Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2005. Ѓ2(32)

УДК 917.934

© **С. В. Лутманов**
mpu@perm.ru

КОМПРОМИССНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ

Ключевые слова: компромиссный набор стратегий, равновесие по Нэшу, дифференциальная игра, стабильный мост, экстремальное прицеливание.

Abstract. A compromise set of positional strategies in a differential game of several persons is constructed.

1. Игра в нормальной форме

Под игрой (необязательно дифференциальной), записанной в нормальной форме, будем понимать тройку

$$\Big(K, \big\{\{U_i\} \mid i \in K\big\}, \big\{I_i \mid i \in K\big\}\Big),$$

где $K = \{1, \dots, k\}$ — множество номеров игроков, $\{U_i\}$ — множество всех стратегий, а

$$I_i \colon \{U_1\} \times \dots \times \{U_k\} \to R^1$$

— функция платы i-го, $i \in K$, игрока. Игра состоит в том, что каждый игрок выбирает независимо от других какую-либо стратегию из своего множества стратегий. В результате складывается ситуация $W = (U_1, \dots, U_k)$, на которой вычисляется плата $I_i(U_1, \dots, U_k)$, $i \in K$ каждого из игроков. Игрок заинтересован в минимизации своей платы. В этом разделе для простоты будем предполагать, что все встречающиеся по ходу изложения и функций платы существуют.

1.1. Оптимальность по Нэшу

Одна из основных проблем в неантагонистической игре состоит в выборе адекватного содержанию задачи понятия решения. Наиболее распространен подход, основанный на принципе равновесия по Нэшу.

Определение 1.1. Набор стратегий $U_1^0, \ldots, U_k^0$ называется равновесным по Нэшу, если для всех $U_i \in \{U\}$, $i \in K$ справедливо неравенство

$$I_i(U_1^0, \ldots, U_{i-1}^0, U_i^0, U_{i+1}^0, \ldots, U_k^0) \leqslant \\ \leqslant I_i(U_1^0, \ldots, U_{i-1}^0, U_i, U_{i+1}^0, \ldots, U_k^0). \tag{1.1}$$

Равновесный набор обладает свойством устойчивости по отношению к игроку-уклонисту: единоличное уклонение игрока от равновесного набора стратегий приводит к ухудшению (увеличению) его платы.

Недостаток определения равновесных по Нэшу ситуаций состоит в том, что величины платы игроков для таких ситуаций могут оказаться существенно хуже (больше) потенциально возможных. В частности, может существовать набор стратегий $U_1^*, \ldots, U_k^*$, для которого при всех $i \in K$ справедливо неравенство

$$I_i(U_1^*, U_2^*, \ldots, U_i^*, \ldots, U_k^*) < I_i(U_1^0, U_2^0, \ldots, U_i^0, \ldots, U_k^0).$$

Естественно, этот набор не будет обладать свойством устойчивости по отношению к игроку-уклонисту, выраженному условием (1.1).

1.2. Принцип компромисса

Из определения 1.1 следует, что для равновесных наборов

1) сообщество игроков не позволяет любому своему члену получить плату меньше (лучше), чем некоторая величина

$$S_i = \min_{U_i \in \{U_i\}} I_i(U_1^0, \ldots, U_{i-1}^0, U_i, U_{i+1}^0, \ldots, U_k^0), \quad i \in K;$$

2) имеет место совпадение этих величин с соответствующими значениями плат, которые получают игроки при применении равновесного набора стратегий

$$S_i = I_i(U_1^0, \dots, U_{i-1}^0, U_i^0, U_{i+1}^0, \dots, U_k^0), \quad i \in K.$$

Отказ от выполнения условия 2 приводит к следующему определению.

Пусть

$$S_* = (S_{1*}, \dots, S_{k*}),\ S^* = (S_1^*, \dots, S_k^*),\ S_*, S^* \in R^k, S_* \leqslant S^*.$$

О п р е д е л е н и е 1.2. Будем говорить, что ситуация $W^{\text{комп}} \in \{W\}$ является компромиссной по отношению к векторам S_*, S^*, если для всех $i \in K$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered} S_* \leqslant \min_{U_i \in \{U_i\}} I_i(U_1^{\text{комп}}, \dots U_{i-1}^{\text{комп}}, U_i, U_{i+1}^{\text{комп}}, \dots, U_k^{\text{комп}}) \leqslant \\ \leqslant I_i(U_1^{\text{комп}}, \dots U_{i-1}^{\text{комп}}, U_i^{\text{комп}}, U_{i+1}^{\text{комп}}, \dots, U_k^{\text{комп}}) \leqslant S_i^*. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Компромиссный набор стратегий сохраняет свойство устойчивости по отношению к игроку-уклонисту (в ослабленном варианте). При этом можно ожидать существование компромиссных наборов стратегий, для которых

$$I_i(U_1^{\text{комп}}, \dots, U_i^{\text{комп}}, \dots, U_k^{\text{комп}}) < I_i(U_1^0, U_2^0, \dots, U_i^0, \dots, U_k^0),$$

где $U_1^0, U_2^0, \dots, U_i^0, \dots, U_k^0$ — набор стратегий, удовлетворяющий определению 1.1.

Принцип компромисса обобщает равновесие по Нэшу в том смысле, что при $S_* = S^*$ определение 1.2 переходит в определение 1.1.

В отличие от равновесных по Нэшу наборов стратегий единоличное отклонение какого-либо игрока от стратегии, предписываемой ему компромиссным набором, может привести к улучшению его выигрыша. Фактором, обеспечивающим устойчивость компромиссного набора стратегий, является потребность игроков не допустить значительный выигрыш, какого-либо одного игрока. Такая ситуация складывается, например, на выборах в Думу, когда каждая политическая партия, стремясь получить максимальное количество мест, более всего опасается, что какая-либо другая партия получит более 51% голосов, обеспечив себе абсолютное большинство в Думе.

2. Дифференциальная игра нескольких лиц

2.1. Уравнения движения

Динамика системы описывается обыкновенным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u_1, \ldots, u_k), \tag{2.1}$$

где t — текущее время, $x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k$ — фазовый вектор объекта, $u_i \in P_i \subset R^{r_i}$ — вектор управляющих параметров i-го игрока, $f\colon R^{1+n+r_1+\cdots+r_k} \to R^n$ — вектор-функция, описывающая как внутреннее устройство объекта, так и воздействие различных внешних факторов. Будем считать, что множества P_i, $i \in K$ компактны. Функция f непрерывна по совокупности переменных $t, x, u_1, \ldots, u_k$.

2.2. Условия на правую часть дифференциального уравнения

Относительно правых частей дифференциальных уравнений (2.1) принимаются стандартные в теории дифференциальных игр предположения [1; 2]:

1) локальные условия Липшица:

для всякого $R > 0$ существует $k > 0$ такое, что для всех $|x^{(1)}| \leqslant R$, $|x^{(2)}| \leqslant R$, $t \in [t, \vartheta]$, $u_i \in P_i$, $i \in K$ справедливо неравенство

$$\big|f(t, x^{(1)}, u_1, \ldots, u_k) - f(t, x^{(2)}, u_1, \ldots, u_k)\big| \leqslant k\big|x^{(1)} - x^{(2)}\big|;$$

2) условия продолжимости решения:

существует $\lambda > 0$ такое, что для всех $t \in [0, T_0]$, $u_i \in P_i$, $i \in K$, справедливо неравенство

$$|f(t, x, u_1, \dots, u_k)| \leqslant \lambda(1 + |x|);$$

3) существование седловой точки в ґмаленькой i-игреЄ для всех $i \in K$:

$$\min_{u \setminus u_i \in P^i} \max_{u_i \in P_i} sf(t, x, u_1, \dots, u_i, \dots, u_k) =$$
$$= \max_{u_i \in P_i} \min_{u \setminus u_i \in P^i} sf(t, x, u_1, \dots, u_i, \dots, u_k),$$

для всех $\{t, x\} \in R^{n+1}, s \in R^n$, где

$$P^i = P_1 \times \dots \times P_{i-1} \times P_{i+1} \times \dots \times P_k,$$
$$u \setminus u_i = (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_k).$$

2.3. Плата игрока

Плата i-го игрока определяется формулой

$$I_i = \sigma_i(x(T), \tag{2.2}$$

где $\sigma_i \colon R^n \to R^1, i \in K$ — некоторая заданная непрерывная функция, $x(\cdot)$ — реализация фазового вектора объекта, а T — момент окончания игры.

2.4. Позиционные стратегии

Свои управляющие параметры игрок формирует, основываясь на информации о текущем времени и реализовавшемся фазовом векторе объекта, при этом он не осведомлен о выборе управляющих параметров остальных игроков в этот момент времени. Понятия позиционной стратегии игрока и движения объекта, отвечающего набору позиционных стратегий, определяются аналогично [1; 2].

О п р е д е л е н и е 2.1. Позиционной стратегией игрока $i \in K$ называется произвольная функция

$$U_i\colon [t_0, T] \times R^n \to P_i.$$

Пусть $U_i[\cdot], i \in K$ — произвольная позиционная стратегия и Δ — конечное разбиение отрезка времени $[t_0, T]$ точками τ_s, $s = 0, 1, \ldots, \tau_0 = t_0$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Ломаной Эйлера $x_\Delta(\cdot, t_0, x_0, U_i[\cdot])$, выходящей из позиции $\{t_0, x_0\}$ и порожденной позиционной стратегией $U_i[\cdot]$, назовем всякую абсолютно непрерывную функцию $x_\Delta(\cdot)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\dot{x}_\Delta(t) = f(t, x_\Delta(t), u_1(t), \ldots, u_k(t)),$$
$$x_\Delta(t_0) = x_0, \quad x_\Delta(\tau_s) = \lim_{t \to \tau_s - 0} x_\Delta(t),$$
$$u_i(t) = u_i[\tau_s, x_\Delta(\tau_s)], \quad t \in [\tau_s, \tau_{s+1}), s = 0, 1, \ldots$$

Здесь реализация вектора управляющих параметров $u_j(\cdot)$ для всех $j \in K(i) = K \setminus \{i\}$ представляет собой произвольную интегрируемую по Лебегу функцию со значениями в множестве P_j.

О п р е д е л е н и е 2.3. Движением, выходящим из позиции $\{t_0, x_0\}$ и порожденным позиционной стратегией U_i i-го, $i \in K$, игрока, назовем всякую функцию $x(\cdot)$, для которой найдется последовательность ломаных Эйлера

$$x_{\Delta^{(p)}}(\cdot, t_0, x_0, u_i[\cdot]), \quad p = 1, 2, \ldots,$$

равномерно сходящаяся к ней на $[t_0, T]$ при условии

$$\lim_{p \to \infty} \sup_s (\tau_{s+1}^{(p)} - \tau_s^{(p)}) = 0.$$

Совокупность всех движений, выходящих из позиции $\{t_0, x_0\}$ и порожденных позиционной стратегией $U_i[\cdot]$, i-го, $i \in K$, игрока, будем обозначать символом $X[t_0, x_0, U_i[\cdot]]$ и называть пучком конструктивных движений.

Пусть $L \subset K$ и каждый игрок с номером $i \in L$ выбрал некоторую позиционную стратегию.

О п р е д е л е н и е 2.4. Множество

$$X[t_0, x_0, \{U_i[\cdot], i \in L\}] = \bigcap_{i \in L} X[t_0, x_0, U_i[\cdot]]$$

назовем пучком конструктивных движений, выходящих из начальной позиции $\{t_0, x_0\}$ и порожденных набором позиционных стратегий $\{U_i[\cdot], i \in L\}$ множества игроков L.

Известно [1], что $X[t_0, x_0, \{U_i[\cdot], i \in L\}] \neq \emptyset$ для всех $L \subset K$. При этом

$$X[t_0, x_0, \{U_i[\cdot], i \in L'\}] \subset X[t_0, x_0, \{U_i[\cdot], i \in L\}],$$

если $L \subset L'$.

3. Построение компромиссных наборов стратегий

Пусть

$$S_* = (S_{1*}, \ldots, S_{k*}), \quad S^* = (S_1^*, \ldots, S_k^*), \quad S_*, S^* \in R^k$$

и $S_{i*} \leqslant S_i^*$ для всех $i \in K$.

О п р е д е л е н и е 3.1. Будем говорить, что набор позиционных стратегий $U_1^{\text{комп}}, \ldots, U_k^{\text{комп}}$ всех игроков компромиссен относительно векторов S_*, S^* для начальной позиции $\{t_*, x_*\}$, $t_* \in [t_0, T]$, если

$$I_i[x(\cdot)] \leqslant S_i^* \quad \forall\, x(\cdot) \in X\big[t_*, x_*, U_1^{\text{комп}}, \ldots, U_i^{\text{комп}}, \cdot U_k^{\text{комп}}\big] \tag{3.1}$$

и

$$\begin{gathered} S_{i^*} \leqslant I_i[x(\cdot)], \\ \forall\, x(\cdot) \in X[t_*, x_*, U_1^{\text{комп}}, \ldots, U_{i-1}^{\text{комп}}, U_{i+1}^{\text{комп}} \ldots U_k^{\text{комп}}]. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Рассмотрим множества

$$M_i = \{x \in R^n, \sigma_i(x) < S_{i*}\}, i \in K,$$
$$M = \big\{x \in R^n, \sigma_i(x) < S_i^*, i \in K\big\}.$$

Будем считать, что

$$M \neq \emptyset,\ M_i \cap M_j = \emptyset, \quad i, j \in K.$$

Для всех $i \in K$ построим множества $W_i \subset [t_0, T] \times R^n$, для которых выполнено:

1) $W_i(T) = \{x \in R^n | \{\vartheta, x\} \in W_i\} = M_i$,

2) W_i^c — максимальный стабильный мост [1] в игре наведения–уклонения в момент T, в которой множество игроков $K(i)$ решают задачу наведения на множество M_i^c против игрока i.

Л е м м а 3.1. *Множества W_i, $i \in K$ попарно не пересекаются.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Тогда найдутся номера $i, j \in K$ такие, что $W_i \cap W_j \neq \emptyset$. Пусть $\{t_*, x_*\} \in W_i \cap W_j$ и, следовательно, $\{t_*, x_*\} \notin W_i^c$, $\{t_*, x_*\} \notin W_j^c$. В силу свойства 2 множеств W_i, $i \in K$ и теоремы об альтернативе [1] для начальной позиции $\{t_*, x_*\}$ разрешимы задачи уклонения в момент ϑ игроков i и j от множеств M_i^c и M_j^c соответственно. Пусть U_i^*, U_j^* — стратегии игроков i и j, решающие указанные задачи. Тогда для всех $x(\cdot) \in X[t_*, x_*, U_i^*, U_j^*]$ должно выполняться $x(T) \in M_i \cap$, так как $X[t_*, x_*, U_i^*, U_j^*] \neq \emptyset$, а $M_i \cap M_j = \emptyset$. Лемма доказана.

Для всех номеров $i \in K$ определим набор стратегий $(U_1^{ie}, \ldots, U_{i-1}^{ie}, U_{i+1}^{ie}, \ldots, U_k^{ie})$ множества игроков $K(i)$ из условия

$$(U_1^{ie}, \ldots, U_{i-1}^{ie}, U_{i+1}^{ie}, \ldots, U_k^{ie}) =$$
$$= \begin{cases} \big(u_1^{ie}(t,x), \ldots, u_{i-1}^{ie}(t,x), u_{i+1}^{ie}(t,x), \ldots, u_k^{ie}(t,x)\big), & \{t,x\} \in W_i \\ \text{любой набор векторов из } \prod\limits_{j \in K(i)} P_j, & \{t,x\} \notin W_i. \end{cases}$$

Здесь набор векторов

$$\big(u_1^{ie}(t,x),\ldots,u_{i-1}^{ie}(t,x),u_{i+1}^{ie}(t,x),\ldots,u_k^{ie}(t,x)\big)$$

удовлетворяет условию

$$\max_{u_i\in P_i} s(t,x)f(t,x,u^{ie}(t,x)||u_i,) =$$
$$= \min_{u\setminus u_i\in P^i}\max_{u_i\in P_i} s(t,x)f(t,x,u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_k),$$
$$s(t,x)=x-x_*,\quad |x-x_*|=\min_{y\in W_i^c(t)}|x-y|,$$

где

$$u^{ie}(t,x)||u_i=(u_1^{ie}(t,x),\ldots,u_{i-1}^{ie}(t,x),u_i,u_{i+1}^{ie}(t,x),\ldots,u_k^{ie}(t,x)).$$

Заметим, что набор стратегий $(U_1^{ie},\ldots,U_{i-1}^{ie},U_{i+1}^{ie},\ldots,U_k^{ie})$ является экстремальным [1] к множеству W_i^c, поэтому он решает задачу наведения на множество M_i^c для игроков $K(i)$ из любой начальной позиции $\{t_*,x_*\}\in W_i^c$ в момент времени T.

Дополнительно предположим, что существует множество $W\subset R^{n+1}$, для которого

1) $W(t)\cap W_i(t)=\emptyset$, $t\in[t_0,T]$, $i\in K$;

2) $W(t)$, $t\in[t_0,T]$ — открытое множество;

3) $W(\vartheta)=M$;

4) для любой позиции $\{t_*,x_*\}\in W$ существует набор

$$u_{1*}(t,x),\ldots,u_{k*}(t,x)$$

управляющих параметров всех игроков $u_{i*}(t,x)\in P_i$, $i\in K$, такой, что для решения $x_*(\cdot)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x}=f(t,x,u_{1*}(t,x),\ldots,u_{k*}(t,x)),\ x(t_*)=x_*$$

в любой момент времени $t^*\in[t_*,T]$ выполнено включение $x(t^*)\in\overline{W}(t^*)$. Очевидно, что для любого движения

$$x(\cdot)\in X[t_0,x_0,U_{1*},\ldots,U_{k*}],$$

где

$$\{t_0, x_0\} \in W, \quad U_{i*}[\cdot] = \begin{cases} u_{i*}(t,x), & \{t,x\} \in W, \\ \text{любой вектор из} P_i, & \{t,x\} \notin W, \end{cases}$$

имеет место включение $x(t) \in \overline{W}(t), t \in [t_0, T]$.

Структура компромиссного набора стратегий определяется следующей теоремой.

Т е о р е м а 3.1. *Набор стратегий всех игроков* $U_1^{\text{комп}}, \dots, U_k^{\text{комп}}$, *определенный соотношениями*

$$U_i^{\text{комп}} = \begin{cases} u_{i*}(t,x), & \{t,x\} \in W, \\ u_i^{je}(t,x), & \{t,x\} \in W_j,\ j \in K(i),\ i \in K, \\ \textit{любой вектор из } P_i & \textit{иначе}, \end{cases}$$

является компромиссным относительно векторов S_*, S^* *для любой начальной позиции* $\{t_*, x^*\} \in W$.

Заметим, что в силу определения множества W и леммы 1 выполнены условия

$$W_i(t) \cap W_j(t) = \emptyset,\ t \in [t_0, T], i, j \in K,$$

$$W(t) \cap W_i(t) = \emptyset, t \in [t_0, T], i \in K.$$

Следовательно, набор стратегий определен корректно.

3.1. Доказательство теоремы

Для доказательства теоремы требуется установить справедливость неравенств (3.1) и (3.2) для всех начальных позиций $\{t_*, x_*\} \in W$. Неравенство (3.1) следует из того обстоятельства, что по свойству 4 множества W и определения компромиссного набора стратегий для всех начальных позиций $\{t_*, x_*\} \in W$ справедливо равенство

$$X[t_*, x_*, U_{1*}, \dots, U_{i-1*}, U_{i+1*}, \dots, U_{k*}] =$$
$$= X[t_*, x_*, U_1^{\text{комп}}, U_{i-1}^{\text{комп}}, U_i^{\text{комп}}, U_{i+1}^{\text{комп}}, \dots, U_k^{\text{комп}}].$$

Тогда для любого движения

$$x[\cdot] \in X[t_*, x_*, U_1^{\text{комп}}, U_{i-1}^{\text{комп}}, U_i^{\text{комп}}, U_{i+1}^{\text{комп}}, \ldots, U_k^{\text{комп}}]$$

выполнено условие $x(t) \in \overline{W}(t), t \in [t_0, T]$. В частности, имеет место включение $x(T) \in \overline{M}$, которое и означает выполнение неравенства (3.1).

Неравенство (3.2) докажем от противного. Пусть неравенство нарушается для некоторой начальной позиции $\{t_*, x_*\} \in W$ и номера $i \in K$. Тогда найдется движение

$$x(\cdot) \in X[t_*, x_*, U_1^{\text{комп}}, U_{i-1}^{\text{комп}}, U_{i+1}^{\text{комп}}, \ldots, U_k^{\text{комп}}],$$

для которого $x(\vartheta) \in M_i$. Этого не может быть, так как для всех номеров $i \in K$ в позициях $\{t, x\} \in W_i$ набор стратегий $(U_1^{\text{комп}}[\cdot], \ldots, U_{i-1}^{\text{комп}}[\cdot], U_{i+1}^{\text{комп}}[\cdot], \ldots, U_k^{\text{комп}}[\cdot])$ определяет те же управляющие параметры, что и набор стратегий

$$\big(U_1^{ie}[\cdot], \ldots, U_{i-1}^{ie}[\cdot], U_{i+1}^{ie}[\cdot], \ldots, U_k^{ie}[\cdot]\big)$$

для каждого игрока $i \in K(i)$. Выше отмечалось, что этот набор стратегий является уклоняющим от множества M_i в момент времени T для любой начальной позиции из множества W_i^c. Для завершения доказательства заметим, что условие $\{t_*, x_*\} \in W$ влечет за собой включение $\{t_*, x_*\} \in W_i^c$ при всех номерах $i \in K$.

4. Модельная игра

4.1. Постановка задачи

На двумерной плоскости находится точка, управляемая k игроками ($k \geqslant 2$). Каждый игрок имеет возможность независимо от других назначать точке вектор скорости, произвольный по направлению и ограниченный по величине. Игра начинается в момент времени t_0 из некоторого начального положения управляемой точки. На плоскости заданы фиксированные точки M_i^*, имеющие соответственно радиус-векторы $\overline{r_i}$, $i \in K$ относительно начала координат. Эти точки в дальнейшем будем называть целевыми множествами игроков. Платой i-го, $i \in K$, игрока служит расстояние от финального положения управляемой точки в момент времени ϑ до целевого множества этого игрока. Неформальная цель каждого из игроков состоит в минимизации своей платы.

Рис. 1. Модельный пример.

Рассматривается случай (см. рис. 1), когда $t_0 = 0$, $T = 1$, $k = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\overline{r}_1 = (0, 2)$, $\overline{r}_2 = (-1, \sqrt{3})$, $\overline{r}_3 = (\sqrt{3}, 1)$, $\overline{u}_1 = \overline{u} = (u_1, u_2)$, $\overline{u}_2 = \overline{v} = (v_1, v_2)$, $\overline{u}_3 = \overline{w} = (w_1, w_2)$, $|u_i| \leqslant 1$.

Дифференциальные уравнения движения управляемой точки имеют вид

$$\dot{x}_1 = u_1 + v_1 + w_1, \quad \dot{x}_2 = u_2 + v_2 + w_2.$$

имеющие соответственно радиус-векторы $\overline{r_i}$, $i \in K$ относительно начала координат. Эти точки в дальнейшем будем называть целевыми множествами игроков. Платой i-го, $i \in K$, игрока служит расстояние от финального положения управляемой точки в момент времени ϑ до целевого множества этого игрока. Нефор-

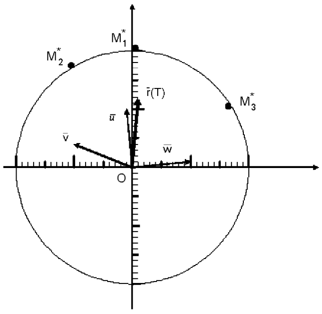

Рис. 1. Модельный пример.

Рассматривается случай (см. рис. 1), когда $t_0 = 0$, $T = 1$, $k = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\overline{r}_1 = (0, 2)$, $\overline{r}_2 = (-1, \sqrt{3})$, $\overline{r}_3 = (\sqrt{3}, 1)$, $\overline{u}_1 = \overline{u} = (u_1, u_2)$, $\overline{u}_2 = \overline{v} = (v_1, v_2)$, $\overline{u}_3 = \overline{w} = (w_1, w_2)$, $|u_i| \leqslant 1$.

Дифференциальные уравнения движения управляемой точки имеют вид

$$\dot{x}_1 = u_1 + v_1 + w_1, \quad \dot{x}_2 = u_2 + v_2 + w_2.$$

4.2. Равновесные по Нэшу управления

Построим ситуацию равновесия по Нэшу в классе постоянных стратегий. В случае, когда игроки назначают управляемой точке постоянные по величине и направлению скорости $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, положение управляемой точки в момент времени $\vartheta = 1$ определяется по формуле

$$\overline{r}(1) = \overline{r}_0 + \overline{u} + \overline{v} + \overline{w}.$$

Необходимые и достаточные условия равновесия по Нэшу в классе постоянных управлений для начального положения имеют вид [3,4]

$$\begin{aligned}
\max\{1, |\overline{r}_1 - (\overline{v}^0 - \overline{w}^0)|\} \cdot \frac{\overline{r}_1 - (\overline{v}^0 - \overline{w}^0)}{|\overline{r}_1 - (\overline{v}^0 - \overline{w}^0)|} &= \overline{u}^0, \\
\max\{1, |\overline{r}_2 - (\overline{w}^0 - \overline{u}^0)|\} \cdot \frac{\overline{r}_2 - (\overline{w}^0 - \overline{u}^0)}{|\overline{r}_2 - (\overline{w}^0 - \overline{u}^0)|} &= \overline{v}^0, \\
\max\{1, |\overline{r}_3 - (\overline{u}^0 - \overline{v}^0)|\} \cdot \frac{\overline{r}_3 - (\overline{u}^0 - \overline{v}^0)}{|\overline{r}_3 - (\overline{u}^0 - \overline{v}^0)|} &= \overline{w}^0.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Решение системы (4.1) получено численно:

$$\overline{u}^0 = (-0,045029; 0,998986), \quad \overline{v}^0 = (-0,910045; 0,414509),$$
$$\overline{w}^0 = (0,988367; -0,15209).$$

Выпишем финальное положение управляемой точки в случае равновесных по Нэшу управлений

$$x_1(1) = u_1^0 + v_1^0 + w_1^0 = 0,033292,$$
$$x_2(1) = u_2^0 + v_2^0 + w_2^0 = 1,2614.$$

Расстояния от управляемой точки в конечном положении до целевых множеств игроков следующие: $\bigl(I_i = |\overline{r}_i - \overline{r}(T)|\bigr)$

$$I_1 = 0,7398; \quad I_2 = 1,1354; \quad I_3 = 1,7186.$$

На рис. 1 дана геометрическая иллюстрация приведенных ниже численных результатов (табл.1).

В силу динамики исследуемой системы игрок-уклонист не может улучшить свой результат, даже если он будет применять позиционные стратегии. В частности, пусть игрок-уклонист использует минимаксную (против остальных игроков) позиционную стратегию наведения на свое целевое множество.

$$\overline{u}^{\text{н}}[t,\overline{r}(t)] = \frac{\overline{r}_1 - \overline{r}(t)}{|\overline{r}_1 - \overline{r}(t)|}, \quad \overline{v}^{\text{н}}[t,\overline{r}(t)] = \frac{\overline{r}_2 - \overline{r}(t)}{|\overline{r}_2 - \overline{r}(t)|},$$
$$\overline{w}^{\text{н}}[t,\overline{r}(t)] = \frac{\overline{r}_3 - \overline{r}(t)}{|\overline{r}_3 - \overline{r}(t)|}. \tag{4.2}$$

Результаты такого уклонения приведены в таблице 1.

Таблица 1

Игрок	Равновесие	Уклонение
Первый	0,7393	0,7398
Второй	1,1354	1,2123
Третий	1,7186	1,7928

Таким образом, единоличное уклонение игрока от равновесного набора стратегий не привело к улучшению его платы.

4.3. Компромиссный набор стратегий

В качестве компромиссных оценок возьмем векторы

$$S_* = (0,13; 0,9; 1,4), \quad S^* = (0,57; 1,131; 1,71).$$

Заметим, что верхние оценки (вектор S^*) плат для каждого из игроков лучше (меньше), чем тот результат, который этот игрок получает в случае равновесия.

Построим терминальные множества. Полагаем

$$M_1 = \left\{(x, y) | \sqrt{x^2 + (y-2)^2} < 0,13\right\},$$

$$M_2 = \left\{(x, y) | \sqrt{(x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2} < 0,9\right\},$$

$$M_3 = \left\{(x, y) | \sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y-1)^2} < 1,4\right\},$$

$$M_4 = \left\{(x, y) | \sqrt{(x-r_{Cx})^2 + (y-r_{Cy})^2} < 0,001\right\},$$

где $\overline{r}_C = (r_{Cx}, r_{Cy}) = 0,09147721; 1,442277962)$. Заметим, что

$$\rho(\overline{r}_1, \overline{r}_C) = 0,565174, \quad \rho(\overline{r}_2, \overline{r}_C) = 1,12929, \quad \rho(\overline{r}_3, \overline{r}_C) = 1,69914.$$

Непосредственно проверяется, что $M_i \cap M_j = \emptyset$, $i, j = 1, 2, 3$. Покажем, что $\sigma_i(x, y) \leqslant S_i^*$, $i \in \{1, 2, 3\}$ для всех $(x, y) \in M$. Действительно,

$$\sigma_1(x, y) = \rho((x, y), \overline{r}_1) \leqslant \rho((x, y), \overline{r}_C) + \rho(\overline{r}_1, \overline{r}_C) = \\ = 0,001 + 0,565174 < 0,57.$$

Аналогично проверяются два остальных неравенства.

Таким образом, множества V, V_1, V_2, V_3 обладают всеми свойствами, перечисленными в разделе 3. В пространстве позиций построим множества $(i = 1, 2, 3)$

$$W_i(t, x, y) = \big\{(t, x, y) | \varphi_i(t, x, y) < 0, \quad t \in [0, 1]\big\},$$

где

$$\varphi_1(t, x, y) = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} + (1-t) - 0,13,$$

$$\varphi_2(t, x, y = \sqrt{(x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2} + (1-t) - 0,9,$$

$$\varphi_3(t, x, y) = \sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y-1)^2} + (1-t) - 1,4.$$

Очевидно, что $W_i(1) = M_i, \ \ i = 1, 2, 3.$

Для всех $s \in R^2, \ \ |s| = 1$ справедливы равенства

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \max_{|\overline{u}|\leqslant 1} \min_{|\overline{v}|\leqslant 1, |\overline{w}|\leqslant 1} \overline{s}\cdot(\overline{u}+\overline{v}+\overline{w}) =$$
$$= \min_{|\overline{v}|\leqslant 1, |\overline{w}|\leqslant 1} \max_{|\overline{u}|\leqslant 1} \overline{s}\cdot(\overline{u}+\overline{v}+\overline{w}) = -1,$$
$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \max_{|\overline{v}|\leqslant 1} \min_{|\overline{u}|\leqslant 1, |\overline{w}|\leqslant 1} \overline{s}\cdot(\overline{u}+\overline{v}+\overline{w}) =$$
$$= \min_{|\overline{u}|\leqslant 1, |\overline{w}|\leqslant 1} \max_{|\overline{v}|\leqslant 1} \overline{s}\cdot(\overline{u}+\overline{v}+\overline{w}) = -1,$$
$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = \max_{|\overline{w}|\leqslant 1} \min_{|\overline{v}|\leqslant 1, |\overline{u}|\leqslant 1} \overline{s}\cdot(\overline{u}+\overline{v}+\overline{w}) =$$
$$= \min_{|\overline{v}|\leqslant 1, |\overline{u}|\leqslant 1} \max_{|\overline{v}|\leqslant 1} \overline{s}\cdot(\overline{u}+\overline{v}+\overline{w}) = -1,$$

Тогда множества $W_i^c, i = 1, 2, 3$ являются соответствующими максимальными стабильными мостами.

Полагаем $(t \in [0, 1])$

$$W = \left\{(t, x, y) \mid \sqrt{(x - r_{Cx})^2 + (y - r_{Cy})^2} - 1,5(1-t) - 0,001 < 0\right\}.$$

Непосредственно проверяется, что $W(1) = M, \ W_i(t) \cap W_j(t) = \emptyset$, $t \in [0, 1], \ \ i = 1, 2, 3,$ а также что набор управляющих параметров всех игроков, обеспечивающий свойство 4 множества W для всех позиций $(t_*, x_*, y_*) \in W, \ \ t_* < 1,$ следует выбирать из условия

$$\overline{u}_*(t_*, x_*, y_*) + \overline{v}_*(t_*, x_*, y_*) + \overline{w}_*(t_*, x_*, y_*) =$$
$$= \begin{cases} \left(\dfrac{|\overline{r}_C - \overline{r}_*| - 0,0001}{1 - t_*}\right) \dfrac{(\overline{r}_C - \overline{r}_*)}{|\overline{r}_C - \overline{r}_*|}, & |\overline{r}_C - \overline{r}_*| > 0,001 \\ 0, & |\overline{r}_C - \overline{r}_*| \leqslant 0,001, \end{cases} \tag{4.3}$$

где $\overline{r}_* = (x_*, y_*)$. Полагаем

$$U^{\text{комп}}[\cdot] = \begin{cases} \overline{u}_*(t, x, y), & \{t, x, y\} \in W, \\ \overline{u}_i^{je}(t, x, y), & \{t, x, y\} \in W_j, \ j = 1, 2, 3, \\ \text{любой вектор } |\overline{u}| \leqslant 1, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$V^{\text{комп}}[\cdot] = \begin{cases} \overline{v}_*(t,x,y), & \{t,x,y\} \in W, \\ \overline{v}_i^{je}(t,x,y), & \{t,x,y\} \in W_j,\ j=1,2,3, \\ \text{любой вектор } |\overline{v}| \leqslant 1, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$W^{\text{комп}}[\cdot] = \begin{cases} \overline{w}_*(t,x,y), & \{t,x,y\} \in W, \\ \overline{w}_i^{je}(t,x,y), & \{t,x,y\} \in W_j,\ j=1,2,3, \\ \text{любой вектор } |\overline{w}| \leqslant 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В силу леммы 3.1 набор стратегий $(U^{\text{комп}}, V^{\text{комп}}, W^{\text{комп}})$ определен корректно. По теореме 3.1 он является компромиссным относительно векторов

$$S_* = \{0,13; 0,9; 1,4), \quad S^* = \{0,57; 1,131; 1,71)$$

для любой начальной позиции, принадлежащей множеству W. Набор стратегий всех игроков, определяющий векторы управляющих параметров из условия (4.3) для позиций, принадлежащих множеству W, и произвольным образом для остальных позиций, обеспечивает для каждого из игроков выполнение оценки сверху для его платы. Однако этот набор стратегий может оказаться неустойчивым по отношению к игроку-уклонисту. Это означает, что игрок-уклонист может выбрать такое позиционное управление, которое позволит ему получить значение платы лучше (меньше) соответствующей нижней компромиссной оценки.

Действительно, пусть для всех позиций из множества W игроки назначают свои управляющие воздействия из условия (4.3). Вне этого множества принимается, что $u = v = w = 0$. Выберем начальную позицию $(0; 0; 0) \in W$.

Рассмотрим последовательно следующие ситуации:

а) среди игроков нет уклонистов;

б) первый игрок уклоняется от этого правила, прицеливаясь на свое целевое множество;

в) второй игрок уклоняется от этого правила, прицеливаясь на свое целевое множество;

г) третий игрок уклоняется от этого правила, прицеливаясь на свое целевое множество.

Значения плат для таких ситуаций приведены в табл. 2, а траектории движения точки для всех перечисленных ситуаций — на рис. 2.

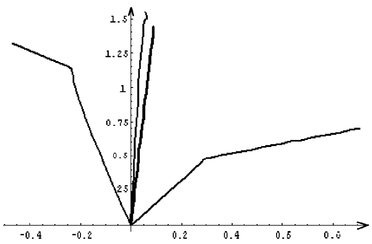

Рис. 2. Траектории точки в ситуациях а-г

Таблица 2

Оценка	Игроки		
	Первый	Второй	Третий
Компромиссная оценка снизу	0,13	0,9	1,4
Величина платы в ситуации а)	0,566152	1,12948	1,69855
Компромиссная оценка сверху	0,57	1,131	1,71
Величина платы при уклонении	0,456535	0,672874	0,875904

Таблица 3

Оценка	Игроки		
	Первый	Второй	Третий
Компромиссная оценка снизу	0,13	0,9	1,4
Величина платы для компромиссной ситуации	0,566152	1,12948	1,69855
Компромиссная оценка сверху	0,57	1,131	1,71
Величина платы при уклонении	0,456535	0,9088014	1,40733

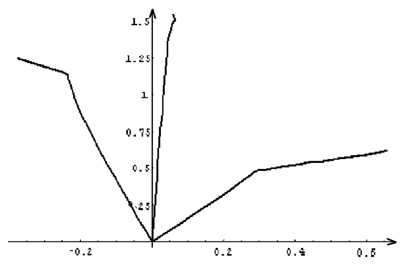

Рис. 3. Траектории точки при компромиссном наборе стратегий

Таким образом, результаты игроков в ситуации а) укладываются в верхние и нижние компромиссные оценки. Однако уклонисты (кроме первого) могут получить лучшее значение платы, чем соответствующие нижние компромиссные оценки.

Такой результат невозможен в случае компромиссного набора стратегий. Пусть, например, игроки-уклонисты в качестве стратегии уклонения выбирают прицеливание на свое терминальное множество. В табл. 3 приведены значения плат игроков для таких ситуаций, а траектории движения точки показаны на рис. 3

Заметим, что компромиссный набор стратегий является универсальным для всех начальных позиций из множества W. В случае, когда этот набор строится для конкретной начальной позиции, компромиссные оценки, как нижние, так и верхние, могут быть реализованы более жестко.

Список литературы

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1973. 455 с.
2. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 286 с.
3. Лутманов С. В. Курс лекций по методам оптимизации: Учебное пособие. Ижевск: Изд-во РХД, 2001. 367 с.
4. Лутманов С. В. Компромиссное управление в конфликтно-управляемых динамических системах // Проблемы механики и управления: Межвуз. сб. науч. трудов. Пермь, 2001. С. 48–59.
5. Лутманов С. В. Необходимые и достаточные условия равновесия по Нэшу в игре в перемещениях // Проблемы мех. и управления: Межвуз. сб. науч. трудов. Пермь, 2002. С. 4–10.