Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2005. Ґ2(32)

УДК 519.833.7

© **А.В. Аввакумов**
dewsha81@mail.ru

ГАРАНТИРОВАННЫЕ ПО ВЫИГРЫШАМ И РИСКАМ ДЕЛЕЖИ В КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЕ [1]

Ключевые слова: кооперативная игра без побочных платежей, риск, гарантированный делёж, неопределённость

Abstract. The formalization of guaranteed division by result and risk in the cooperative game when some uncertainty was realised and without the incidental payments, moreover there are supposed only scope of changes are known about the uncertainty, but any static characteristics are undefined.

1. Постановка задачи

Рассматрим кооперативную игру двух лиц без побочных платежей и при неопределённости

$$\langle \{1,2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, Y, \{f_i(x,y)\}_{i=1,2} \rangle \,. \tag{1.1}$$

В игре (1.1) участвуют два игрока: первый и второй; каждый из них выбирает свою стратегию $x_i \in X_i \subseteq R^{n_i}$ $(i = 1,2)$, в результате образуется ситуация

$$x = (x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2 \subseteq R^n \ (n = n_1 + n_2);$$

независимо от их выбора в игре реализуется неопределённость $y \in Y \subseteq R^m$; на образовавшихся таким образом парах $(x,y) \in X \times Y$ определена *функция выигрыша i-го игрока*

[1]Работа поддержана грантом РФФИ

$f_i(x,y)$ $(i = 1,2)$, значение которой на конкретной паре (x,y) называется *выигрышем* i*-го игрока* в ситуации $x \in X$ и при неопределённости $y \in Y$.

Введём (согласно требованиям экономистов) функции риска. Учитывая ґкооперативный характерЄ игры (1.1), рассмотрим двухкритериальную задачу (для каждой неопределённости $y \in Y$):

$$\langle X, \{f_i(x,y)\}_{i=1,2} \rangle , \tag{1.2}$$

которую получим из (1.1), фиксируя $y \in Y$.

Ситуация $x^*(y) \in X$ $\forall y \in Y$ называется *максимальной по Слейтеру* (*слабо эффективной*) в задаче (1.2), если при любых $x \in X$ и для каждого $y \in Y$ несовместна система неравенств

$$f_i(x,y) > f_i(x^*(y),y) \; (i = 1,2). \tag{1.3}$$

У т в е р ж д е н и е 1.1. *Если в игре* (1.1)
1) *множества* X_i $(i = 1,2)$ *— выпуклые компакты, а* Y *есть компакт;*
2) *функции выигрыша* $f_i(x,y)$ $(i = 1,2)$ *строго вогнуты по* $x \in X$ *при каждом* $y \in Y$ *и непрерывны на* $X \times Y$,
то многозначное отображение $X^S[y] : Y \to X$, *определяемое несовместностью системы неравенств* (1.3), *имеет непрерывный селектор* $x^*(y) \in X^S[y] \; \forall y \in Y.$

З а м е ч а н и е 1.1. Можно указать и другие достаточные условия существования непрерывного селектора $x^*(y)$. Далее, не оговаривая особо, считаем, что используемая вектор-функция $x^*(y)$ имеет непрерывные компоненты на Y.

Функцию риска $\Phi_i(x,y)$ для критерия $f_i(x,y)$ введём (следуя идее принципа минимаксного сожаления Сэвиджа [1]) в виде

$$\Phi_i(x,y) = f_i(x^*(y),y) - f_i(x,y) \; (i = 1,2). \tag{1.4}$$

Функция $\Phi_i(x,y)$ численно оценивает риск (сожаление) i-го игрока о том, что при неопределённости $y \in Y$ он (согласованно с партнёром) выбрал свою стратегию из ситуации x , а не из $x^*(y)$, хотя последняя и доставляет векторный максимум в задаче (1.2).

У т в е р ж д е н и е 1.2. *Если в* (1.1) *функции выигрыша* $f_i(x,y)$ *непрерывны на* $X \times Y$ *и* $x^*(y)$ *непрерывны на* Y , *то функции риска* $\Phi_i(x,y)$, *определённые в* (1.4), *непрерывны.*

В ряде статей по экономике требуется, чтобы игроки ориентировались на возможно *большие* выигрыши и одновременно на возможно *меньшие* риски. Учитывая это, игре (1.1) поставим в соответствие вспомогательную кооперативную игру при неопределённости

$$\langle \{1,2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, Y, \{f_i(x,y), -\Phi_i(x,y)\}_{i=1,2} \rangle \,. \qquad (1.5)$$

В (1.5) множества X_i, Y и функции $f_i(x,y)$ те же, что в (1.1). Отличие лишь в том, что функция выигрыша i -го игрока в игре (1.5) стала векторной $(f_i(x,y), -\Phi_i(x,y))$, причем вторая компонента $-\Phi_i(x,y)$ специально взята со знаком ґминусЄ. В игре (1.5) каждый игрок i за счёт выбора своей стратегии $x_i \in X_i$ стремится к возможно большим значениям одновременно обеих компонент $f_i(x,y)$ и $-\Phi_i(x,y)$ своей функции выигрыша $(f_i(x,y), -\Phi_i(x,y))$ $(i = 1,2)$. При этом,
во-первых, игроки вынуждены учитывать возможность реализации любой неопределённости $y \in Y$ (им известно лишь само множество Y);
во-вторых, игрокам разрешены любые переговоры о выборе совместной ситуации $x \in X$;
в-третьих, запрещено ґправилами игрыЄ уступать часть своего выигрыша партнёру (в этом и есть смысл ґигры без побочных платежейЄ).

2. Формализация гарантированных дележей

Для каждой функции выигрыша $f_i(x,y)$ $(i=1,2)$ и при каждой неопределённости $y \in Y$ введём максимины

$$\begin{aligned} f_1^0[y] &= \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} f_1(x_1,x_2,y), \\ f_2^0[y] &= \max_{x_2 \in X_2} \min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1,x_2,y). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Утверждение 2.1. ([2, с. 110]). *Если в игре* (1.1) *множества* X_i $(i=1,2), Y$ *суть компакты, а* $f_i(x,y)$ $(i=1,2)$ *непрерывны на* $X \times Y$, *то функции* $f_i^0[y]$ $(i=1,2)$ *из* (2.1) *непрерывны на* Y.

Далее фиксируем некоторую неопределённость $y = y^d \in Y$ и введём множество ситуаций $x \in X$, удовлетворяющих условию *индивидуальной рациональности* для функций выигрыша $f_i(x,y)$ $(i=1,2)$:

$$X(y^d) = \Big\{ x \in X | f_i(x,y^d) \geqslant f_i^0[y^d] \ (i=1,2) \Big\}. \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. *Имеет место*

$$\begin{aligned} -\Phi_1^0[y^d] &= \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} \big[-\Phi_1(x_1,x_2,y^d) \big] = f_1^0[y^d] - C_1[y^d], \\ -\Phi_2^0[y^d] &= \max_{x_2 \in X_2} \min_{x_1 \in X_1} \big[-\Phi_2(x_1,x_2,y^d) \big] = f_2^0[y^d] - C_2[y^d], \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $C_i[y^d] = f_i(x^*(y^d),y^d)(i=1,2)$.

В самом деле, из (1.4) получаем

$$\max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} \Big[-\Phi_1(x_1,x_2,y^d) \Big] =$$

$$= \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} \Big[-f_1(x^*(y^d),y^d) + f_1(x_1,x_2,y^d) \Big] =$$

$$= -C_1[y^d] + \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} f_1(x_1,x_2,y^d).$$

У т в е р ж д е н и е 2.2. *Если ситуация* $x \in X(y^d)$ *(множество* $X(y^d)$ *определено в* (2.2)), *то*

$$\begin{aligned} -\Phi_1(x,y^d) &\geqslant \max_{x_1\in X_1}\min_{x_2\in X_2}\left[-\Phi_1(x_1,x_2,y^d)\right], \\ -\Phi_2(x,y^d) &\geqslant \max_{x_2\in X_2}\min_{x_1\in X_1}\left[-\Phi_2(x_1,x_2,y^d)\right], \end{aligned} \tag{2.4}$$

и обратно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следует из (1.4), (2.3) и цепочки эквиваленций

$$\Big[x \in X(y^d)\Big] \Leftrightarrow \Big[x\in X | f_i(x,y^d) \geqslant f_i^0[y^d]\ (i=1,2)\Big] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Big[x\in X | f_i(x,y^d) - C_i[y^d] \geqslant f_i^0[y^d] - C_i[y^d]\ (i=1,2)\Big] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Big[x\in X | -\Phi_i(x,y^d) \geqslant -\Phi_i^0[y^d]\ (i=1,2)\Big].$$

З а м е ч а н и е 2.1. Неравенства (2.4) ґвырезаютЄ из множества X те ситуации x, которые удовлетворяют условию индивидуальной рациональности для ґминусЄ функций риска. Фактически утверждение 2.2 показало, что множество ситуаций, которые удовлетворяют условию индивидуальной рациональности как для функций выигрыша в игре (1.1), так и для ґминусЄ функций риска, совпадают между собой (вследствие специального вида функций риска (1.4)). Этот факт будет использован в следующем определении.

О п р е д е л е н и е 2.1. В кооперативной игре (1.1) (без побочных платежей и при неопределённости) ситуация $x^S \in X$ реализует гарантированный по выигрышам и рискам делёж $(f_1^S, f_2^S, \Phi_1^S,\ \Phi_2^S)$, если существует неопределённость $y_S \in Y$, для которой $f_i^S = f_i(x^S, y_S), \Phi_i^S = \Phi_i(x^S, y_S)$ $(i=1,2)$ и 1) неопределённость $y_S \in Y$ является минимальной по Слейтеру в четырёхкритериальной задаче

$$\left\langle Y, \{f_i(x^S,y), -\Phi_i(x^S,y)\}_{i=1,2}\right\rangle, \tag{2.5}$$

которую получаем из (1.5) при фиксированной ситуации $x = x^S$, (т.е. при любых $y \in Y$ несовместна система неравенств

$$f_i(x^S, y) < f_i^S,\ \Phi_i(x^S, y) > \Phi_i^S\ (i = 1, 2)); \tag{2.6}$$

2) ситуация $x^S \in X$ является максимальной по Слейтеру в задаче

$$\langle X(y_S), \{f_i(x, y_S), -\Phi_i(x, y_S)\}_{i=1,2}\rangle\,, \tag{2.7}$$

которую получаем из (1.5) при фиксированной неопределённости $y = y_S$ и заменой X на $X(y_S)$, где $X(y_S)$ удовлетворяет условию индивидуальной рациональности (2.2) для функций выигрыша $f_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ в игре (1.1) при $y^d = y_S$ (т.е. при любых $x \in X(y_S)$ несовместна система неравенств

$$f_i(x, y_S) > f_i^S,\ \Phi_i(x, y_S) < \Phi_i^S\ (i = 1, 2)). \tag{2.8}$$

При этом $f^S = (f_1^S, f_2^S)$ назовём гарантированным векторным выигрышем, $\Phi^S = (\Phi_1^S, \Phi_2^S)$ — гарантированным векторным риском, $F^S = (f_1^S, f_2^S, \Phi_1^S, \Phi_2^S)$ — гарантированным по выигрышам и рискам дележом игры (1.1), а тройку $(x^S, f^S, \Phi^S) \in X \times R^4$ — гарантированным по исходам и рискам решением кооперативной игры (1.1).

З а м е ч а н и е 2.2. а) предложенное здесь определение является аналогом седловой точки $(x^S, y_S) \in X \times Y$ скалярной функции $F(x, y)$, которая определяется цепочкой равенств

$$\min_{y \in Y} F(x^S, y) = F(x^S, y_S) = \max_{x \in X} F(x, y_S). \tag{2.9}$$

В самом деле, левое равенство в требовании 1) из определения 2.1 заменено на векторный минимум (по Слейтеру), а правое в 2) заменено на векторный максимум (также по Слейтеру). В определении можно было бы использовать и другие векторные оптимумы (по Парето, по Борвейну, по Джоффриону и А-оптимумы);

b) из требования 1) определения 2.1 получаем ґгарантирующий смыслЄ предлагаемого понятия. Он состоит в том, что из несовместности системы (2.6) следует: при реализации в игре любой неопределённости $y \in Y$ и применении игроками стратегий из ситуации x^S соответствующие выигрыши $f_i(x^S, y)$ не могут стать меньше f_i^S и одновременно соответствующие риски $\Phi_i(x^S, y)$ — больше Φ_i^S, то есть гарантированный векторный выигрыш f^S ограничивает снизу векторный выигрыш $f(x^S, y)$ для всех $y \in Y$, а гарантированный векторный риск Φ^S ограничивает сверху векторный риск $\Phi(x^S, y)$ при тех же неопределённостях $y \in Y$;

c) для построения гарантированного по выигрышам и рискам дележа достаточно построить пару $(x^S, y_S) \in X \times Y$, удовлетворяющую требованиям определения 2.1, а затем с помощью (x^S, y_S) уже найти $f_i^S = f_i(x^S, y_S)$, $\Phi_i^S = \Phi_i(x^S, y_S)$ $(i = 1, 2)$. Эту пару (x^S, y_S) будем дальше называть *седловой точкой по Слейтеру* для игры (1.5).

3. Достаточные условия

Введём функции

$$
\begin{aligned}
H_1(x, y, \alpha) &= \sum_{i=1}^{2} [f_i(x, y) - (1 - \alpha_i) f_i(x^*(y), y)], \\
H_2(x, y, \beta) &= -\sum_{i=1}^{2} [f_i(x, y) - (1 - \beta_i) f_i(x^*(y), y)],
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где $x^*(y)$ — непрерывная на Y вектор-функция, являющаяся максимальным по Слейтеру решением задачи (1.2) при любом $y \in Y$; постоянные $\alpha_i, \beta_i \in [0, 1]$ $(i = 1, 2)$.

Утверждение 3.1. *(Достаточные условия существования седловой точки (x^S, y_S).) Пусть существуют кон-*

станты $\alpha_i, \beta_i \in [0,1]$ $(i=1,2)$ *и пара* (x^S, y_S) *такие, что*

$$\begin{aligned} &\max_{x \in X(y_S)} H_1(x, y_S, \alpha) = H_1(x^S, y_S, \alpha), \\ &\max_{y \in Y} H_2(x^S, y, \beta) = H_2(x^S, y_S, \beta). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Тогда пара (x^S, y_S) *является седловой точкой по Слейтеру для игры* (1.5); *здесь множество ситуаций* $X(y_S)$ *(удовлетворяющих условию индивидуальной рациональности) определено в* (2.2), (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно работе [3, с.71] ситуация $x^S \in X(y_S)$ будет максимальной по Слейтеру в четырёхкритериальной задаче (2.5), если существуют постоянные $\alpha_i \in [0,1]$ $(i=1,2)$ такие, что

$$\max_{x \in X(y_S)} [\alpha_1 f_1(x, y_S) + \alpha_2 f_2(x, y_S) - (1-\alpha_1)\Phi_1(x, y_S) -$$

$$-(1-\alpha_2)\Phi_2(x, y_S)] = \mathrm{Idem}[x \to x^S].$$

Подставляя сюда явный вид функций риска $\Phi_i(x,y)$ $(i=1,2)$ из (1.4), получим, с учётом обозначений (3.1), первое равенство из (3.2). Справедливость второго равенства из (3.2) устанавливается аналогично.

З а м е ч а н и е 3.1. Введём вспомогательную бескоалиционную игру двух лиц

$$\langle \{\mathbf{I}, \mathbf{II}\}, \{X, Y\}, \{H_1(x,y,\alpha), H_2(x,y,\beta)\} \rangle \,. \tag{3.3}$$

В игре (3.3) игрок **I** за счёт выбора своей стратегии $x \in X$ (ситуации для игры (1.1)) стремится к возможно большему выигрышу (значению своей функции выигрыша $H_1(x,y,\alpha)$) при дополнительном ограничении $x \in X(y_S)$ (где $X(y_S)$ множество ситуаций $x \in X$ игры (1.1), удовлетворяющих условию индивидуальной рациональности (2.2) для функций выигрыша в игре (1.1) при $y^d = y_S$). Игрок **II** за счёт выбора своей стратегии $y \in Y$

(неопределённости в игре (1.1)) стремится к возможно большему значению своей функции выигрыша $H_2(x, y, \beta)$. Тогда равенства (3.2) определяют ситуацию равновесия по Нэшу (x^S, y_S) в бескоалиционной игре двух лиц (3.3) при дополнительном ограничении $x \in X(y_S)$. Заметим, что в (3.3) постоянные $\alpha_i, \beta_i \in [0, 1]$ и функции выигрыша $H_i(\cdot)$ $(i = 1, 2)$ определены в (3.1).

Описанный факт сведения задачи построения пары (x^S, y_S) к нахождению ситуации равновесия по Нэшу в игре (3.3) при ограничении $x \in X(y_S)$ может быть использован,
во-первых, при выявлении достаточных условий (в виде ограничений на элементы игры (1.1)), при которых существует гарантированный по выигрышам и рискам делёж;
во-вторых, при построении явного вида гарантированного решения для частных видов игры (1.1).

Дальше будет рассмотрен частый вид игры (1.1), для которой будет предложен конструктивный способ построения гарантированного дележа.

4. Игра с ґразделённымиЄ функциями выигрыша

Рассмотрим игру (1.1), где функции выигрыша игроков имеют вид

$$f_i(x, y) = \Psi_i(x) + \omega_i(y) \ (i = 1, 2), \tag{4.1}$$

то есть рассматриваем кооперативную игру двух лиц при неопределённости и без побочных платежей

$$\langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, Y, \{\Psi_i(x) + \omega_i(y)\}_{i=1,2} \rangle \,. \tag{4.2}$$

В игре (4.2) множество X_i стратегий x_i у i-го игрока и множество Y неопределённостей y те же, что в (1.1), отличие лишь в том, что функции выигрыша $f_i(x, y)$ ґразделеныЄ по ситуациям и неопределённостям, именно, имеют вид (4.1). Для игры (4.2) будем предполагать, не оговаривая специально, что выполнено

У с л о в и е 4.1. Множества X_i $(i = 1, 2)$ и Y суть непустые компакты, а скалярные функции $\Psi_i(x)$ $(\omega_i(y))$ $(i = 1, 2)$ непрерывны на $X = X_1 \times X_2$ (соответственно на Y).

Будем также использовать двухкомпонентные векторы

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2),\ \omega = (\omega_1, \omega_2).$$

Л е м м а 4.1. *При любых неопределённостях* $y \in Y$ *функция риска для функции выигрыша* $\Psi_i(x) + \omega_i(y)$ *имеет вид*

$$\Phi_i(x, y) = \Psi_i(x^*) - \Psi_i(x)\ (i = 1, 2), \tag{4.3}$$

где $x^* \in X^S$ *— множество максимальных по Слейтеру альтернатив* x^* *в двухкритериальной задаче*

$$\langle X, \Psi(x) \rangle\,. \tag{4.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задача (1.2), с учётом (4.1), примет вид

$$\langle X, \{f_i(x, y) = \Psi_i(x) + \omega_i(y)\}_{i=1,2} \rangle\,, \tag{4.5}$$

а максимальная по Слейтеру ситуация $x^*(y)$ для (4.5) определяется несовместностью (при каждом $y \in Y$) системы из двух неравенств

$$\Psi_i(x) + \omega_i(y) > \Psi_i(x^*(y)) + \omega_i(y)\ \forall x \in X\ (i = 1, 2),$$

что эквивалентно несовместности

$$\Psi_i(x) > \Psi_i(x^*(y))\ \forall x \in X\ (i = 1, 2).$$

Последнее означает, что, *во-первых*, $x^*(y)$ не зависит явно от y, *во-вторых*, x^* является максимальной по Слейтеру ситуацией в двухкритериальной задаче (4.4) (множество их в лемме 4.1 обозначено символом X^S). Исходя из (1.4), функция риска примет вид (4.3).

З а м е ч а н и е 4.1. Так как по условию 4.1 множество X является компактом в R^n, а $\Psi_i(x)$ $(i = 1, 2)$ непрерывны, то из работы [3, с. 142] следует, что множество X^S есть непустой компакт. В качестве x^* можно взять любую точку их X^S, но она должна быть одной и той же для обеих функций риска $\Phi_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$.

Перейдём к построению множества (2.2). Введём обозначения для максиминов Ψ_i^0 $(i = 1, 2)$ и максиминных стратегий x_i^0 $(i = 1, 2)$:

$$\begin{aligned} \Psi_1^0 &= \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} \Psi_1(x_1, x_2) = \min_{x_2 \in X_2} \Psi_1(x_1^0, x_2), \\ \Psi_2^0 &= \max_{x_2 \in X_2} \min_{x_1 \in X_1} \Psi_2(x_1, x_2) = \min_{x_1 \in X_1} \Psi_2(x_1, x_2^0). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Заметим, что из (4.6) получаем

$$\begin{aligned} \Psi_1^0 &\leqslant \Psi_1(x_1^0, x_2)\ \forall x_2 \in X_2, \\ \Psi_2^0 &\leqslant \Psi_2(x_1, x_2^0)\ \forall x_1 \in X_1. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Кроме того, согласно работе [2, с. 109] при выполнении условий 4.1 указанные в (4.4) максимины Ψ_i^0 и максиминные стратегии x_i^0 $(i = 1, 2)$ существуют.

Л е м м а 4.2. *Для любых неопределённостей $y \in Y$ множество (2.2) в игре (4.2) имеет вид*

$$X(y) = \bar{X} = \left\{x \in X | \Psi_i(x) \geqslant \Psi_i^0\ (i = 1, 2)\right\}, \tag{4.8}$$

при этом множество $\bar{X}$ является непустым компактом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество (2.2) для игры (4.2) преобразуется следующим образом:

$$X(y^d) = \Big\{x \in X | \Psi_i(x) + \omega_i(y^d) \geqslant \Psi_i^0 + \omega_i(y^d)\ (i = 1, 2)\Big\} =$$

$$= \left\{x \in X | \Psi_i(x) \geqslant \Psi_i^0\ (i = 1, 2)\right\} = \bar{X} \subseteq X.$$

Множество $\bar{X}$ не пусто, так как ситуация из максиминных стратегий $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ в (4.6) удовлетворяет неравенствам (в силу (4.7))

$$\Psi_i(x^0) \geqslant \Psi_i^0 \ (i = 1, 2),$$

и, следовательно, $x^0 \in \bar{X}$. Наконец, множество $\bar{X}$ замкнуто, согласно нестрогим неравенствам в (4.8). Так как $\bar{X} \subseteq X$, а X ограничено (что следует из компактности $X = X_1 \times X_2$), то и $\bar{X}$ ограничено. Из ограниченности, замкнутости и непустоты $\bar{X}$ получаем, что множество $\bar{X}$ из (4.8) есть непустой компакт.

Утверждение 4.1. *Если выполнены условия* 4.1, *то в игре* (4.2) *для всех* $y \in Y$ *существует ситуация* $x^S \in \bar{X}$, *реализующая гарантированный по выигрышам и рискам делёж*

$$\left(\Psi(x^S) + \omega(y), \Psi(x^*) - \Psi(x^S)\right);$$

здесь x^S *— максимальная по Слейтеру ситуация в двухкритериальной задаче* $\left\langle \bar{X}, \Psi(x) \right\rangle$, *множество* $\bar{X}$ *определено в* (4.6), (4.8), x^* *— максимальная по Слейтеру ситуация в задаче* $\langle X, \Psi(x) \rangle$.

Доказательство. Для игры (4.2) множество $X(y_S) = \bar{X}$ (лемма 4.2). Тогда, согласно требованию 1) определения 2.1, виду $f_i(x, y)$ из (4.1) и $\Phi_i(x, y)$ из (4.3), при всех $y \in Y$ несовместна система из четырёх неравенств

$$\begin{array}{l} \Psi_i(x^S) + \omega_i(y) < \Psi_i(x^S) + \omega_i(y_S), \\ \Psi_i(x^*) - \Psi_i(x^S) > \Psi_i(x^*) - \Psi_i(x^S) \ (i = 1, 2). \end{array} \tag{4.9}$$

Но вторая подсистема обращается в равенства, и поэтому система (4.9) несовместна при любых $y \in Y$ (в качестве y_S можно использовать любую неопределённость $y \in Y$).
Требование 2) определения 2.1 для игры (4.2) сводится к несовместности (при любых $x \in \bar{X}$) системы из четырёх неравенств

$$\begin{array}{l} \Psi_i(x) + \omega_i(y_S) > \Psi_i(x^S) + \omega_i(y_S), \\ \Psi_i(x^*) - \Psi_i(x) < \Psi_i(x^*) - \Psi_i(x^S) \ (i = 1, 2), \end{array}$$

что эквивалентно несовместности при любых $x \in \bar{X}$ системы из двух неравенств

$$\Psi_i(x) > \Psi_i(x^S) \ (i = 1, 2). \qquad (4.10)$$

В свою очередь, несовместность системы (4.10) при всех $x \in X$ означает, что x^S есть максимальная по Слейтеру ситуация в двухкритериальной задаче $\left\langle \bar{X}, \Psi(x) \right\rangle$. Вследствие компактности $\bar{X}$ (лемма 4.2), непрерывности компонент $\Psi_i(x)$ вектора $\Psi(x) = (\Psi_1(x), \Psi_2(x))$ и из работы [3, с. 142] следует, что такая ситуация $x^S \in \bar{X}$ существует.

З а м е ч а н и е 4.2. Из утверждения 4.1 получаем следующий способ построения гарантированного по выигрышам и рискам решения игры (4.2):

a) найти максимальную по Слейтеру ситуацию x^* в двухкритериальной задаче $\langle X, \{\Psi_i(x)\}_{i=1,2} \rangle$;

b) найти максимины

$$\Psi_1^0 = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} \Psi_1(x_1, x_2),$$
$$\Psi_2^0 = \max_{x_2 \in X_2} \min_{x_1 \in X_1} \Psi_2(x_1, x_2);$$

c) построить множество

$$\bar{X} = \left\{ x \in X | \Psi_i(x) \geqslant \Psi_i^0 \ (i = 1, 2) \right\},$$

это множество определяется пересечением

$$\Psi(\bar{X}) = \Psi(X) \bigcap \left\{ R^2_{\geqslant} + \Psi^0 \right\},$$

где $\Psi(M) = \bigcup\limits_{x \in M} \Psi(x), R^2_{\geqslant} = \{\Psi = (\Psi_1, \Psi_2) | \Psi_i \geqslant 0 \ (i = 1, 2)\}$, тогда $R^2_{\geqslant} + \Psi^0$ есть сдвиг первой четверти координатной плоскости R^2 в точку $\Psi^0 = (\Psi_1^0, \Psi_2^0)$;

d) найти максимальную по Слейтеру ситуацию x^S в двухкритериальной задаче $\left\langle \bar{X}, \{\Psi_i(x)\}_{i=1,2} \right\rangle$; для этого достаточно при каком-либо числе $\alpha \in [0, 1]$ решить оптимизационную задачу

$$\max_{x \in \bar{X}} [\alpha \Psi_1(x) + (1 - \alpha) \Psi_2(x)] = \alpha \Psi_1(x^S) + (1 - \alpha) \Psi_2(x^S),$$

заметим, что такой же приём (может быть, с другим числом $\beta \in [0,1]$) можно применить при построении x^* в а);

е) выписать явный вид гарантированного по выигрышам и рискам решения игры (4.2) по формуле

$$\big(x^S, \Psi(x^S) + \omega(y), \Psi(x^*) - \Psi(x^S)\big) \ \forall y \in Y.$$

Заметим, что вообще говоря, *во-первых*, $x^* \neq x^S$, *во-вторых*, как x^*, так и x^S определяются неоднозначно вследствие множественности максимальных по Слейтеру альтернатив в многокритериальных задачах (в предложенном здесь алгоритме можно использовать любые).

Автор благодарит В.И. Жуковского за постановку задачи и обсуждение работы.

Список литературы

1. Sawadge L.Y. The theory of statistical decision //J. American Statistical Association. 1951. Ѓ 46. P. 55-67.
2. Жуковский В.И. Кооперативные игры при неопределённости и их приложения. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.