, 3),$$

а при $t \in [t_1, \vartheta]$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$W_i^{(2)}(t, x, u^{(2)}(t, x, V(t, x)), V_i^{(2)}(t, x)) \equiv 0 \ (i = 1, 2, 3);$$

d) вектор-функции $u_i^{(p)}(t, x, V(t, x)) = (u_i^{(p)}(t, x))^*$ *такие, что* $(U_i^{(p)})^* \in \mathbf{U}_i^{(p)}$, *где* $(U_i^{(p)})^* \div (u_i^{(p)}(t, x))^*$ $(p = 1, 2; i = 1, 2, 3)$.

Тогда ситуация

$$U^* = \begin{cases} \left((U_1^{(1)})^*, (U_2^{(1)})^*, (U_3^{(1)})^*\right) & \textit{при} \ \ t \in [t_0, t_1), \\ \left((U_1^{(2)})^*, (U_2^{(2)})^*, (U_3^{(2)})^*\right) & \textit{при} \ \ t \in [t_1, \vartheta) \end{cases} \tag{3.11}$$

является t_1*-равновесной для дифференциальной игры* (1.1) *при любом выборе начальной позиции* $(t_0, x_0) \in [0, t_1) \times \mathbb{R}^n$.

З а м е ч а н и е 3.1. Утверждение 3.1 позволяет сформулировать следующий способ построения t_1-равновесной ситуации дифференциальной бескоалиционной игры (1.1).

Шаг 1. По функциям выигрыша (1.4) построить функции (1.6), функционалы (1.7) и (3.1).

Шаг 2. С помощью (3.7) выписать явный вид функций $W_i^{(p)}(t, x, u, V_i^{(p)})$ $(i = 1, 2, 3; p = 1, 2)$.

Шаг 3. Из (3.9) и (3.10) найти $u_i^{(p)}(t, x, V)$ $(i = 1, 2, 3; p = 1, 2)$.

Шаг 4. Найти решения $V_i^{(p)}(t, x)$ системы уравнений с частными производными

$$W_i^{(p)}(t, x, u^{(p)}(t, x, V), V_i^{(p)}) = 0 \ (i = 1, 2, 3; p = 1, 2)$$

с граничными условиями (3.8).

Шаг 5. Убедиться в выполнении условия d) утверждения 3.3.

Тогда ситуация U^* из (3.11) будет t_1-равновесной в игре (1.1).

Для случая, когда система (1.2) линейна (по x, u_1, u_2, u_3), а функции $\Phi_i(x)$ и $\bar{F}_i(t, x, u_1, u_2, u_3)$ линейно-квадратичны по тем же переменным, автором получены ограничения на коэффициенты, при которых существует t_1-равновесная ситуация, а также (при выполнении этих ограничений) найден ее явный вид.

Автор благодарит профессора В. И. Жуковского за постановку задачи и замечания.

Список литературы

1. Воробьев Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.
2. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
3. Жуковский В. И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. М.: Международный НИИ проблем управления, 1997.