Пермский государственный университет

На правах рукописи

МАШКИН Сергей Викторович

МЕТОД МАГНИТНОГО КОМПЬЮТЕРНОГО ВИДЕНИЯ И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

01.04.01 – Приборы и методы экспериментальной физики

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель: профессор, доктор физикоматематических наук Марценюк М.А.

Пермь – 2012

Оглавление

Перечень используемых обозначений	6
Введение	7
Глава 1. Обзор методов, связанных с магнитным компьютерным	и видением 14
1.1. Введение в МКВ	14
1.2. Сравнение систем "обычного" и магнитного компьютерного в	видения 15
1.3. Понятие "видение"	16
1.4. Источники магнитного поля как объект наблюдения	17
1.5. Датчики и методы измерения магнитного поля	17
1.5.1. Классификация датчиков магнитного поля	17
1.5.2. Основные типы датчиков магнитного поля	18
1.5.3. Основные характеристики датчиков магнитного поля	19
1.5.4. Возможности современных датчиков магнитного поля	19
1.5.5. Рекомендации по выбору датчиков магнитного поля для	н построения 19
систем магнитного компьютерного видения	
1.6. Понятие прямой и обратной задачи	19
1.7. Практические приложения систем измерения магнитного поля	н 20
1.7.1. Магнитная интроскопия	20
1.7.2. Магнитный поиск	21
1.7.3. Магнитная энцефалография	22
1.7.4. Магнитная кардиография	24
1.7.5. Магнитное позиционирование	24
1.7.6. Заключение к разделу 1.7	30
1.8. Аналитическое решение обратной задачи для одного точечно	го магнитно-
го диполя	30
1.9. Выводы к главе 1	30
Глава 2. Решение обратной задачи для точечного магнитного ди	поля 33
2.1. Постановка обратной задачи для точечного магнитного дипол	я 33
2.2. Решение обратной задачи для точечного магнитного диполя	я по данным
измерения трёх компонент поля	34
2.2.1. Линейное приближение	35

2.	2.2. Квадратичное приближение	38
2.	2.3. Метод преодоления особенности решения в "нулевой" плоскости	40
2.3.	Решение обратной задачи для точечного магнитного диполя методом, не	
	имеющим особенности в "нулевой" плоскости	44
2.	3.1. Случай линейного приближения	44
2.	3.2. Случай квадратичного приближения	45
2.4.	Увеличение точности решения обратной задачи для точечного магнитного	
	диполя	46
2.5.	Алгоритмы решения обратной задачи для точечного магнитного диполя	46
2.	5.1. Алгоритм, использующий апостериорный выбор наилучшего решения	47
2.	5.2. Алгоритм, использующий априорный выбор наилучшего решения	48
2.	5.3. Алгоритм, не использующий специальное решение вблизи "нулевой"	
	плоскости	49
2.	5.4. Обозначения вариантов алгоритмов	50
2.	5.5. Замечания по программной реализации алгоритмов решения обратной	
	задачи для точечного магнитного диполя	51
2.6.	Решение обратной задачи для точечного магнитного диполя в 2D-случае	
	работы в плоскости, содержащей диполь	52
2.7.	Оценка точности решения обратной задачи для магнитного диполя	54
2.	7.1. Ошибки, имеющие место при решении обратной задачи для точечного	
	магнитного диполя	54
2.	7.2. Методы оценки точности решения по данным измерения поля	56
2.8.	О верификации дипольной модели источника поля	58
2.9.	Метод решения обратной задачи для нескольких слабо взаимодействую-	
	щих магнитных диполей	59
2.	9.1. Постановка задачи	59
2.	9.2. Метод решения	60
2.	9.3. Алгоритм решения	60
2.10	. Распространение методов магнитного компьютерного видения на другие	
	типы полей	61
2.	10.1.Аналогии магнитного, электрического, электротокового, теплового по-	
	лей	62

2.10.2.Задача о сфере, помещённой в однородное поле	63
2.11. Выводы к главе 2	64
Глава 3. Натурное моделирование метода решения обратной задачи для то-	
чечного магнитного диполя и его приложений	66
3.1. Аппаратно-программный комплекс "Система магнитного компьютерного	
видения"	66
3.1.1. Общее описание и основные характеристики комплекса	66
3.1.2. Описание аппаратной части	68
3.1.3. Описание программной части	75
3.1.4. Калибровка измерительной части комплекса	81
3.1.5. Способ измерения координат объектов в системе координат установки	85
3.1.6. Результаты испытаний комплекса	86
3.2. Приложение системы магнитного компьютерного видения	87
3.2.1. Магнитное позиционирование (локация)	87
3.2.2. Дистанционное измерение магнитного момента	93
3.2.3. Навигация автономного агента посредством системы магнитного ком-	
пьютерного видения	94
3.2.4. Магнитный дигитайзер	101
3.2.5. Обнаружение объектов по наведённому магнитному моменту	103
3.2.6. Измерение деформации	105
3.3. Выводы к главе 3	110
Глава 4. Численное моделирование методов решения обратной задачи для	
одного и нескольких слабо взаимодействующих диполей	111
4.1. Пакет программ, используемый для численного моделирования	111
4.2. Задачи численного моделирования	112
4.3. Общие замечания по численным экспериментам	113
4.4. Описания и результаты численных экспериментов по решению обратной	
задачи для одного точечного магнитного диполя	114
4.4.1. Влияние конфигурации области измерения на точность решения	114
4.4.2. Влияние направления от источника на область измерения на точность	
решения	119
4.4.3. Влияние расстояния от источника до области измерения на точность	

	решения	122
4.4.4.	Влияние ориентации области измерения относительно диполя на точ-	
	ность решения	125
4.4.5.	Влияние шумов измерения поля на точность решения, оценка границ	
	устойчивости методов	127
4.4.6.	Оценка отличия полей источников различных форм и размеров от поля	
	точечного диполя	130
4.4.7.	Определение возможностей системы магнитного компьютерного виде-	
	ния по её техническим характеристикам	132
4.5. Ч	исленное моделирование решения обратной задачи для нескольких слабо	
B	заимодействующих диполей	140
4.5.1.	Влияние конфигурации диполей и областей измерения на точность ре-	
	шения (1D-случай)	140
4.5.2.	Влияние конфигурации диполей и областей измерения на точность ре-	
	шения (2D случай)	142
4.5.3.	Рекомендации по построению систем МКВ на базе ОЗД-N	145
4.6. B	ыводы к главе 4	145
Заключ	ение	147
Список	литературы	148
Прилож	кения	156
1. П	Іринципиальная схема АПК СМКВ	157
2. И	Ісходный код функции решения ОЗД (MATLAB)	166
3. И	Ісходный код функции решения ОЗД-N (MATLAB)	190
4. P	ешение ОЗД по одной компоненте поля	192
5. P	ешение ОЗД по скалярному потенциалу	196
6. P	езультаты моделирования	198
7. P	езультаты моделирования	200

Перечень используемых обозначений

AMP	– анизотропный магнито-резистивный (датчик)
АПК	 аппаратно-программный комплекс
АЦП	– аналого-цифровой преобразователь
ГМР	– гигантский магнито-резистивный (датчик)
ДМП	– датчик магнитного поля
КВ	– компьютерное видение
МКВ	– магнитное компьютерное видение
МКГ	– магнитная кардиография
МНК	– метод наименьших квадратов
МПЗ	– магнитное поле Земли
МПЛ	– магнитное позиционирование (локация)
МЧЭ	– магнито чувствительный элемент
МЧЭ	– магнито-чувствительный элемент
МЭГ	– магнитная энцефалография
ОЗД	– обратная задача для одного точечного магнитного диполя
О3Д-N	– обратная задача для нескольких слабо взаимодействующих диполей
ПК	– персональный компьютер
ПЛИС	– программируемая логическая интегральная схема
ПО	– программное обесп <i>е</i> чение
ППМКВ	– пакет программ, предназначенный для решения задач МКВ
СКВИД	- сверхпроводящие квантовые магнитометры
СМПЛ	– система магнитного позиционирования (локации)
ЦАП	– цифро-аналоговый преобразователь
SPI	– Serial Peripheral Interface (последовательный интерфейс)

Введение

Актуальность работы

В последнее время активно развиваются системы компьютерного ви́дения (КВ), предназначенные для дистанционного наблюдения и последующей смысловой обработки информации об объектах. В большинстве систем КВ основным переносчиком информации являются видимое, инфракрасное или рентгеновское излучение и ультразвук. Если в качестве переносчика информации используется магнитное поле, получим систему *магнитного компьютерного ви́дения (МКВ)*. Магнитное поле, создаваемое объектом наблюдения, как и в «световом ви́дении», может быть наведено внешним источником. Для физических приложений МКВ представляет интерес также и другой вариант, когда намагничен либо сам объект наблюдения, либо когда в качестве источника поля выступают намагниченные частицы, внедренные в немагнитный объект, и играющие роль «меток».

Некоторыми признаками систем МКВ обладают магнитные интроскопы, а также приборы и методы, применяемые в магнитной энцефалографии для исследования активности мозга. Однако эти системы реализуют скорее "осязание" или "близорукое ви́дение". Системы МКВ, соответствующие "ви́дению", дают возможность дистанционно измерять не только пространственное положение объектов, т.е. решать задачу 3D-трекинга, но также и определять ориентацию их магнитных моментов, т.е. решать задачу 5D-трекинга, что значительно повышает информативность систем МКВ по сравнению с системами КВ. Эти дополнительные возможности МКВ могут быть использованы для решения различных прикладных задач, к которым относятся: управление манипуляторами, измерение деформации материалов, локация роботов, эндоскопия и др. В большинстве перечисленных случаев интерпретация данных измерений требует решения обратной задачи для точечного диполя (ОЗД), которая заключается в восстановлении местоположения и других параметров наблюдаемого диполя по данным измерений создаваемого им поля.

В настоящее время системы МКВ, и особенно их практические приложения, активно исследуются у нас в стране [16,11,12,19,39,48] и за рубежом [55,58,62,74,82,89, 94,99,100]. Однако не решены следующие проблемы:

- Хотя и существуют методы решения ОЗД на основе соотношения между полем и тензором его градиента, не разработан метод наилучшего определения этого тензора по данным измерения поля в дискретном наборе точек;
- Не описан алгоритм, в котором бы разносторонне учитывались различные погрешности, влияющие на точность решения задач МКВ;
- Не описан алгоритм решения ОЗД, в котором гарантированно преодолевается особенность решения в так называемой "нулевой" плоскости (плоскости, содержащей диполь и перпендикулярной ему);
- Не в полной мере выявлены конструктивные особенности систем МКВ, возможности таких систем при решении задач физических измерений.

Целью работы является исследование возможных приложений систем МКВ для физических измерений. Это требует тщательного анализа метода обработки компонент магнитного поля, создаваемого наблюдаемым объектом, установления размеров области чувствительности, выяснения точности измерений пространственных координат и других параметров. В качестве модели источника поля в работе рассматриваются точечные магнитные диполи. Поэтому в основе метода МКВ лежит метод решения обратной задачи для одного (ОЗД) или нескольких (ОЗД-N) точечных магнитных диполей. Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи

Задачи работы:

- Разработка метода и алгоритма решения ОЗД и ОЗД-N по данным измерения компонент вектора индукции поля в дискретном наборе конечного числа точек, расположенных в компактной и относительно малой, по сравнению с расстоянием до диполя, области.
- Создание экспериментального аппаратно-программного комплекса (АПК-МКВ) для натурного моделирования и оценки возможностей системы МКВ, основанной на методах решения ОЗД и ОЗД-N.
- 3) Создание пакета программ для проектирования систем МКВ (ППМКВ), позволяющего оценить возможности разрабатываемой системы МКВ для решения тех или иных практических задач. В основу ППМКВ предполагается положить алгоритмы решения ОЗД и ОЗД-N и экспериментальные данные, полученные при испытаниях созданного АПК-МКВ, что позволит учитывать величину шума измере-

ния поля, размеры области измерения, конфигурацию датчиков, их пространственное разрешение и другие параметры.

- 4) Исследование посредством созданного пакета программ ППМКВ влияния основных технических параметров системы МКВ (чувствительности датчиков, числа и расположения датчиков в пространстве, величины шума измерений) на возможности этой системы по решению задач МКВ (точность определения местоположения и магнитного момента источника, размеры области "видимости" источника и области действия системы).
- 5) Компьютерное и натурное моделирование некоторых приложений системы МКВ, таких как дистанционный бесконтактный измеритель магнитного момента дипольных источников, датчик положения и ориентации объекта (5D-локатор), плоский и объёмный дигитайзеры, навигация автономного агента, обнаружение и идентификация объектов из магнитных материалов по наведённому магнитному полю, измеритель деформации.

Научная новизна результатов работы заключается в следующем:

- Предложен метод и разработан алгоритм решения ОЗД по данным измерения компонент вектора индукции магнитного поля в дискретном наборе конечного числа точек, расположенных в малой, по сравнению с расстоянием до диполя, области. На основе этого метода также предложен метод и разработан алгоритм решения ОЗД-N;
- 2) Создана действующая физическая модель системы МКВ (АПК-МКВ) и с ее помощью получены результаты экспериментов, подтверждающие правильность предложенных методов и разработанных алгоритмов решения ОЗД и ОЗД-N и основанных на них приложений МКВ: дистанционного измерения магнитного момента, 5D-локации, навигации автономного агента, обнаружения и измерения параметров объектов из магнитных материалов, бесконтактного измерения деформаций;
- Создан пакет программ ППМКВ, основанный на разработанных алгоритмах решения ОЗД и ОЗД-N и предназначенный для предварительной оценки возможностей систем МКВ при решении практических задач.
- 4) На основе экспериментальных данных и численного моделирования произведена оценка влияния основных технических параметров системы МКВ (чувствитель-

ность датчиков, количество и расположение датчиков в пространстве, величина шума измерений) на возможности этой системы по решению задач МКВ (точность определения местоположения и магнитного момента источника, размеры области видимости источника и области действия системы).

Автором выносятся на защиту:

- Метод и алгоритм решения ОЗД по данным измерения компонент вектора индукции поля в дискретном наборе конечного числа точек, расположенных в компактной (по сравнению с расстоянием до диполя) области, и, основанный на нём, метод и алгоритм решения ОЗД-N;
- Разработка и создание действующего экспериментального макета системы МКВ и результаты исследования его основных характеристик;
- Разработка и создание пакета программ (ППМКВ), основанного на алгоритмах решения ОЗД и ОЗД-N и результатах испытаний АПК-МКВ. Пакет предназначен для предварительной оценки возможностей систем МКВ и компьютерного моделирования их работы;
- 4) Результаты компьютерных и натурных экспериментов по моделированию некоторых приложений системы МКВ: дистанционного измерения магнитного момента; задачи 5D-локации; дигитайзера плоских и объёмных объектов; системы навигации автономного агента; системы обнаружения и идентификации объектов из магнитных материалов по наведенному магнитному полю; системы измерения деформаций;
- 5) Результаты исследования влияния основных технических параметров системы МКВ, таких как чувствительность датчиков, их число и расположение в пространстве, величина шума измерений на возможности систем МКВ решения поставленных задач, таких как точность определения местоположения, величины и ориентации магнитного момента источника, размеры области видимости источника и области действия системы.

Апробация работы. Результаты исследований и экспериментов докладывались на конференции молодых учёных "Неравновесные процессы в сплошных средах", (Пермь, 26-27 дек. 2003 г.); международной научно-практической конференции "Теория, методы и средства измерений, контроля и диагностики" (30 сентября 2005 г.) Новочеркасск; международной научно-практической конференции "Компьютерное мо-

делирование 2007" (22 июня 2007 г.), СПбГПУ, Санкт-Петербург; международной научно-практической конференции "Компьютерное моделирование 2009" (23-24 июля 2009 г.), СПбГПУ, Санкт-Петербург; всероссийской конференции "Необратимые процессы в природе и технике", МГТУ им. Баумана, Москва (26-28 января 2011 г.). Материалы работы неоднократно докладывались и обсуждались на семинарах кафедры компьютерных систем и телекоммуникаций ПГУ (г. Пермь).

На программные реализации алгоритмов решения ОЗД и ОЗД-N получены свидетельства о регистрации программ [107,106]. Доклад на 10-ой международной научно-технической конференции "Компьютерное моделирование 2009" (Санкт-Петербург, 23-24 июля 2009 г.) был отмечен грамотой.

Достоверность результатов. Работоспособность и применимость разработанных методов подтверждена в ходе численного и натурного моделирования и сравнением соответствующих результатов между собой с учётом анализа погрешностей измерений.

Публикации. Материалы, отражающие основное содержание диссертации, опубликованы в семи статьях [103,105,109-111,113,114], одна из которых [111] в журнале, входящем в перечень ВАК, трёх тезисах докладов конференции [112,102,104], одном учебно-методическом пособии к лабораторной работе [108]. Кроме того, имеется два свидетельства о регистрации программного комплекса системы МКВ [106,107], подано две заявки в РОСПАТЕНТ на регистрацию способов и установок приложений систем МКВ - на момент представления диссертации эти заявки проходят экспертную оценку.

Личный вклад автора.

Постановка задач, обсуждение и интерпретация результатов проводились совместно с научным руководителем и соавторами. Разработка АПК-МКВ, пакета ППМКВ, а также большинство результатов натурных экспериментов и численных расчётов выполнены соискателем самостоятельно.

Практическая ценность.

Результаты, полученные в ходе численного и натурного моделирования, а также рекомендации, сформулированные на их основе, могут быть использованы при построении систем МКВ, которые расширят приборный инструментарий экспериментальной физики.

На основе метода решения ОЗД были экспериментально апробированы следующие практические приложения: система магнитной локации (также может служить основой для 5D-манипуляторов, систем определения положения кончика катетера при инвазивном медицинском обследовании), дистанционный измеритель магнитного момента дипольных источников, система навигации автономного агента, 2Dи 3D- дигитайзеры, система обнаружения и идентификации объектов из магнитных материалов по наведенному магнитному полю. Метод решения ОЗД-N может быть использован при создании систем бесконтактного измерения деформации.

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Михаилу Андреевичу Марценюку за всестороннюю помощь в подготовке настоящей работы. Автор признателен всем сотрудникам кафедры компьютерных систем и телекоммуникаций (ККСиТ) Пермского государственного национального исследовательского университета (ПГНИУ) за активное обсуждение результатов диссертационной работы на семинарах кафедры.

Структура работы.

Работа состоит из введения, четырёх основных глав, заключения и нескольких приложений.

Первая глава содержит обзор методов решения различных физических и практических задач и приложений, основанных на использовании магнитного поля в качестве переносчика информации. В главе также вводится понятие МКВ, сравнение его с существующими методами, основанными на измерении магнитного поля.

Вторая глава содержит описание разработанного метода и алгоритма решения O3Д, включая детальное исследование особенности решения задачи в "нулевой" плоскости и способы преодоления этой особенности. Также во второй главе обсуждаются погрешности, возникающие при решении O3Д, и их влияние на точность измерений. Кроме того, приводится описание предлагаемого метода решения обратной задачи для нескольких слабо взаимодействующих диполей (O3Д-N). В заключительном разделе второй главы указывается на аналогии магнитного и электрического и теплового полей, и обсуждается принципиальная возможность использования этих полей как переносчиков информации в системах компьютерного видения.

В третьей главе рассматривается реализация экспериментального АПК, который далее использовался для проведения натурного моделирования задач МКВ. Также приводится описание результатов натурных и компьютерных экспериментов по моделированию различных приложений разработанной системы МКВ: дистанционного измерения магнитного момента дипольного источника, 5D-локации, плоского и объёмного магнитного дигитайзера, навигации автономного агента, обнаружения и идентификации объектов из магнитных материалов по наведенному магнитному моменту, бесконтактного измерения деформации.

В четвертой главе представлено описание пакета программ ППМКВ, предназначенного для численного моделирования решения задач МКВ, проектирования систем МКВ, оценки возможностей систем МКВ и их применимости для решения практических задач при заданных условиях и технических параметрах измерительной части. Также приводятся описания постановки и результатов компьютерных экспериментов по исследованию влияния основных технических параметров системы МКВ на возможности этой системы по решению задач МКВ.

В заключении приводится обзор основных результатов и выводов, полученных в ходе выполнения работы.

Приложения содержат обзорную таблицу основных параметров современных датчиков магнитного поля, принципиальную схему разработанного АПК СМКВ, графики и таблицы, демонстрирующие некоторые результаты компьютерного моделирования систем МКВ, основанных на разработанных алгоритмах решения ОЗД и ОЗД-N. Также в приложении представлены предложенные, но ещё не апробированные методы решения ОЗД в некоторых частных случаях (решение ОЗД по одной, двум компонентам вектора индукции магнитного поля, решение ОЗД по данным измерения скалярного потенциала статического магнитного поля.

Глава 1. Обзор методов, связанных с магнитным компьютерным

видением

В данной главе рассмотрены существующие на сегодняшний день физические задачи и приложения, использующие магнитное поле в качестве переносчика информации, методы решения прямых и обратных задач, возможности и ограничения этих методов. Также вводится понятие системы МКВ, указаны её отличия от прочих приложений, использующих магнитное поле в качестве переносчика информации. Сформулированы некоторые основные требования к аппаратной части систем МКВ.

1.1. Введение в МКВ

Обычно под компьютерным видением (КВ) понимают процесс извлечения информации об объекте из одного или нескольких изображений [44,47, 60,65].

Изображения получаются в результате переноса информации от объекта к наблюдателю (рис. 1.1). В существующих системах КВ носителем информации является световое, ультразвуковое или рентгеновское излучение, которое излучается непосредственно объектом, либо отражается или преломляется им. Излучение, содержащее информацию об объекте, измеряется наблюдателем посредством датчиков (фотоматрицей камеры).



Рис. 1.1. Система КВ

Рис. 1.2. Система МКВ

КВ можно распространить и на случай, когда переносчиком информации является магнитное поле (рис. 1.2). Задача системы МКВ состоит в том, чтобы по данным измерения магнитного поля источника в некоторой локальной области определить параметры источника — его положение в пространстве, величину и ориентацию мультиполей (сложный источник поля можно представить в виде совокупности компонент: дипольной, квадрупольной, октупольной и т.д. [75]).

Решение задач "обычного" КВ связано с различными трудностями, вот лишь некоторые из них: необходимость решения обратных задач, которые часто являются некорректными; многие задачи являются некалиброванными – наблюдателю неизвестны параметры наблюдаемых объектов; необходимость обработки больших объёмов данных. В случае МКВ все перечисленные проблемы также могут присутствовать, что будет продемонстрировано далее.

В отличие от систем КВ, работающих в видимом диапазоне света и копирующих зрительную систему человека, системы МКВ позволяют "увидеть" источники магнит-

ного поля, что обычному человеку сделать невозможно. Соответственно, у робототехнических систем, снабжённых системами МКВ, появляется возможность в некоторых ситуациях более полно оценивать окружающую обстановку и, соответственно, принимать более адекватное решение.

1.2. Сравнение систем "обычного" и магнитного компьютерного видения

В системе "обычного" КВ (рис. 1.3) информация об объекте в виде светового излучения, пройдя сквозь оптическую систему камеры, попадает на матрицу фоточувствительных элементов (МФЭ), аналоговый сигнал с которой поступает на вход блока усиления и оцифровки (АЦП). Далее усиленный и оцифрованный сигнал обрабатывается процессором: сначала производится предварительная обработка сигнала: фильтрация, линеаризация, масштабирование, и т.п. (ПО), затем, собственно, находится решение той или иной задачи КВ (НР). Это решение далее может быть использовано для решения каких-либо высокоуровневых задач, стоящих перед роботом, охранной системой и пр.



Рис. 1.3. Структура системы "обычного" компьютерного видения

Теперь кратко рассмотрим структуру и принцип действия системы МКВ (рис. 1.4). Наблюдаемый объект в данном случае — источник магнитного поля, которое является переносчиком информации об объекте. Магнитное поле измеряется системой магниточувствительных элементов (МЧЭ) в некоторой небольшой (по сравнению с расстоянием до источника) области. Сигналы с выхода МЧЭ усиливаются и оцифровываются соответствующим блоком (АЦП). Полученные цифровые данные измерений магнитного поля подвергаются в процессоре предварительной обработке (ПО), а затем используются для решения задачи МКВ, которая состоит в определении свойств наблюдаемого объекта — источника поля.



Рис. 1.4. Структура системы магнитного компьютерного видения (МКВ)

<u>Важными характеристиками систем КВ</u> являются: дальность действия зрительной системы, разрешающая способность, точность измерения расстояний, частота обновления данных. В случае систем МКВ, перечисленные характеристики также присутствуют и важны, но, как будет показано далее, они будут зависеть от других свойств системы.

1.3. Понятие "видение"

На примере "обычной" системы КВ (СКВ) сделаем небольшое замечание, касающееся термина "видение" (рис. 1.5).



Рис. 1.5. Пояснение термина "видение" (случай "обычного" КВ)

Если расстояние L от объекта до датчика, формирующего изображение, много больше размера изображения S, будем считать, что система реализует процесс "видения", т.е. является СКВ. Если же объект находится рядом с датчиком, т.е. $L \square S$, то будем считать, что "видение" не имеет места и система не является СКВ. Например, если сравнивать фотокамеру и фотосканер – в первом случае имеет место "видение", а во втором "сканирование" ("осязание").

Указанное замечание относится и к "магнитному" случаю: если область измерения поля мала по сравнению с расстоянием до источника – имеем систему МКВ, если же расстояние до источника примерно равно размеру области измерения – имеем магнитный "сканер".



Рис. 1.6. Пояснение термина "видение" (случай МКВ):

S — характерный размер системы датчиков, т.е. размер области измерения,

L — характерное расстояние от источника поля до системы датчиков.

На рисунке 1.6. показаны: а) система МКВ (разновидность которой будет рассматриваться далее); б) магнитный дефектоскоп и в) установка для магнитной энцефалографии. Второй и третий случаи являются скорее системами осязания ("сканерами"), чем системами видения.

Задачей системы МКВ является определение параметров удалённого источника поля (магнита, наведённого магнитного момента и пр.). Магнитный дефектоскоп измеряет неоднородность наводимого поля, вызванную дефектами в объекте контроля. Установка магнитной энцефалографии (МЭГ) должна определить параметры магнитных диполей, которые, по сути, соответствуют активным областям головного мозга пациента.

1.4. Источники магнитного поля как объект наблюдения

Одним из ключевых моментов при создании систем МКВ является выбор источника магнитного поля. В общем случае система МКВ должна быть готова "увидеть" (то есть, определить, где и что именно находится) произвольный источник поля, для чего этот источник необходимо описать в заранее установленных терминах.

На практике чаще всего используются следующие реальные и идеализированные источники поля: постоянный магнит, бесконечно длинный прямой проводник с током, виток с током, идеальный соленоид, соленоид с конечными размерами.

При решении обратных задач реальные источники поля часто описывают некоторыми приближениями - моделями:

- точечный элемент тока,
- дискретное или непрерывное распределения точечных элементов тока,
- точечный магнитный диполь,
- дискретное или непрерывное распределения точечных диполей,
- мультипольное разложение источника.

В рамках данной работы решается лишь частная, простейшая задача, в которой модель источника поля выбирается наблюдателем заранее - в виде точечного магнитного диполя. Поле точечного магнитного диполя, как известно, описывается формулой:

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\boldsymbol{R}(\boldsymbol{m}\boldsymbol{R}) - R^2\boldsymbol{m}}{R^5}, \qquad (1.1)$$

где dB - вектор индукции магнитного поля источника в точке пространства, m - вектор магнитного момента диполя, R - радиус-вектор, направленный от источника в точку измерения.

1.5. Датчики и методы измерения магнитного поля

Одним из важных моментов при создании систем МКВ также является измерение магнитного поля. Знание возможностей и ограничений современных приборов для измерения магнитного поля позволит сформулировать требования к аппаратной части СМКВ и оценить возможности проектируемых установок.

1.5.1. Классификация датчиков магнитного поля

Датчики магнитного поля (ДМП) <u>по типу выходного сигнала</u> подразделяются на электрические (на выходе измеряемая электрическая величина – ток, напряжение, со-противление, частота), механические (магнитное поле преобразуется в механическую энергию), оптические (магнитное поле преобразуется в оптически наблюдаемую величину). Наиболее распространёнными (и удобными в использовании) являются магнито-электрические датчики [5,96].

Электрические ДМП <u>по измеряемой величине</u> подразделяются на скалярные (измеряют модуль вектора индукции магнитного поля), векторные (чувствительны к направлению вектора индукции магнитного поля, поэтому позволяют измерить одну, две или все три компоненты вектора индукции магнитного поля), датчики для измерения скалярного потенциала [37], датчики для измерения градиента магнитного поля (градиометры) [45,51,56,68].

<u>По количеству и конфигурации чувствительных элементов</u> ДМП можно разделить на дискретные, линейчатые и матричные [1].

1.5.2. Основные типы датчиков магнитного поля

Наиболее распространёнными типами ДМП являются [5,6]: элементы Холла; магниторезисторы; магнитотранзисторы; магнитодиоды; магнитотиристоры; приборы на полевых эффектах; датчики Виганда; магниторекомбинационные преобразователи; феррозонды; магнитная плёнка-визуализатор; квантовые прецессионные магнитометры; квантовые магнитометры, основанные на эффекте Зеельмана; сверхпроводящие квантовые магнитометры (СКВИД).

Подробную информацию о перечисленных приборах и их характеристиках можно найти в [8,1,5,6,96].

1.5.3. Основные характеристики датчиков магнитного поля

С точки зрения построения систем МКВ наиболее важными являются следующие характеристики ДМП [5,6].

- Чувствительность к магнитному полю отношение выходного сигнала датчика (тока, напряжения) к измеряемой индукции магнитного поля: *S* = *U*_{вых} / *B*.
- Размер чувствительной области размер области датчика, в которой сосредоточена активная часть преобразователя поля.
- Диапазон измеряемого поля диапазон значений индукции магнитного поля, при которых датчик измеряет поле в соответствии с характеристиками, заданными производителем.
- Порог чувствительности наименьшее значение изменения индукции магнитного поля, начиная с которого это изменение может быть измерено датчиком.
- Минимальный порог чувствительности датчика регламентируется так называемой "мертвой зоной", расположенной в диапазоне от $-B_{MUH}$ до $+B_{min}$.
- Нелинейность нелинейность характеристики преобразования датчика. Определяется как ΔF = (ε / U_{выхмакс})×100, где U_{выхмакс} значение сигнала на выходе датчика при B = B_{макс}, ε отклонение выходного сигнала U_{вых} от условной прямой, определяемой как U_{вых} -U_{макс}.



Рис. 1.7. Диапазоны чувствительности современных преобразователей магнитного поля [5]

1.5.4. Возможности современных датчиков магнитного поля

На рис. 1.7 представлена диаграмма, на которой продемонстрированы диапазоны чувствительностей современных преобразователей магнитного поля. Сведения на диаграмме имеют оценочный, приблизительный характер, однако и они позволяют оценить области применимости тех или иных ДМП.

В современных датчиках путём совмещения нескольких функций (модуляции, усиления, демодуляции сигнала, температурной стабилизации и стабилизации питания) в одном корпусе удаётся получить выигрыш в чувствительности [5,6]. Поэтому диапазоны использования современных интегральных ДМП несколько (обычно на один порядок) шире, чем на рис. 1.7.

1.5.5. Рекомендации по выбору датчиков магнитного поля для построения систем магнитного компьютерного видения

Рассмотрим некоторые современные ДМП с точки зрения возможности использования их для построения систем МКВ.

Современные технологии позволяют создавать датчики, которые измеряют одновременно 3 компоненты поля с высоким разрешением (десятки нТл для магниторезистивных датчиков, и десятки мкТл для датчиков Холла) и линейностью (нелинейность менее 0.1 %FS). Наиболее доступными и распространёнными датчиками являются датчики Холла и магниторезистивные датчики.

Датчики Холла имеют чувствительность, меньшую, чем у магниторезистивных датчиков, но при этом их размер очень мал (менее миллиметра в поперечнике). Магниторезистивные датчики, имея высокую чувствительность, обладают большим размером (единицы миллиметров). Кроме того, диапазон измеряемого поля у датчиков Холла шире, чем у магниторезистивных датчиков.

Необходимый тип датчика следует выбирать в зависимости от величины измеряемого поля (удалённости источника), необходимого пространственного разрешения и разрешения по полю. Следует ожидать, что "глаз" системы МКВ, построенный на датчиках Холла будет иметь меньший минимальный размер и при этом меньшую дальнозоркость. Система МКВ, построенная на магниторезистивных датчиках, напротив, будет иметь больший минимальный размер, но, при этом, большую дальнозоркость.

Использование феррозондовых и СКВИД датчиков возможно только при построении магнитных "глаз" больших размеров, обладающих очень большой дальнозоркостью.

В данной работе были использованы двухкомпонентные датчики 2SA-10 фирмы SENTRON [67,92], поскольку они были наиболее доступными на момент создания установки МКВ (2004 г.) и обладали при этом высокими пространственным разрешением, чувствительностью и линейностью. Для измерения 3х компонент вектора индукции поля в одной и той же точке пространства пришлось использовать 2 датчика и дополнительный сдвиг системы позиционирования.

1.6. Понятие прямой и обратной задачи

Разработка систем и методов МКВ подразумевает необходимость решения прямых и обратных задач [95].

В МКВ *прямая задача* заключается в вычислении поля, создаваемого источником с известными характеристиками. Обратная задача заключается в определении параметров источника по данным измерения создаваемого им поля.

Обратные задачи часто являются некорректно поставленными задачами.

Из трёх условий корректно поставленной задачи (существование решения, единственность решения и его устойчивость) в обратных задачах наиболее часто нарушается последнее ввиду конечной точности измерений и вычислений.

Если задача корректно поставлена, то остается неплохой шанс её численного решения с использованием устойчивого алгоритма, для чего задачу сначала необходимо переформулировать. Обычно это осуществляется добавлением дополнительных предположений, например, таких как гладкость решения. Этот процесс известен как *регуляризация*. Например, метод наименьших квадратов (МНК) может быть рассмотрен как простая форма регуляризации.

В данной работе и, например, в работах [12,13,19,21,40,74,94,99] при решении ОЗД используется регуляризация, заключающаяся в априорном выборе модели поля наблюдаемого источника – делается предположение о том, что наблюдаемому источнику соответствует точечный магнитный диполь. Далее посредством МНК параметры модели (положение, магнитный момент) подгоняются таким образом, чтобы поле най-денного источника соответствовало полю диполя.

1.7. Практические приложения систем измерения магнитного поля

Ниже рассмотрены приложения, в которых магнитное поле используется как переносчик информации между объектом наблюдения и датчиком:

- Магнитная интроскопия;
- Магнитный поиск;
- Биомагнитные задачи: магнитная кардиография и магнитная энцефалография;
- Магнитное позиционирование (локация).

1.7.1. Магнитная интроскопия

Магнитная интроскопия — это область техники, имеющая целью создание и применение методов и средств визуального представления с помощью магнитных полей внутренней структуры различных объектов контроля, непрозрачных для видимого света [1].

Принцип действия магнитного интроскопа представлен на рисунке 1.8. Посредством мощного источника магнитного поля внутри объекта контроля индуцируется магнитное поле. Если в объекте контроля имеется дефект (область, в которой магнитная проницаемость среды отличается от магнитной проницаемости материала объекта), силовые линии индуцированного поля искривляются. Это искажение поля (называемое полем рассеяние) фиксируется датчиком.



Рис. 1.8. Магнитная дефектоскопия

Датчик перемещается вдоль поверхности исследуемого объекта (на небольшом расстоянии от неё) и строится картина распределения поля, по всплескам на которой можно судить о расположении, величине и форме дефектов. Наиболее перспективны-

ми для использования в магнитных интроскопах являются индукционные, феррозондовые и магниторезистивные ДМП [1].

Решение задачи магнитной интроскопии обычно состоит из двух этапов: на первом этапе решается прямая задача, на втором – обратная [1]. При этом можно выделить два основных подхода.

Первый подход подразумевает, что прямая задача магнитной интроскопии сводится к вычислению магнитного поля рассеяния от дефекта заданной формы и размеров в ферромагнетике с известными магнитными свойствами в определённом намагничивающем поле, что на практике требует очень большого объёма вычислений. Обратная задача решается посредством выбора из всех результатов прямой задачи того, который наилучшим образом согласуется с результатом измерения поля реального дефекта.

Второй подход к решению прямой задачи состоит в моделировании дефекта некоторым распределением магнитного поля, имеющим аналитическое представление. На практике компоненты напряженности магнитного поля измеряются в некоторых точках в области над дефектом и в соответствии с принятой (аналитической) моделью решения прямой задачи по этим компонентам судят о геометрических размерах дефекта, т.е. решается обратная задача магнитной интроскопии [1,56].

В первом приближении возмущение поля, вызванное компактным дефектом в исследуемом объекте, можно считать полем диполя – в соответствии с известной задачей о сфере, помещенной в однородное магнитное поле [27]. Поэтому система МКВ на основе решения ОЗД может быть использована для решения задачи магнитной интроскопии.

Большой накопленный опыт решения задач и создания установок магнитной дефектоскопии и интроскопии может быть использован при создании систем МКВ. Так, опыт создания магниточувствительных матриц для приборов магнитной дефектоскопии [1] может быть использован и для решения задач МКВ.

1.7.2. Магнитный поиск

Магнитный поиск – это фиксирование локальных возмущений магнитного поля Земли (МПЗ) или наведённого однородного магнитного поля, вызванных присутствием объекта поиска [39].

Задача магнитного поиска напрямую связана с задачей МКВ, поэтому рассмотрим существующие методы и способы её решения.

Ферромагнитные объекты обладают либо собственным магнитным полем, либо искажают внешнее магнитное поле. И в том и другом случае величина магнитного поля в области измерения изменяет свою величину и направление, что и говорит о присутствии ферромагнитного объекта [3].

Рассмотрим наиболее распространённый способ решения задачи поиска ферромагнитных объектов по искажению МПЗ [3] (рис. 1.9). Ферромагнитный объект искажает силовые линии МПЗ, что фиксируется магнитометром.

Для магнитного поиска чаще всего используются векторные приборы, что позволяет получать дополнительную информацию об ориентации и размерах скрытого ферромагнитного объекта.

Наиболее распространённые феррозондовые поисковые приборы позволяют описанным способом обнаруживать объекты размером от 1 см до 1 м на глубине, соответственно, от 0.2 до 6 м [3]. Также осуществляются попытки использования СКВИД-магнитометров [62,63] и магниторезистивных датчиков [19,82,61]. Системы магнитного поиска используются для обнаружения полезных ископаемых, археологических объектов, неразорвавшихся мин, снарядов, расположенных у поверхности земли [62,63], на дне или под уровнем дна [30,43,79]. Известны системы магнитного поиска, позволяющие обнаруживать нарушителей периметра охраняемых объектов [17], и проносимые ими объекты, представляющие опасность (холодное и огнестрельное оружие) [18]. В работах [19,39,82,61,98] системы магнитного поиска используются для учёта дорожного трафика, обнаружения военной техники.



Рис. 1.9. Обнаружение ферромагнитного объекта по искажению магнитного поля Земли [3]

Существуют методы магнитного поиска, использующие дипольную модель наведённого поля для определения местоположения и параметров объектов [92,85]. При этом для решения ОЗД формируют соответствующую систему нелинейных уравнений и решают её численными методами. Данный подход близок методам МКВ.

1.7.3. Магнитная энцефалография

Задачей систем магнитной энцефалографии (МЭГ) является определение величины и положения зон нейросетевой активности мозга человека, отслеживание их значений во времени.

Электрическая активность нервных клеток головного мозга порождает электрические токи в голове. Токи внутри головы исследуются посредством измерения создаваемого ими магнитного поля вокруг головы, т.е. посредством снятия магнитной энцефалограммы [69]. Участки активности моделируются посредством токовых диполей (рис. 1.10), каждый из которых можно интерпретировать как "активный участок коры головного мозга".



Рис. 1.10. Задача магнитной энцефалографии. Здесь *X*_i, *m*_i – местоположение и магнитный момент активной области головного мозга.

Трудностью в МЭГ является необходимость измерения очень слабого магнитного поля, величина которого составляет всего 1 фТл - 1 пТл. Для измерения такого поля используют СКВИД датчики. Для того чтобы защититься от влияния внешних полей (помех), в МЭГ часто измеряют не только составляющие магнитного поля, но и их производные по координатам. Это осуществляют посредством использования СКВИДградиометров.

Главной особенностью задачи МЭГ является то, что источников магнитного поля может быть несколько, а их месторасположение и мощность заранее неизвестны. Таким образом, <u>имеет место решение сложной обратной задачи</u>, которая является некорректной, поэтому зачастую в МЭГ неприятным моментом является сильная чувствительность решения к ошибкам во входных данных.

Все существующие стратегии решения обратных задач в МЭГ можно разделить на две основные группы: 1) методы, которые делают какое-то модельное предположение об источнике - число источников и их примерное месторасположение полагается известным; 2) методы, которые делают как можно меньше предположений об источнике (используют минимум априорной информации).

Методы первой группы ("dipole fit") применяются, когда информация об источниках известна. Обычно в качестве модели источников используется небольшое число диполей. Их магнитные моменты и местоположение выбирается примерно, а затем уточняются в ходе итераций.

Методы второй группы ("distributed source models") позволяют найти "почти непрерывное" распределение источников магнитного поля. Используются сотни и тысячи дипольных источников, распределенных в интересующей области. Посредством итераций расположение и моменты диполей уточняются. В итоге получаются области активности, максимумы которых должны совпадать с реальными источниками активности. Решение получается путём подгонки данных методом наименьших квадратов (MHK).

При правильном предположении о характере источников точность определения координат источников при решении обратных задач МЭГ составляет порядка 2-3 мм.

Стандартный метод оценки положения простого источника заключается в поиске параметров эквивалентного токового диполя посредством поиска нелинейным методом наименьших квадратов (МНК) [68].

При наличии нескольких источников используют *мультидипольную* модель. Если одиночные диполи расположены достаточно далеко друг от друга, можно решать соответствующие обратные задачи независимо друг от друга. В противном случае параметры диполей определяются в ходе последовательного итеративного уточнения, так чтобы создаваемое ими поле было наиболее похоже на исходные данные измерений поля. Важными моментами в этих подходах являются выбор правильного числа диполей модели, а также такой выбор начальных значений параметров диполей, который приведёт к глобальному (а не локальному) минимуму задачи.

При решении обратной задачи в МЭГ обычно используют либо очень малоразмерные модели (эквивалентные токовые диполи), либо очень многоразмерные (распределение тока). Недостатком первых является то, что они дают неверное решение, если источник поля является распределённым. Вторые же дают слишком "размазанное" изображение источника. В качестве "золотой середины" авторы [75,76] предлагают при решении обратных задач использовать мультипольные разложения. Авторы показали, что мультипольная модель источника имеет значительные преимущества перед дипольной при описании распределённых источников. Для оценки того, насколько точно выбрана модель и насколько точно определены её параметры посредством МНК, предлагается следующий критерий [68]:

$$g = 1 - \left[\sum_{i=1}^{n} \left(b_i - \hat{b}_i \right)^2 / \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right]$$
(1.2)

Здесь $b_1, ..., b_n$ — экспериментальные данные измерений поля, $\hat{b}_1, ..., \hat{b}_n$ — данные, полученные в результате решения обратной задачи. Если g = 1, модель полностью согласуется с данными измерений. Если g = 0 — модель совершенно отличается от истинной и не может описать поле, отличное от 0. Отклонение g от 1 вызывается шумами измерений и отличиями выбранной модели от истинной.

Огромный опыт, накопленный в области МЭГ, безусловно, может быть использован при построении систем МКВ. И наоборот, новые методы МКВ могут найти применение при решении задач МЭГ.

1.7.4. Магнитная кардиография

Задача магнитной кардиографии (МКГ) заключается в изучении активности сердца по данным измерения создаваемого сердцем магнитного поля.

Одним из этапов анализа МКГ сигнала является локализация биомагнитных источников. Этот этап подразумевает решение обратной магнитостатической задачи, поскольку частотный диапазон биомагнитных сигналов близок к нулю.

Источник возбуждения сердца моделируется как магнитный диполь, координаты которого необходимо вычислить. Для решения этой задачи могут использоваться как аналитические, так и численные подходы [7,8,24].

Очевидно, что задача МКГ, также как и задача МЭГ, является частным случаем МКВ.

1.7.5. Магнитное позиционирование

Задачей систем магнитного позиционирования или локации (МПЛ) является определение местоположения и ориентации объектов посредством использования магнитного поля.

Классификация систем МПЛ

<u>По числу и типу определяемых координат</u> можно выделить следующие наиболее распространённые классы систем МПЛ:

- 2D системы позиционирования, позволяющие определять две декартовы координаты местоположения объекта на плоскости;
- (2+1)D системы позиционирования, позволяющие определять две декартовы координаты местоположения объекта на плоскости и одну координату (угол), задающую направление объекта в этой плоскости;
- 3D системы позиционирования, позволяющие определять три декартовы координаты, задающие местоположение объекта в пространстве;
- (3+2)D или 5D системы позиционирования, позволяющие определять три декартовы координаты, задающие местоположение и две координаты (угла), задающие направление выбранной оси объекта в пространстве;
- (3+3)D или 6D системы позиционирования, позволяющие определять три декартовы координаты, задающие местоположение и три координаты (угла), задающие ориентацию объекта (как твёрдого тела) в пространстве.

<u>По априори известной информации об источнике поля</u> существующие системы МПЛ можно разделить на два типа:

- Системы, в которых известны основные параметры источника поля (например, вектора магнитного момента дипольного источника). В таких системах чаще всего имеет место решение прямой задачи для источника поля.
- Системы, в которых об источнике поля известно только, какого он типа (например, что источник представляет собой точечный магнитный диполь). В таких системах часто приходится решать обратную задачу для источника магнитного поля.

Приложения систем МПЛ

На сегодняшний день <u>системы МПЛ наиболее широко используются для решения</u> <u>следующих практических задач</u>:

- определение положения шлема пилота в кабине самолёта (часто используется для целеуказания) [16,70,83];
- оцифровка движений человека для "оживления" мультипликационных и компьютерных персонажей, управления робототехническими системами, в компьютерных играх и системах дополненной реальности [52,55,81];
- определение положения капсулы или кончика катетера (эндоскопа) при медицинском исследовании кровеносных сосудов и пищевода человека [89,101];
- определение положения 5D,6D-манипулятора, используемого для управления каким-либо устройством или компьютерной программой [20,21];
- навигация автономных робототехнических устройств и датчики положения дистанционно управляемых исполнительных механизмов [57].

Методы решения задач МПЛ

Далее рассмотрим основные типы систем МПЛ и <u>методы решения задачи</u>, реализуемые в этих системах. Для удобства будем называть рассматриваемые системы системами первого типа, второго типа и т.д.



Рис. 1.11. Принцип действия системы МПЛ первого типа.

XYZ – система координат, m₁,m₂,m₃ – три взаимно-перпендикулярных дипольных источника поля (соленоиды), *X* – радиус-вектор, задающий местоположение системы датчиков, привязанных к объекту

<u>Первым</u> и наиболее распространённым <u>типом систем</u> МПЛ являются системы, в которых используется управляемый источник магнитного поля, представляющий собой систему трёх взаимно-перпендикулярных катушек индуктивности, центры которых находятся в одной точке (эта точка обычно выбирается началом системы координат). Параметры источника (магнитные моменты катушек, их ориентация и местоположение) известны априори. Измеряются три компоненты вектора индукции магнит-

ного поля в одной и той же точке. В качестве датчиков обычно используют три взаимно-перпендикулярные катушки индуктивности с центром в одной точке (датчик в этом случае похож на источник). Также в качестве датчиков могут использоваться и любые другие датчики, позволяющие измерять по три компоненты поля в одной точке (рис. 1.11).

В задаче предполагается, что поле каждой катушки описывается дипольной моделью:

$$B_{k} = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \frac{3(R_{i}m_{i})R_{k} - R^{2}m_{k}}{R_{k}^{5}} .$$
(1.3)

Здесь R_k – вектор, задающий положение датчика относительно источника, m_k – магнитный момент источника, который определяет ориентацию источника, B_k - вектор индукции магнитного поля.

Поскольку источник содержит три катушки, в процессе измерений получают три набора по три значения компонент поля B_k . Следует отметить при этом, что значения компонент поля получаются в системе координат, привязанной к датчику.

На основании выражения (1.3) можно записать систему уравнений, решая которую можно определить местоположение и ориентацию датчика в системе координат источника, то есть решить задачу позиционирования.





Рис. 1.12. Определение местоположения и ориентации кончика катетера посредством системы МПЛ первого типа. Исполь-

зуются трёх-осевые магнитоимпендансные (magneto-impendance) датчики поля [101]. Рис. 1.13. Использование системы МПЛ первого типа для анимирования персонажей игр и мультфильмов [81]. Показаны система координат ХҮZ, привязанная к источнику поля (3D source), датчики (3D sensor), располагаемые на теле актёра

Данный метод получил достаточно широкое распространение, поскольку достаточно прост в реализации, имеет большую область действия (до 0.5–2 м) и высокую точность определения координат (около 2–5 мм) и ориентации (около 3 градусов) контролируемых объектов [16]. Следует отметить, что системы первого типа являются (3+3)D-системами позиционирования.

На рисунках 1.12, 1.13 представлены различные приложения систем МПЛ первого типа: определение местоположения и ориентации шлема пилота [70]; определение местоположения и ориентации кончика медицинского катетера или эндоскопа [101]; анимирование персонажей игр и мультфильмов [52,81]; перчатка виртуальной реальности [55].

Несмотря на все перечисленные выше достоинства, системы МПЛ первого типа не являются системами МКВ, поскольку вся информация об источнике априори из-

вестна наблюдателю (решается прямая, а не обратная задача). Кроме того, источник связан с наблюдателем, а в процессе измерений потребляет электроэнергию.

К <u>системам МПЛ второго типа</u> условно отнесём систему, в которой магнитное поле генерируется двухмерной матрицей соленоидов, параметры и координаты которых известны [87]. К искомому объекту прикрепляется миниатюрная катушка, которая служит датчиком, измеряющим поле. Управляя током соленоидов матрицы (в каждый момент времени могут быть активны один или несколько соленоидов) и измеряя отклик измеряющей катушки, можно определить местоположение и ориентацию катушки в пространстве над матрицей (рис. 1.14).

При решении задачи используется дипольная модель источника поля (для записи поля одного соленоида матрицы). Авторам удалось записать необходимую систему уравнений и решить её методом наименьших квадратов (модифицированной версией алгоритма Левенберга-Марквардта).

В пределах области действия системы (порядка 300х300х200 мм) авторам удалось достичь погрешности определения координат менее 1 мм и 0.6 градусов.

Системы МПЛ второго типа не являются системами МКВ, поскольку наблюдаемые источники поля являются известными и управляемыми. Также недостатком этих систем является сложность решения задачи.



Рис. 1.14. Система МПЛ второго типа [87]. Показан массив источников поля - сонаправленных катушек (2D-array of transmitting coils), датчик – приёмная катушка (Subminiature receiving coil). Определяется положение датчика в системе координат XYZ, связанной с массивом источников

В системах МПЛ <u>третьего типа</u> в качестве источника поля используется один точечный дипольный источник с неизвестными параметрами. Чаще всего в качестве него используют постоянный магнит, но может использоваться и соленоид. Измеряется одна или три компоненты поля источника в нескольких точках пространства.

В системах третьего типа решается обратная задача для одного точечного магнитного диполя (ОЗД). В общем случае эту задачу можно сформулировать следующим образом (рис. 1.15).

Имеется один точечный дипольный источник. Поле этого источника в точках измерения описывается посредством выражения:

$$B_{ak} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(R_{aj}m_j)R_{ak} - R_a^2 m_k}{R_{ak}^5} .$$
(1.4)

Здесь B_{ak} - значение вектора индукции магнитного поля в некоторой точке пространства r_{ak} , R_{ak} – радиус-вектор, проведённый из источника в *a*-ую точку измерения, m_k – магнитный момент источника.

По данным измерения вектора индукции поля B_a в нескольких точках пространства возле источника необходимо определить местоположение X и ориентацию mисточника в пространстве, относительно системы координат *XYZ*, в которой производились измерения поля.



Рис. 1.15. Принцип действия системы МПЛ третьего типа

Решение сформулированной задачи чаще всего заключается в составлении системы нелинейных уравнений на основании выражения (1.4) и данных измерений в нескольких точках (число точек должно быть достаточно велико). Эту систему уравнений решают одним из существующих численных методов нелинейной оптимизации.

Как показано в работе [18], данный способ решения не всегда (в единицах процентов случаев) даёт решение задачи при накладывании ограничения на время решения задачи. Многое при этом определяется начальным приближением решения, дополнительными граничными условиями.



Рис. 1.16. Система МПЛ третьего типа [19] – "Магнитный локатор". *Слева*: постановка задачи – необходимо найти положение **R** и магнитный момент **M** диполя по данным измерения трёх компонент вектора индукции поля в точках 1 и 2. *Справа*: внешний вид установки МПЛ.

Системы третьего типа, используемые на практике (например, система, изображенная на рис. 1.16) [19-21,74], позволяют измерять местоположение объектов с точностью около 0.5÷5 мм на расстояниях от 5 до 100 см. Ориентация объектов определяется с точностью порядка 2÷10 градусов.

Следует отметить, что системы МПЛ третьего типа являются (3+2)D-системами позиционирования, поскольку ориентация объекта, к которому прикреплён дипольный источник, определяется с точностью до угла вращения вокруг вектора магнитного момента источника.

Очевидно, что в системах МПЛ третьего типа имеет место решение задачи МКВ по данным измерения вектора индукции магнитного поля в нескольких точках.

<u>Системы</u> МПЛ <u>четвертого типа</u> похожи на системы третьего типа, за тем исключением, что в них помимо вектора индукции поля источника также измеряется значение его градиента. При решении ОЗД в данном случае используется соотношение:

$$\begin{pmatrix} \partial_x B_x & \partial_y B_x & \partial_z B_x \\ \partial_x B_y & \partial_y B_y & \partial_z B_y \\ \partial_x B_z & \partial_y B_z & \partial_z B_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$
(1.5)

Здесь B_k - значение вектора индукции магнитного поля в некоторой точке пространства r_k , $G_{ij} \equiv \partial_i B_j$ - градиент поля, R_k – радиус-вектор, проведённый из источника в точку измерения.



Рис. 1.17. Магнитоиндуктивный датчик градиента магнитного поля системы МПЛ четвертого типа [94]

Для измерения градиента поля в системах МПЛ четвертого типа обычно используют несколько разнесённых в пространстве, датчиков поля, а вычисление градиента осуществляется методом конечных разностей [19], который не всегда даёт самую точную оценку градиента. Примечательно, что на практике также используются градиометры, основанные на измерении переменного магнитного поля (рис. 1.17) [94], хотя, существуют датчики, позволяющие измерять градиент постоянного магнитного поля вдоль заданного направления [51].

Главным достоинством систем МПЛ четвертого типа с точки зрения МКВ, является сравнительная простота решения ОЗД. Однако для получения точного решения необходимо точно измерять значение тензора градиента поля, что на практике достаточно трудно сделать, особенно для случая постоянного поля. Также в случае, когда определитель тензора градиента поля равен или близок к нулю, при нахождении решения возникнут трудности (авторы работы [94] на эту особенность не указывают).

<u>В системах</u> МПЛ <u>пятого типа</u> учитывают геометрию источника постоянного поля (магнита с ярко выраженной прямоугольной формой), что позволяет, в отличие от систем третьего и четвертого типа, избавиться от неоднозначности решения относительно угла поворота искомого объекта вокруг вектора магнитного момента магнитаисточника [100]. То есть, системы пятого типа решают задачу (3+3)D – позиционирования.

В системе МПЛ пятого типа производится решение обратной задачи для источника, модель которого уже более сложная, чем дипольная. Решение подразумевает запись сложной системы нелинейных уравнений высоких порядков и использование численных методов (метода наискорейшего спуска, метода Гаусса-Ньютона или метода Левенберга-Марквардта) для её решения.

Применение систем МПЛ пятого типа для решения задач МКВ очень заманчиво, однако подразумевает необходимость высокой точности измерения поля, большую сложность решения. Следует отметить, что данные МПЛ пока реализованы только в виде компьютерной модели.

1.7.6. Заключение к разделу 1.7

Как было продемонстрировано выше, задача МПЛ достаточно актуальна и широко используется на практике. При этом разработка новых методов продолжается до сих пор.

Наибольшее распространение получили системы МПЛ первого типа, однако они не подходят для решения обратных задач МКВ. Самыми подходящими для реализации систем МКВ являются системы МПЛ третьего и четвертого типов. В этих системах решение ОЗД подразумевает либо составление и решение системы нелинейных уравнений, что не всегда приводит к правильному результату, либо измерение не только поля, но и градиента с высокой точностью, что трудно реализовать на практике, особенно в случае постоянного магнитного поля.

1.8. Аналитическое решение обратной задачи для одного точечного магнитного диполя

В основе большинства рассмотренных ранее приложений, использующих магнитного поле в качестве переносчика информации, лежит решение ОЗД. Везде решение этой получалось с использованием численных алгоритмов.

В работе [64] получено точное аналитическое решение ОЗД. К одному из главных достоинств предлагаемого метода можно отнести возможность разбиения процесса решения ОЗД на ряд независимых этапов:

- 1) измерение поля в точке;
- 2) нахождение производных поля в точке;
- 3) выбор системы координат, в которой будет производиться решение;
- 4) аналитическое решение ОЗД в выбранной системе координат.

На практике этапы 2 и 3 предполагают использование численных методов. Таким образом, окончательное решение задачи всё равно является приближённым.

Авторы [64] также указывают на особенность решения ОЗД, имеющую место в случае, когда измерения проводятся в плоскости, содержащей диполь и перпендикулярной ему. Специальное решение для этого случая также рассматривается. К сожалению, в работе не приводится описание соответствующего алгоритма решения ОЗД.

1.9. Выводы к главе 1

В этой главе мы рассмотрели различные задачи и приложения, в которых в качестве переносчика информации используется магнитное поле. Как было показано, область приложений систем, использующих магнитное поле, очень широка. В большинстве рассмотренных приложений используется дипольная модель источника магнитного поля. При этом, источник поля может быть постоянным, импульсным и переменным. Для измерения поля используются в основном магниторезистивные, магнито-индуктивные, феррозондовые и СКВИД датчики, позволяющие измерять одну или три компоненты вектора индукции магнитного поля. Также распространены системы, в которых используются данные измерений градиента поля. Многие приложения предусматривают решение ОЗД посредством составления системы нелинейных уравнений для поля источника в нескольких точках измерения и решении этой системы численными методами (часто методом наискорейшего спуска, методом Гаусса-Ньютона и методом Левенберга-Марквардта). При этом, решение ОЗД не всегда может быть получено за ограниченное время (примерно в 5-10% попыток), что чаще всего обусловлено плохим выбором начального приближения решения. Также во многих работах не учитывается отмеченная выше особенность решения.

Таким образом, возникает необходимость в разработке метода решения ОЗД, свободного от указанных недостатков.

В таблице 1.1 на фоне рассмотренных приложений систем измерения магнитного поля очерчена область применения предлагаемого в данной работе метода решения ОЗД и, основанного на нём методе решения ОЗД-N.

Габлица 1.1. Области применения предлагаемого метода решения О	3Д
(Здесь Х - расстояние от источника до системы датчиков,	

Тип источника Способ наблюдения	постоянный	переменный	наведённый
"Осязание" (X~S)	Датчики (реле, по- ложения, угла по- ворота и т.п.)	Кардиография	Дефектоскопия
"Близорукое" видение (X>S)	Позиционирование (3го, 5го типов)	Энцефалография, Позиционирование (2го типа)	Интроскопия, обнаружение фер- ромагнитных объ- ектов
Видение (X>>S)	Позиционирование (3го, 5го типов)	Позиционирование (1го, 4го типов)	Обнаружение ферромагнитных объектов

S - характерный размер системы датчиков)

<u>Примечание</u>: серым цветом отмечены случаи, в которых возможно применение предлагаемого в данной работе метода решения ОЗД. Использование разработанного метода для решения ОЗД в случае переменного источника поля принципиально возможно, но в данной работе не рассматривалось.

Следует отметить, что в некоторых рассмотренных приложениях встречаются отдельные "части" метода решения ОЗД, представленного в данной работе, например, использование соотношения между полем и его производной для определения местоположения диполя [94], или использование для решения задачи массива датчиков, измеряющих компоненты вектора индукции магнитного поля [74] в дискретном наборе точек. Однако точно такого же метода решения ОЗД как в данной работе в открытых источниках найти не удалось. На основании рассмотренных в данной главе способов измерения магнитного поля и решения прямых и обратных задач, имеющих место в различных приложениях, сформулируем следующие

рекомендации по выбору датчиков систем измерения неоднородных магнитных полей, пригодных для построения систем МКВ:

При решении задач МКВ необходимо измерять неоднородное магнитное поле с высокой точностью, высоким разрешением по полю и пространственным координатам. Поэтому наиболее подходящими для создания систем МКВ могут быть признаны следующие типы датчиков:

- датчики Холла они компактны, имеют достаточно высокую линейность и большой динамический диапазон.
- Магниторезистивные датчики (АМР,ГМР) компактны, имеют хорошую линейность (которую можно повысить путём калибровки), большой динамический диапазон, более высокую чувствительность (по сравнению с датчиками Холла).
- Феррозондовые датчики имеют высокую чувствительность, нелинейны, размер может быть малым или большим... Лучше подходят для построения магнитных сканеров, а не систем компьютерного видения...

Когда система МКВ предназначена для работы со слабыми полями и на больших расстояниях от источника, она <u>может иметь большой характерный размер области из-</u><u>мерения.</u> В этом случае могут быть использованы, например, такие датчики, как СКВИД.

Глава 2. Решение обратной задачи для точечного магнитного диполя

В основе системы МКВ, рассматриваемой в данной работе, лежат два предположения. Во-первых, предполагается, что источником поля служит точечный магнитный диполь, а, во-вторых, область наблюдения, в которой измеряется поле источника, считается малой по сравнению с расстоянием до источника. В соответствии с этим, в разделах 2.1 и 2.2 данной главы формулируется обратная задача для одного точечного магнитного диполя (ОЗД) и предлагается метод и алгоритм её решения, рассматриваются особенности предлагаемого метода решения ОЗД и различные факторы, влияющие на точность решения. В разделах 2.3-2.8 рассматриваются различные частные случаи постановки ОЗД и соответствующие методы её решения. В разделе 2.9 рассматривается постановка обратной задачи для нескольких слабо взаимодействующих точечных диполей (ОЗД-N), метод и алгоритм её решения. В заключительном разделе рассматривается постановка задачи в случае, когда носителем информации служит не магнитное, а другие физические поля.

2.1. Постановка обратной задачи для точечного магнитного диполя

Постановку ОЗД можно сформулировать следующим образом.



Рис. 2.1. Обратная задача для одного точечного магнитного диполя

Пусть точечный магнитный диполь m (рис. 2.1) расположен в точке X лабораторной системы координат (ЛСК). Он создаёт вокруг себя статическое магнитное поле B(r). Цель решения ОЗД заключается в том, чтобы определить пространственные координаты X, задающие положение диполя, а также величину и ориентацию его магнитного момента *m* по данным измерения создаваемого им магнитного поля $B(r_a)$ в *N* точках пространства r_a (a = 1,...,N), при этом считается, что область измерения поля имеет характерный размер *S*, много меньший, чем расстояние $R_0 = |R_0|$ до диполя: $S \square R_0$.

Далее используются следующие обозначения:

X – радиус-вектор, задающий положение диполя в пространстве относительно лабораторной системы координат с центром в точке *O* (рис. 2.1);

m – вектор наблюдаемого магнитного диполя (объект наблюдения);

a – номер точки измерения, a = 1, ..., N;

 r_a – радиус-вектор *а* -й точки измерения в ЛСК;

 $\langle \boldsymbol{r} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_{a}$ – радиус-вектор центра области измерения;

 $r'_{a} = r_{a} - \langle r \rangle$ – радиус-вектор, задающий положение *a* -й точки измерения относительно центра области измерения;

 R_a – радиус-вектор, проведённый от диполя в точку измерения с номером a;

 \boldsymbol{R}_0 – радиус-вектор, проведённый от точки \boldsymbol{X} в центр области измерения $\langle \boldsymbol{r} \rangle$;

 $B_{a} = B(r_{a})$ – вектор индукции магнитного поля в точке измерения с номером *a*;

S – характерный размер области измерения;

i, j, k, l = 1, 2, 3 – значения индексов, нумерующих компоненты векторов и тензоров.

2.2. Решение обратной задачи для точечного магнитного диполя по данным измерения трёх компонент поля

На сегодняшний день существует несколько различных решений сформулированной ОЗД. Так, в работе [64] получено аналитическое решение задачи. Однако, при этом, не сказано, как получить решение по данным измерения поля. В работах [13,38,40,43] приводится аналитическое решение, основанное на соотношении между полем и его градиентом. Предполагается при этом, что значение градиента поля измеряется непосредственно датчиками (градиометрами). Решение ОЗД, основанное на численных методах решения системы нелинейных уравнений для поля диполя в нескольких точках измерения [19,74], предполагает сравнительно большой размер области измерения. Ниже предлагается метод, отличающийся от остальных тем, что решение ОЗД получается непосредственно по данным измерения компонент вектора индукции в компактной малой области.

2.2.1. Линейное приближение

Поле точечного диполя в вакууме выражается (в системе СИ) формулой

$$\boldsymbol{B}_{a} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}_{a}) = \frac{\mu_{0}}{4\pi R_{a}^{5}} \Big[3\boldsymbol{R}_{a}(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{R}_{a}) - R_{a}^{2}\boldsymbol{m} \Big], \qquad (2.1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м.

В индексной форме выражение (2.1) может быть записано как

$$B_{ak} = B(R_{ak}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3R_{ak}(m_j R_{aj}) - R_a^2 m_k}{R_a^5}.$$
 (2.2)

Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Предположим, что для поля $B_{ak} = B(R_{ak}) = B(R_{0k} + r'_{ak})$ в области измерения может быть использована линейная аппроксимация

$$B_{ak} \cong B_{0k} + T_{ki} \cdot r'_{ai}, \qquad (2.3)$$

где B_{0k} – постоянная составляющая индукции поля, а T_{ki} – тензор второго ранга, одинаковый для всех точек измерения. Данное предположение возможно, если точки измерения находятся достаточно близко друг к другу так, что размер области наблюдения *S* мал по сравнению с масштабом изменения поля в этой области.

Раскладывая $B(R_{ak}) = B(R_{0k} + r'_{ak})$ в ряд Тейлора возле центра области измерения R_{0k} при условии, что характерный размер области измерения $S \square R_0$, и оставляя только два первых члена разложения, получаем

$$B_{ak} \equiv B(R_{0k} + r'_{ak}) \approx B(R_{0k}) + \left(\frac{\partial}{\partial R_{ai}}B(R_{ak})\right)_{R_{ak} = R_{0k}} \cdot r'_{ai} .$$
(2.4)

Покажем, как из выражений (2.3), (2.1) и (2.4) по известным значениям поля $B_{ak} = B(r_{ak})$ найти величины B_{0k} и T_{ki} , используя метод наименьших квадратов (МНК).

Как следует из рис. 2.1, положение точек измерения относительно центра области измерения $\langle r_k \rangle$ задаётся выражением:

$$r'_{ak} = r_{ak} - \langle r_k \rangle . \tag{2.5}$$

Просуммировав правую и левую части (2.5) по всем точкам измерения и поделив на *N* получим:

$$\frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N}r'_{ak} = 0.$$
(2.6)

Теперь аналогичным образом просуммируем (2.3) по всем точкам измерения и поделим на N:

$$\frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N}B_{ak} = \frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N}B_{0k} + \frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N}T_{ki} \cdot r'_{ai} .$$
(2.7)

Пользуясь тем, что B_{0k} и T_{ki} не зависят от номера точки измерения, получим:

$$\frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N}B_{ak} = B_{0k} + T_{ki} \cdot \frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N}r'_{ai}.$$
(2.8)

Согласно (2.6) сумма в правой части этого равенства равна нулю, поэтому можем записать:

$$\frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N}B_{ak} = B_{0k}.$$
(2.9)

Величина в левой части полученного равенства есть среднее по области измерения значение вектора индукции магнитного поля:

$$\left\langle B_k \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N B_{ak} \,. \tag{2.10}$$

Таким образом, мы показали, что B_{0k} совпадает с $\langle B_k \rangle$ и что B_{0k} может быть найдено по данным измерения.

Перепишем (2.3), учитывая (2.10):

$$B_{ak} = \langle B_k \rangle + T_{ki} r'_{ai} \quad . \tag{2.11}$$

Умножим теперь (2.11) справа на r'_{aj} :

$$B_{ak}r'_{aj} = \langle B_k \rangle r'_{aj} + T_{ki}r'_{ai}r'_{aj}$$

$$(2.12)$$

и просуммируем по всем точкам измерения:

$$\sum_{a=1}^{N} B_{ak} r'_{aj} = \sum_{a=1}^{N} \langle B_k \rangle r'_{aj} + \sum_{a=1}^{N} T_{ki} r'_{aj} r'_{aj} .$$
(2.13)

Воспользуемся тем, что $\langle B_k \rangle$ и T_{ki} не зависят от номера точки измерения:

$$\sum_{a=1}^{N} B_{ak} r'_{aj} = \langle B_k \rangle \sum_{a=1}^{N} r'_{aj} + T_{ki} \sum_{a=1}^{N} r'_{ai} r'_{aj} .$$
(2.14)
Из (2.6) следует, что первое слагаемое в правой части равно нулю, поэтому выражение (2.14) преобразуется к виду

$$\sum_{a=1}^{N} B_{ak} r'_{aj} = T_{ki} \sum_{a=1}^{N} r'_{ai} r'_{aj} .$$
(2.15)

Отсюда можно найти тензор T_{ki} . Для этого умножим (2.15) справа на матрицу, обратную к форм-факторной матрице $F_{ij} \equiv \sum_{a=1}^{N} r'_{ai} r'_{aj}$:

$$\sum_{a=1}^{N} B_{ak} r'_{aj} \cdot F_{jl}^{-1} = T_{ki} \cdot F_{ij} \cdot F_{jl}^{-1}, \qquad (2.16)$$

откуда найдём

$$T_{kl} = \sum_{a=1}^{N} B_{ak} r'_{aj} \cdot F_{jl}^{-1}.$$
 (2.17)

Таким образом, удаётся выразить тензор T_{ki} через первый момент измеренных значений поля B_{ak} и матрицу форм-фактора F_{ij} области измерения.

Теперь покажем, как по полученным B_{0k} и T_{ki} можно решить ОЗД, то есть найти значения векторов m_k и X_k .

Для этого вычислим значение поля (2.1) и его первой производной в произвольной точке пространства R_{ak} :

$$B(R_{ak}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3R_{ak}(m_j R_{aj}) - R_a^2 m_k}{R_a^5}, \qquad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial R_{ai}}B(R_{ak}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3}{R_a^5} \left[\left(m_j R_{aj} \right) \delta_{ik} + m_i R_{ak} + R_{ai} m_k - 5 \left(m_j R_{aj} \right) R_{ai} R_{ak} \frac{1}{R_a^2} \right]$$
(2.19)

Умножив (2.19) на *R*_{*ai*} и сопоставляя результат с (2.18) можно получить известное [13,38,40,43] соотношение между полем и его первой производной (градиентом):

$$\left(\frac{\partial}{\partial R_{ai}}B(R_{ak})\right)R_{ai} = -3B(R_{ak})$$
(2.20)

Подставив (2.18) и (2.19) в разложение (2.4) и сопоставив результат с предположением (2.3), получим соотношения:

$$B_{0k} = B(R_{0k}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3R_{0k}(m_j R_{0j}) - R_0^2 m_k}{R_0^5}$$
 (2.21)

$$T_{ki} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3}{R_0^5} \left[\left(m_j R_{0j} \right) \delta_{ik} + R_{0k} m_i + R_{0i} m_k - 5 \left(m_j R_{0j} \right) R_{0k} R_{0i} \frac{1}{R_0^2} \right].$$
(2.22)

Сопоставляя (2.21) и (2.22) с (2.20), получим соотношение

$$T_{ki}R_{0i} = -3B_{0k} \ . \tag{2.23}$$

Из данного уравнения можно найти значение вектора R_{0i} , а значит, и X_i , поскольку (см. рис. 2.1)

$$X_i = \langle r_i \rangle - R_{0i} \quad . \tag{2.24}$$

Подставив найденное значение R_{0i} в (2.2) можно также найти значение вектора магнитного момента m_i

$$m_{i} = \frac{4\pi}{\mu_{0}} \left[\frac{3}{2} R_{0} \left(B_{0j} \cdot R_{0j} \right) R_{0i} - R_{0}^{3} B_{0i} \right] .$$
(2.25)

Таким образом, нам удалось найти решение ОЗД, используя данные измерения поля B_{ak} в малой компактной области, предположение о применимости линейного приближение (2.3), метод наименьших квадратов и соотношение (2.20) между полем и его градиентом.

2.2.2. Квадратичное приближение

На примере случая квадратичного приближения покажем, как перейти от линейного приближения (2.3) к аппроксимациям поля более высоких порядков по r'_a , что должно привести к более точному решению ОЗД (при тех же исходных данных).

Предположим, что для поля диполя в точках измерения (сосредоточенных в достаточно небольшой области и достаточно далеко от диполя) выполняется квадратичное приближение:

$$B_{ak} \cong B_{0k} + T_{ki}r'_{ai} + Q_{kij}r'_{ai}r'_{aj}, \qquad (2.26)$$

где B_{0k} , T_{ki} и Q_{kij} – не зависят от номера a точки измерения.

Значения вектора B_{0k} и тензоров T_{ki} , Q_{kij} можно найти из (2.26) посредством МНК (подробнее о том, как это делалось на практике, показано в разделе 2.5).

Разложение поля диполя (2.2) в степенной ряд по степени r'_{ak} возле точки R_{0k} имеет вид

$$B_{ak} \equiv B(R_{0k} + r'_{ak}) \approx .$$

$$\approx B(R_{0k}) + \left(\frac{\partial}{\partial R_{ai}}B(R_{ak})\right)_{R_{ak}=R_{0k}} \cdot r'_{ai} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial R_{ai}\partial R_{aj}}B(R_{ak})\right)_{R_{ak}=R_{0k}} \cdot r'_{ai}r'_{aj} .$$
(2.27)

Здесь оставлены только три первых слагаемых.

Вычислим значение поля диполя (2.2) и две его первых производных в произвольной точке R_{ak} :

$$B(R_{ak}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3R_{ak}(m_j R_{aj}) - R_a^2 m_k}{R_a^5}, \qquad (2.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial R_{ai}}B(R_{ak}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3}{R_a^5} \left[\left(m_j R_{aj} \right) \delta_{ik} + m_i R_{ak} + R_{ai} m_k - 5\left(m_j R_{aj} \right) R_{ai} R_{ak} \frac{1}{R_a^2} \right]$$
(2.29)

$$\frac{\partial^{2}}{\partial R_{ai}\partial R_{aj}}B(R_{ak}) =
= \frac{3\mu_{0}}{4\pi} \left[\frac{1}{R_{0}^{5}} \left(m_{j}\delta_{ik} + m_{i}\delta_{kj} + m_{k}\delta_{ij} \right) - \frac{5}{R_{0}^{7}} \left(R_{0j}R_{0k}m_{i} + R_{0i}R_{0j}m_{k} + R_{0i}R_{0k}m_{j} \right) - \frac{5m_{i}R_{0i}}{R_{0}^{7}} \left(R_{0j}\delta_{ik} + R_{0i}\delta_{kj} + R_{0k}\delta_{ij} \right) + \frac{35m_{i}R_{0i}}{R_{0}^{9}}R_{0i}R_{0j}R_{0k} \right]$$
(2.30)

Здесь (2.28) и (2.29) были получены ранее (см. выражения (2.18) и (2.19)).

Умножая (2.29) на R_{ai} , мы получали соотношение (2.20) между полем и его первой производной.

Аналогичным образом, умножая (2.30) на R_{aj} можно получить соотношение, связывающее первую и вторую производные поля:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R_{ai}\partial R_{aj}}B(R_{ak})\right)R_{ai} = -4\left(\frac{\partial}{\partial R_{ai}}B(R_{ak})\right)$$
(2.31)

Подставив (2.28) - (2.30) и в разложение (2.27) и сопоставив результат с предположением (2.26), получим соотношения:

$$B_{0k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3R_{0k} \left(m_j R_{0j}\right) - R_0^2 m_k}{R_0^5},$$
(2.32)

$$T_{ki} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3}{R_0^5} \left[\left(m_j R_{0j} \right) \delta_{ik} + R_{0k} m_i + R_{0i} m_k - 5 \left(m_j R_{0j} \right) R_{0k} R_{0i} \frac{1}{R_0^2} \right],$$
(2.33)

$$Q_{kij} = \frac{3\mu_0}{8\pi} \left[\frac{1}{R_0^5} \left(m_j \delta_{ik} + m_i \delta_{kj} + m_k \delta_{ij} \right) - \frac{5}{R_0^7} \left(R_{0j} R_{0k} m_i + R_{0i} R_{0j} m_k + R_{0i} R_{0k} m_j \right) - \frac{5}{R_0^7} \left(R_{0j} R_{0k} m_j + R_{0i} R_{0k} m_j \right) \right]$$

$$-\frac{5m_{l}R_{0l}}{R_{0}^{7}}\left(R_{0j}\delta_{ik}+R_{0i}\delta_{kj}+R_{0k}\delta_{ij}\right)+\frac{35m_{l}R_{0l}}{R_{0}^{9}}R_{0i}R_{0j}R_{0k}\right].$$
(2.34)

Сопоставляя (2.32) - (2.34) с (2.27), (2.31), получим:

$$T_{ki}R_{0i} = -3B_{0k}$$
 (2.35)

$$Q_{kij}R_{0j} = -2T_{ki} \quad . \tag{2.36}$$

Из уравнений (2.35), (2.36) можно найти сначала значение вектора R_{0i} , а затем, как и в случае линейного приближения, значения векторов X_i и m_i (используя выражения (2.24) и (2.25)). Уравнения (2.35) и (2.36) можно использовать для нахождения решения ОЗД как независимо, так и вместе.

Формулы метода решения ОЗД посредством аппроксимаций Зго и более высоких порядков могут быть получены по аналогии с формулами для случая квадратичного приближения.

2.2.3. Метод преодоления особенности решения в "нулевой" плоскости

Как было показано в [64], решение ОЗД имеет особенность в плоскости, перпендикулярной диполю и содержащей его. Назовём эту плоскость "нулевой" (рис. 2.2). В предлагаемом нами методе решения эта особенность проявляется в том, что в указанной плоскости определитель тензора T обращается в 0, а значит, система уравнений (2.23), (2.35) либо не имеет решения, либо имеет множество решений [22].

Далее мы рассмотрим два возможных пути преодоления указанной проблемы.



Рис. 2.2. Решение обратной задачи в "нулевой" плоскости

Первый заключается в том, что для вычисления R_0 посредством МНК в случае приближения второго и более высоких порядков, используется система уравнений, составленная из (2.35) и (2.36). Как будет показано в главе 4, достоинство этого метода заключается в том, что нам нет необходимости рассматривать особенность – мы имеем одну и ту же систему уравнений, достаточную для нахождения решения во всех точек пространства. Недостаток такого подхода состоит в необходимости вычисления второй производной поля, что на практике достаточно сложно сделать из-за наличия шумов измерения поля.

Второй путь решения ОЗД в "нулевой" плоскости состоит в рассмотрении проблемы в специально выбранной системе координат.

Выберем систему координат K (рис. 2.2) таким образом, чтобы ось Z_K была направлена вдоль вектора магнитного момента диполя *m*, а начало O_K её совпадало с положением диполя. Очевидно, что радиус-вектор **R**₀, проведённый от центра диполя в центр области измерения, лежит в "нулевой" плоскости (т.к. **R**₀ \perp **m**). В выбранной системе координат К

$$m = \{0, 0, m_3\}, m_3 > 0,$$

 $R_0 = \{R_0, R_{02}, 0\}$

$$\mathbf{R}_0 = \{R_{01}, R_{02}, 0\}.$$

Поскольку в "нулевой" плоскости $(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{R}_0) = 0$, то из (2.32) и (2.33) следует:

$$B_{01} = B_{02} = 0, \qquad B_{03} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m_3}{R_0^3}$$
(2.37)

$$T_{11} = T_{12} = T_{21} = T_{22} = T_{33} = 0, (2.38)$$

$$T_{13} = T_{31} = \frac{3\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{R_{01}m_3}{R_0^5}, \quad T_{23} = T_{32} = \frac{3\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{R_{02}m_3}{R_0^5}$$
(2.39)

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$B_{03} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m_3}{R_0^3}, \qquad (2.40)$$

$$T_{31} = \frac{3\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{R_{01}m_3}{R_0^5}, \quad T_{32} = \frac{3\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{R_{02}m_3}{R_0^5}, \quad (2.41)$$

$$R_0^2 = R_{01}^2 + R_{02}^2 \,. \tag{2.42}$$

Откуда легко выразить окончательное решение:

$$R_{1} = -\frac{3B_{3}}{T_{31}^{2} + T_{32}^{2}} \cdot T_{31}, \qquad R_{2} = -\frac{3B_{3}}{T_{31}^{2} + T_{32}^{2}} \cdot T_{32}, \qquad R_{3} = 0, \qquad (2.43)$$

$$m_1 = m_2 = 0, \qquad m_3 = -\frac{4\pi}{\mu_0} \cdot \frac{27}{\left(T_{31}^2 + T_{32}^2\right)^{3/2}} \cdot B_3^4.$$
 (2.44)

Покажем далее, как осуществить перевод исходных данных измерения поля (систему координат, в которой они получены, обозначим I) в описанную систему координат K и обратный перевод решения ОЗД из K в I.

Прежде всего, найдём значения векторов K_1 , K_2 и K_3 ортонормированного базиса системы координат K. Вектор K_3 выберем так, чтобы он был сонаправлен вектору магнитного момента m диполя:

$$\boldsymbol{K}_{3}^{(I)} = -\boldsymbol{B}^{(I)} / \left| \boldsymbol{B}^{(I)} \right|.$$
(2.45)

Здесь мы воспользовались тем, что векторы *m* и *B*₀ коллинеарны и направлены в противоположные стороны.

Вектор $\boldsymbol{K}_{1}^{(I)}$ выберем произвольным образом в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{K}_{3}^{(I)}$, т.е. так, чтобы выполнялось условие

$$K_{1i}^{(I)} \cdot K_{3i}^{(I)} = 0.$$
(2.46)

При этом учтём, что векторы базисов нормированы:

$$K_{1i}^{(I)} \cdot K_{1i}^{(I)} = 1.$$
(2.47)

Пусть p – номер компоненты вектора $K_3^{(I)}$, имеющей максимальное по модулю значение. Очевидно, что $K_{3p}^{(I)} \neq 0$. Приравняем к нулю компоненту вектора:

$$K_{1q}^{(l)} = 0, \ q \neq p.$$
 (2.48)

Тогда из (2.46) получим

$$K_{1p}^{(I)} = -K_{1s}^{(I)} \cdot K_{3s}^{(I)} / K_{3p}^{(I)}, \ s \neq p, \ s \neq q.$$
(2.49)

Подставляя (2.49) в (2.47), находим

$$K_{1s}^{(I)} = \pm 1 / \left(1 + \left(K_{3s}^{(I)} \right)^2 / \left(K_{3p}^{(I)} \right)^2 \right)^{1/2}.$$
(2.50)

Договоримся всегда выбирать $K_{1s}^{(I)} \ge 0$.

Вычислив $K_{1s}^{(l)}$ из (2.49), находим $K_{1p}^{(l)}$. Значение вектора $\boldsymbol{K}_{2}^{(l)}$ получаем как

$$\boldsymbol{K}_{2}^{(I)} = \boldsymbol{K}_{3}^{(I)} \times \boldsymbol{K}_{1}^{(I)}.$$
(2.51)

После того, как мы определили базис $K_i^{(I)}$, найдём матрицы перехода из системы координат *K* в систему координат *I* и обратно:

$$G_{ij} = \left(\boldsymbol{I}_i^{(I)} \cdot \boldsymbol{K}_j^{(I)} \right), \tag{2.52}$$

$$\mathbf{G}_{I \to K} = \mathbf{G}_{K \to I}^{T}$$
, где $eI_{ij}^{(I)} = \delta_{ij}$. (2.53)

Очевидно, что второй путь преодоления особенности решения ОЗД требует ввода критерия близости области измерения к "нулевой" плоскости, по которому можно определить, когда какое решение (общее или специальное) выбрать. Два варианта такого критерия представлены ниже.

Априорный критерий близости области измерения к "нулевой" плоскости

Первый критерий позволяет определить, находится ли область измерения вблизи "нулевой" плоскости, основываясь только на исходных данных измерения поля. Данный критерий основывается на проверке близости определителя тензора *T* к нулю:

$$\Omega = \left|\det \mathbf{T}\right| / \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} |T_{ki}| .$$
(2.54)

Если значение Ω меньше некоторого порога Ω_{\min} , то это означает, что мы находимся в "нулевой" плоскости. Чем меньше Ω_{\min} , тем меньше будет ошибка приближения, вносимая в решение ОЗД выражениями **Ошибка! Источник ссылки не найден.** – (2.44) для случая "нулевой" плоскости. Если же Ω_{\min} будет слишком малым, то матрица *T* системы уравнений (2.23), (2.35) будет близка к вырожденной, что приведёт к значительному росту погрешности решения ОЗД.

Апостериорный критерий близости области измерения к "нулевой" плоскости

Если решить ОЗД как "общим", так и специальным методом, предназначенным для работы вблизи "нулевой" плоскости, можно ответить на вопрос, какое из двух этих решений правильное (а, значит, определить, находилась область измерения вблизи или вдали от "нулевой" плоскости). Для этого необходимо решить прямую задачу для обоих решений и затем вычислить значение следующего критерия правдоподобия решения:

$$g = \left(\sum_{a=1}^{N} \left| \boldsymbol{B}_{a}^{(comp)} - \boldsymbol{B}_{a} \right| \right) / \left(\sum_{a=1}^{N} \left| \boldsymbol{B}_{a} \right| \right).$$
(2.55)

Здесь $B_a^{(comp)}$ - величина индукции магнитных полей, вычисленная в точках измерения r_a для найденных диполей — "ненулевого" и "нулевого". Чем меньше значение g, тем меньше отклонение поля найденного диполя от данных измерений.

2.3. Решение обратной задачи для точечного магнитного диполя методом, не имеющим особенности в "нулевой" плоскости.

В этом и следующем разделе покажем, как решить ОЗД методом, который не имеет особенностей.

Хронологически этот метод был разработан после метода с особенностью в "нулевой" плоскости.

2.3.1. Случай линейного приближения

Предположим, что для представления поля может быть использована линейная аппроксимация и вновь используем выражение (2.3):

$$\boldsymbol{B}_{a} \cong \boldsymbol{B}_{0} + \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{r}_{a}^{\prime}, \qquad (2.56)$$

здесь **B**₀ – постоянная составляющая индукции поля, а **T** – тензор второго ранга, одинаковый для всех точек измерения.

Поле точечного диполя в вакууме выражается формулой (2.1).

Раскладывая выражение (2.1) в ряд Тейлора возле центра области измерения R_0 при условии, что характерный размер области измерения $S << R_0$, и оставляя только два первых слагаемых, получаем

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}_{a}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}_{0} + \boldsymbol{r}_{a}') \approx \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}_{0}) + \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}_{a})}{\partial \boldsymbol{R}_{a}} \bigg|_{\boldsymbol{R}_{a} = \boldsymbol{R}_{0}} \cdot \boldsymbol{r}_{a}' \,.$$
(2.57)

Дифференцируя выражение (2.1) по R_a и сопоставляя между собой формулы (2.56) и (2.57) мы получали соотношение (2.23) между полем и его первой производной:

$$T_{ki}R_{0i} = -3B_{0k}. ag{2.58}$$

Умножая соотношение (2.58) на R_0 получим:

$$B_{ak}R_{0k} \cong B_{0k}R_{0k} + T_{ki}R_{0k} \cdot r'_{ai} \tag{2.59}$$

Используя (2.58), из (2.59) получим выражение

$$(B_{ak} - B_{0k})R_{0k} \cong -3B_{0k} \cdot r'_{ak} \quad .$$
(2.60)

Выражение (2.60) можно рассматривать как линейную связь между переменными $B_{ak} - B_{0k}$ и r'_{ak} , где R_{0k} – пока неизвестные коэффициенты. При этом массивы значений B_{ak} , $r'_{ak} = r_{ak} - \langle r \rangle_k$ — известны (это результаты измерений), а B_{0k} равно среднему по точкам наблюдения от B_{ak} . Для неизвестного вектора R_{0k} после усреднения по массиву точек наблюдения получаем систему уравнений

$$\left[\sum_{a} \left(B_{aj} - B_{0j}\right) \left(B_{ak} - B_{0k}\right)\right] R_{0k} \simeq -3 \left[\sum_{a} \left(B_{aj} - B_{0j}\right) r'_{ak}\right] B_{0k}.$$
(2.61)

Зная величину R_0 , мы можем найти положение диполя X, т.к. имеет место связь (2.24):

$$\boldsymbol{X} = \left\langle \boldsymbol{r} \right\rangle - \boldsymbol{R}_0. \tag{2.62}$$

Далее непосредственно из уравнения (2.1) находим неизвестную величину вектора дипольного моменты источника поля *m*:

$$\boldsymbol{m} = \frac{4\pi}{\mu_0} \left[\frac{3}{2} R_0 \left(\left\langle \boldsymbol{B} \right\rangle \cdot \boldsymbol{R}_0 \right) \boldsymbol{R}_0 - R_0^3 \left\langle \boldsymbol{B} \right\rangle \right].$$
(2.63)

2.3.2. Случай квадратичного приближения

Предположим теперь, что для представления поля использована квадратичная аппроксимация (см. выражение (2.26)):

$$B_{ak} \cong B_{0k} + T_{ki}r'_{ai} + Q_{kij}r'_{ai}r'_{aj}, \qquad (2.64)$$

Так же, как и в случае линейного приближения, разложим (2.1) в ряд Тейлора возле центра области измерения R_0 при условии, что характерный размер области измерения $S << R_0$, и, оставив только три первых слагаемых, получим:

$$B_{k}\left(\boldsymbol{R}_{0}+\boldsymbol{r}_{a}'\right)=B_{k}\left(\boldsymbol{R}_{0}\right)+\frac{\partial B_{k}\left(\boldsymbol{R}_{a}\right)}{\partial R_{ai}}\bigg|_{\boldsymbol{R}_{a}=\boldsymbol{R}_{0}}\cdot\boldsymbol{r}_{ai}'+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^{2}B_{k}\left(\boldsymbol{R}_{a}\right)}{\partial R_{ai}\partial R_{aj}}\bigg|_{\boldsymbol{R}_{a}=\boldsymbol{R}_{0}}\cdot\boldsymbol{r}_{ai}'\boldsymbol{r}_{aj}'$$
(2.65)

Дифференцируя (2.1) по R_a и сопоставляя (2.64) и (2.65), легко получить следующие соотношения между B_{0k} , T_{ki} и Q_{kij} :

$$T_{ki}R_{0i} = -3B_{0k}, (2.66)$$

$$Q_{kij}R_{aj} = -2T_{ki} \,. \tag{2.67}$$

Умножая уравнение (2.64) на R_{0k} и подставляя в полученное выражение (2.66) и (2.67), получим:

$$B_{ak}R_{0k} \cong B_{0k}R_{0k} + T_{ki}R_{0k}r'_{ai} + Q_{kij}R_{0k}r'_{ai}r'_{aj}$$
(2.68)

ИЛИ

$$(B_{ak} - B_{0k})R_{0k} \cong -3B_{0i}r'_{ai} - 2T_{ij}r'_{ai}r'_{aj}$$
(2.69)

Из полученной системы уравнений (2.69) можно найти R_{0k} , а значит и положение диполя X_k — в соответствии с (2.62) и магнитный момент диполя — в соответствии с (2.63). Поскольку значения B_{ak} , $r'_{ak} = r_{ak} - \langle r \rangle_k$ — известны (это результаты измерений), B_{0k} , T_{ki} — вычисляются из (2.64) посредством МНК.

2.4. Увеличение точности решения обратной задачи для точечного магнитного диполя

Из уравнений Максвелла в статическом случае следует, что ротор и дивергенция магнитного поля равны нулю:

$$rot\boldsymbol{B} = 0 \quad , \tag{2.70}$$

$$div\boldsymbol{B} = 0 \quad . \tag{2.71}$$

Из выражения (2.70) следует свойство симметрии градиента магнитного поля:

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_k} = \frac{\partial B_k}{\partial x_i}$$
 или $T_{ik} = T_{ki}$. (2.72)

Это свойство согласуется с полученным ранее выражением (2.33), а выражение (2.34) кроме того указывает на симметричность тензора Q_{kij} .

Из выражения (2.71) также вытекает отсутствие следа тензора-градиента поля T: $spT = T_{kk} = 0$. (2.73)

Используя перечисленные свойства T_{ki} и Q_{kij} можно уменьшить число неизвестных в уравнениях МНК, что должно привести к увеличению точности решения.

2.5. Алгоритмы решения обратной задачи для точечного магнитного диполя

На основании вышеизложенных методов решения ОЗД можно сформулировать следующие варианты алгоритма решения ОЗД:

- Вариант 1, использующий одновременно как общее, так и специальное решение для "нулевой" плоскости и основанный на апостериорном выборе наилучшего из этих двух решений;
- Вариант 2, основанный на априорном анализе близости области измерения к "нулевой" плоскости и выборе соответствующего решения: ОЗД решается "общим"

способом далеко от "нулевой" плоскости, а вблизи неё для решения ОЗД используется специальное решение.

• Вариант 3, не использующий специальное решение в "нулевой" плоскости.

Во всех перечисленных алгоритмах используются одинаковые входные и выходные данные.

Входные данные задачи:

- *N* количество точек измерения;
- r_a , a = 1, 2, ..., N координаты точек измерения в лабораторной системе отсчёта;
- **B**_{*a*}, *a* = 1,2,...,*N* измеренные значения вектора индукции магнитного поля в соответствующих точках измерения.

Выходные данные задачи:

- X радиус-вектор, определяющий положение диполя в лабораторной системе координат;
- *m* вектор магнитного момента диполя.

2.5.1. Алгоритм, использующий апостериорный выбор наилучшего решения

Блок-схема данного алгоритма представлена на рис. 2.3.



Рис. 2.3. Блок схема алгоритма решения ОЗД (вариант 1)

Как видно из рисунка, данный алгоритм состоит из пяти основных этапов:

- 1. Измерение поля B_a в дискретном наборе точек r_a пространства;
- Вычисление по данным измерений среднего значения поля B₀ и одной или большего числа первых его производных (T, Q и др.) в центре R₀ области измерения. При этом используется МНК – см. выражения: (2.3), (2.9), (2.17) и (2.26);
- Решение ОЗД "общим" методом на основе соотношений между полем и его производными: (2.23) (2.25) или (2.35), (2.36), (2.24), (2.25);
- 4. Решение ОЗД методом для "нулевой" плоскости: (2.37)- (2.53);
- 5. Выбор из двух найденных решений того, которое наиболее соответствует исходным данным **B**_a, **r**_a. Для этого используется критерий *g* - см. (2.55).

2.5.2. Алгоритм, использующий априорный выбор необходимого способа решения

Блок-схема данного алгоритма представлена на рис. 2.4.



Рис. 2.4. Блок схема алгоритма решения ОЗД (вариант 2)

Как видно из рисунка, данный алгоритм состоит из четырёх основных этапов, в основном совпадающих с этапами первого варианта алгоритма. Разница состоит в том, что находится одно решение: "общее" либо "специальное" – в зависимости от значения априорного критерия близости к "нулевой" плоскости. Перечислим эти этапы:

- 1. Измерение поля B_a в дискретном наборе точек r_a пространства;
- Вычисление (по данным измерений) среднего значения поля B₀ и одной или большего числа первых его производных (T, Q и др.) в центре R₀ области измерения. При этом явно или неявно используется МНК. Соответствующие выражения: (2.3), (2.9), (2.17) и (2.26);
- 3. Вычисление критерия Ω близости к "нулевой" плоскости см. (2.54);
- В зависимости от значения критерия Ω ОЗД решается либо "общим" методом на основе соотношений между полем и его производными (выражения (2.23) (2.25) или (2.35), (2.36), (2.24), (2.25)), либо методом, предназначенным для случая "нулевой" плоскости (выражения (2.37) (2.53)).

2.5.3. Алгоритм, не использующий специальное решение вблизи "нулевой" плоскости

Блок-схема данного варианта алгоритма представлена на рис. 2.5.



Рис. 2.5. Блок схема алгоритма решения ОЗД (вариант 3)

Данный вариант алгоритма решения ОЗД может быть реализован двумя различными способами.

В первом способе требуется предварительное вычисление (см. выражения (2.3), (2.9), (2.17) и (2.26)) вектора поля B_0 и как минимум двух первых его производных T, Q, на соотношениях между которыми и основан поиск решения (система уравнений, включающая (2.35), (2.36)).

Во втором способе требуется лишь предварительное вычисление среднего значения поля B_0 по формуле (2.9), а окончательное решение находится (посредством МНК) из соотношений между B_a и B_0 (см. выражения (2.56)-(2.63), (2.64)-(2.69)).

2.5.4. Обозначения вариантов алгоритмов

На основе вышеизложенных вариантов алгоритмов решения ОЗД было реализовано множество их модификаций.

Формулу для обозначения различных модификаций алгоритмов решения ОЗД можно представить следующим образом:

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ОЗД =

= " МЕТОД (ПОРЯДОК)(s) – УРАВНЕНИЯ – КРИТЕРИЙ (ПОРОГ) "

Здесь:

- МЕТОД метод вычисления среднего значения поля и первых его производных.
 Возможные варианты: matrix неявное использование МНК, mnk явное использование МНК;
- ПОРЯДОК порядок используемой аппроксимации поля. Не указывается для МЕ-ТОДА matrix. Возможные значения (реализованы программно): 1, 2, 3;
- (s) если указан символ 's', при составлении системы уравнений для нахождения поля и первых его производных используется свойство симметричности тензоров, соответствующих этим производным;
- УРАВНЕНИЯ используемая система уравнений. Возможные значения: 0a uc-пользуется соотношение $B_a \leftrightarrow B_0$, 01a соотношение $B_a \leftrightarrow B_0, T$, 01 -соотношение $B_0 \leftrightarrow T$, 12 -соотношение $T \leftrightarrow Q$, 01-12 -соотношения $B_0 \leftrightarrow T$ и $T \leftrightarrow Q$.
- КРИТЕРИЙ используемый метод (критерий), позволяющий учесть особенность решения в "нулевой" плоскости. Возможные варианты: none – особенность решения не учитывается, g – используется апостериорный критерий g, omega – используется априорный критерий Ω.
- ПОРОГ используется только вместе с критерием отеда для указания его порогового значения.

Все возможные модификации, соответствующие формуле, были реализованы в теле функции, написанной на языке программирования MATLAB [2,15,46].

2.5.5. Замечания по программной реализации алгоритмов решения обратной задачи для точечного магнитного диполя

Важной частью разработанного метода и алгоритма решения ОЗД является метод наименьших квадратов. В среде программирования MATLAB (также как и в других средах и языках программирования) данный метод реализован в виде функции x=lsqr(A,b), которая решает задачу определения наилучшего решения для матричного уравнения:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad , \tag{2.74}$$

где *А* - матрица известных коэффициентов, *b* - известный вектор свободных членов, *x* - вектор неизвестных, который необходимо найти.

Покажем теперь, как решить задачу вычисления значений B_0 и T по данным измерения поля B_a (см. раздел 2.2.1) посредством использования записи (2.74) МНК и функции x = lsqr(A,b).

Предположим, что для поля в точках измерения выполняется линейная аппроксимация (2.3). Пусть мы измерили поле в N точках измерения, т.е. нам известны B_a , r_a (а значит, и r'_a).

Перепишем (2.3) ещё раз:

$$B_{ak} \cong B_{0k} + T_{ki} r'_{ai}, \ a = 1, \dots, N, \ i, k = 1, 2, 3.$$
(2.75)

Используя (2.74), можно записать данное выражение в виде

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\,,\tag{2.76}$$

где

$$\boldsymbol{b} = (B_{11}, B_{12}, B_{13}, \dots, B_{N1}, B_{N2}, B_{N3})^T$$
 – вектор-столбец размерностью $3N \times 1$;

 $\mathbf{x} = (B_{01}, B_{02}, B_{03}, T_{11}, T_{12}, T_{13}, \dots, T_{31}, T_{32}, T_{33})^T$ – вектор-столбец размерностью $(3+9) \times 1$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & r'_{N1} & r'_{N2} & r'_{N3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r'_{N1} & r'_{N2} & r'_{N3} \end{pmatrix} - \text{матрица размерностью } 3N \times (3+9).$$

Матрица A содержит известные координаты точек измерения, а вектор b - измеренные значения поля. Подставляя эти величины в функцию x=lsqr(A,b) вычислим вектор x, который содержит в себе компоненты вектора B_0 и тензора T.

Аналогичным образом можно найти **B**₀ и **T** и для случая квадратичного и более высоких порядков используемых аппроксимаций поля.

2.6. Решение обратной задачи для точечного магнитного диполя в 2D-случае работы в плоскости, содержащей диполь

Рассмотрим предложенный нами метод решения ОЗД не в трёхмерном случае, а в двухмерном. Для этого выберем систему координат таким образом, чтобы плоскость измерения поля *XY* содержала диполь *m* (рис. 2.6). Тогда во всех точках (за исключением точки $\mathbf{R} = 0$), лежащих в плоскости *XY*, *z*-компоненты магнитного поля *B* будут равны 0.



Рис. 2.6. Выбор плоскости при переходе к 2D-задаче о диполе

Действительно, согласно (2.1) поле диполя

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot R^5} \cdot \left[3\boldsymbol{R} \left(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{R} \right) - R^2 \boldsymbol{m} \right], \qquad (2.77)$$

где m – вектор магнитного момента диполя; R – радиус-вектор, проведённый от диполя в точку измерения. В плоскости *XY*, выбранной нами системы координат, $m_z = 0$ и $R_z = 0$. Поэтому из (2.77) следует, что и $B_z = 0$:

$$B_{z} = \frac{\mu_{0}}{4\pi \cdot R^{5}} \cdot \left[3R_{z} \left(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{R} \right) - R^{2} m_{z} \right] = 0.$$
(2.78)

В трёхмерном случае мы использовали линейное приближение поля (2.3). Запишем его в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} B_{ax} \\ B_{ay} \\ B_{az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle B_x \rangle \\ \langle B_y \rangle \\ \langle B_z \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r'_{ax} \\ r'_{ay} \\ r'_{az} \end{pmatrix},$$
(2.79)

где a = 1...N - номер точки измерения, а N – количество точек измерения.

Как мы показали выше, для точек плоскости *XY* $B_{az} = 0$ (для всех *a*). Очевидно также, что $r'_{az} = 0$ и $\langle B_z \rangle = 0$. Вспомним также, что тензор *T* симметричен и $SpT = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = 0$. Учитывая симметричность *T* и то, что в выбранной плоскости *XY z*-компонента поля отсутствует $B_z = 0$, можем записать:

$$T_{xz} = T_{zx} = \partial B_z / \partial x = 0, \qquad (2.80)$$

$$T_{yz} = T_{zy} = \partial B_z / \partial y = 0 \quad . \tag{2.81}$$

Поэтому в двухмерном случае уравнение (2.79) принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} B_{ax} \\ B_{ay} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle B_x \rangle \\ \langle B_y \rangle \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & 0 \\ T_{yx} & T_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & T_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r'_{ax} \\ r'_{ay} \\ 0 \end{pmatrix}.$$
(2.82)

Окончательно, линейное приближение поля (2.79) в 2D-случае примет вид

$$\begin{pmatrix} B_{ax} \\ B_{ay} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle B_x \rangle \\ \langle B_y \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r'_{ax} \\ r'_{ax} \end{pmatrix}$$
(2.83)

или в индексной форме:

.

$$B_{a\beta} = \langle B_{\beta} \rangle + T_{\beta\gamma} \cdot r'_{a\gamma}, \text{ где } \beta, \gamma = 1, 2.$$
(2.84)

Поэтому все выкладки для двухмерного случая (при указанном выше способе выбора плоскости) имеют точно такой же вид, что и для трёхмерного, с точностью до замены 3D-индексов *i*, *j*, *k*, *l*,... = 1, 2, 3 2D-индексами β , γ , δ , λ ,... = 1, 2.

Отметим, что в двухмерном случае так же, как и в трёхмерном, тензор T симметричен, но, в отличие от трёхмерного, в двухмерном случае свёртка тензора T не равна нулю: $SpT = T_{\beta\beta} = -T_{zz} \neq 0$, поскольку компонента тензора $T_{zz} = \partial B_z / \partial z$ в рассматриваемой нами плоскости, вообще говоря, не равна нулю (хотя $B_z = 0$).

Итак, мы показали, что при указанном выборе плоскости измерения можно решить ОЗД в двухмерном случае тем же способом, что и в трёхмерном. При этом в отличие от 3D-случая, в 2D-задаче отсутствует особенность решения (при использовании линейного приближения поля в полученной системе уравнений определитель тензора T не обращается в нуль), а значит, алгоритм решения задачи имеет более простой вид.

2.7. Оценка точности решения обратной задачи для магнитного диполя

В предыдущем разделе было найдено приближённое решение ОЗД. Оценим точность полученных результатов.

2.7.1. Ошибки, имеющие место при решении обратной задачи для точечного магнитного диполя

Будем учитывать три типа ошибок:

- ошибки измерения пространственных координат и компонент поля;
- ошибки приближения, использованного при решении ОЗД;
- ошибки дискретизации.

Ошибки измерения связаны с неточностью измерения координат r_a точек измерения и значений вектора индукции магнитного поля B_a в этих точках. Некоторые пути уменьшения ошибок данного типа рассмотрены в [32,50].

Ошибки приближения являются следствием неточности используемой при решении задачи математической модели. Рассмотрим их подробнее.



Рис. 2.7. Допустимая область приближения

Будем считать, что поле в точках измерения создаётся одним точечным магнитным диполем. Обозначим точные значения поля диполя в точках измерения как $B^{(abs)}(r'_a)$, a = 1, 2, ..., N. Здесь, как и ранее, r'_a – радиус-вектор, проведённый из центра области измерения в точку измерения. Пусть при решении ОЗД мы предположили, что поле в точках измерения описывается приближением $B^{(appr)}(r'_a)$. Область, содержащую точки измерения, в которых $B^{(appr)}(r'_a)$ отличается от $B^{(abs)}(r'_a)$ на допустимую величину ΔB , назовём допустимой областью данного приближения и обозначим $\Omega(\Delta B)$ (рис. 2.7). При рассмотрении ОЗД мы использовали в качестве $\boldsymbol{B}^{(appr)}(\boldsymbol{r}_{a}')$ линейное приближение (2.3)

$$\boldsymbol{B}_a \cong \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{r}_a' \tag{2.85}$$

и соответствующее ему разложение в ряд Тейлора (2.4)

$$\boldsymbol{B}_{a}^{(appr)}\left(\boldsymbol{r}_{a}^{\prime}\right) \equiv \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{R}_{0}\right) + \frac{\partial \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{R}_{a}\right)}{\partial \boldsymbol{R}_{a}}\Big|_{\boldsymbol{R}_{a}=\boldsymbol{R}_{0}} \cdot \boldsymbol{r}_{a}^{\prime} .$$

$$(2.86)$$

Данное приближение слабо отличается от $B^{(abs)}(r'_a)$ лишь для малых значений r'_a . При увеличении r'_a , т. е. при удалении от центра $\langle r \rangle$ области измерения, в разложении (2.86) поля источника в ряд Тейлора следует учитывать слагаемые следующих порядков. При этом приближению $B^{(appr)}(r'_a)$ более высокого порядка соответствует допустимая область большего размера.

Рассмотрим критерий оценки точности приближения. Пусть мы используем приближение порядка *n*:

$$\boldsymbol{B}_{a} \approx \boldsymbol{B}_{a}^{(0)} + \boldsymbol{B}_{a}^{(1)} + \ldots + \boldsymbol{B}_{a}^{(n)}.$$
(2.87)

Из теории степенных рядов известно, что данное приближение можно считать достаточно точным, если слагаемое порядка n+1 по модулю много меньше слагаемого порядка n:

$$\frac{B_a^{(n+1)}}{B_a^{(n)}} \ll 1. \tag{2.88}$$

Получим данное отношение для используемого нами линейного приближения. Учтём в предположении (2.85) и разложении (2.86) квадратичные слагаемые:

$$B_{ak} = B_{0k} + T_{ki} \cdot r'_{ai} + \frac{1}{2} D_{kij} \cdot r'_{ai} \cdot r'_{aj}, \qquad (2.89)$$

$$B_{ak} = B_k \left(\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{r}_a' \right) \approx B_k \left(\boldsymbol{R}_0 \right) + \frac{\partial B_k \left(\boldsymbol{R}_a \right)}{\partial R_{ai}} \bigg|_{\boldsymbol{R}_a = \boldsymbol{R}_0} \cdot \boldsymbol{r}_{ai}' + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 B_k \left(\boldsymbol{R}_a \right)}{\partial R_{ai} \partial R_{aj}} \bigg|_{\boldsymbol{R}_a = \boldsymbol{R}_0} \cdot \boldsymbol{r}_{ai}' \boldsymbol{r}_{aj}' \quad (2.90)$$

Здесь введён тензор третьего ранга **D**, одинаковый для всех точек измерения.

При подробном рассмотрении оказывается, что первое, второе и третье слагаемые в (2.89) равны, соответственно, первому, второму и третьему слагаемым в(2.90), поэтому (2.88) можно переписать в виде:

$$P_a \equiv \sqrt{B_{ak}^{(2)} B_{ak}^{(2)}} / \sqrt{B_{ai}^{(1)} B_{ai}^{(1)}} \ll 1.$$
(2.91)

Данное соотношение записано для одной точки измерения. Для всей совокупности точек измерения критерием точности линейного приближения можно выбрать условие:

$$\max_{a=1,2,...,N} P_a <<1.$$
(2.92)

Ошибки дискретизации связаны с тем, что мы заменяем непрерывную область измерения дискретным набором точек, и, следовательно, непрерывное поле – дискретным набором отсчётов. Поясним возникновение ошибок дискретизации на примере.

Ранее из уравнения Максвелла (2.71) для дивергенции магнитного поля было получено соотношение (2.73). В случае дискретного набора точек дивергенция вычисляется по приближённой формуле

$$div\boldsymbol{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \qquad (2.93)$$

где

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} \approx \frac{B_x \left(x_0 + \Delta x \right) - B_x \left(x_0 \right)}{\Delta x},\tag{2.94}$$

$$\frac{\partial B_{y}}{\partial y} \approx \frac{B_{y} \left(y_{0} + \Delta y \right) - B_{y} \left(y_{0} \right)}{\Delta y}, \qquad (2.95)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} \approx \frac{B_z \left(z_0 + \Delta z \right) - B_z \left(z_0 \right)}{\Delta z}.$$
(2.96)

При конечном шаге $\Delta = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ возникает ошибка нахождения дивергенции поля, а значит, и тензора *T*, что приводит к возникновению ошибки дискретизации.

При отсутствии всех других ошибок нарушение равенства (2.73) будет означать наличие ошибки дискретизации. Следует отметить, что выражение (2.73) справедливо только в случае работы с линейным приближением (2.56). Для других приближений вид (2.73) будет иным.

Уменьшить ошибки дискретизации можно путём увеличения плотности точек измерения.

2.7.2. Методы оценки точности решения по данным измерения поля

Как мы показали, при решении обратной задачи для диполя возникают ошибки. Они в конечном итоге приводят к неточности результата. Зададимся вопросом, насколько полученное решение отличается от действительного.

Прямая оценка точности

В соответствии с (2.1) модуль вектора поля точечного магнитного диполя равен

$$B = \sqrt{B_k B_k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^4} \sqrt{3(m_j R_j)^2 + R^2 m^2} .$$
(2.97)

Максимальное и минимальное значения B при заданном R и произвольных m:

$$B_{\max}(R) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^4} \sqrt{3m^2 R^2 + R^2 m^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2m}{R^3}, \qquad (2.98)$$

$$B_{\min}(R) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^4} \sqrt{R^2 m^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m}{R^3}.$$
 (2.99)



Рис. 2.8. К оценке разности полей двух диполей

Рассмотрим два диполя с одним и тем же вектором магнитного момента m (рис. 2.8). Радиус-векторы от диполей до точки измерения обозначим R_0 и R. Из рисунка следует, что

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \Delta \boldsymbol{R} \,. \tag{2.100}$$

Будем считать, что расстояние между диполями много меньше расстояний от каждого из них до точки измерения:

$$\Delta R \ll R_0 \quad \text{if } \Delta R \ll R \,. \tag{2.101}$$

Оценим, на какую максимальную величину отличаются модули векторов напряжённости полей рассматриваемых диполей. Для этого разложим (2.100) в ряд Тейлора и оставим только два первых слагаемых:

$$B_{\max}\left(R_{0}+\Delta R\right) \approx B_{\max}\left(R_{0}\right) + \frac{\partial B_{\max}\left(R\right)}{\partial R}\Big|_{R=R_{0}} \cdot \Delta R = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \cdot \left(\frac{2m}{R_{0}^{3}} - \frac{6m}{R_{0}^{4}}\Delta R\right) .$$
(2.102)

Используя (2.102), можем записать:

$$\frac{\Delta B_{\max}\left(R_{0}\right)}{B_{\max}\left(R_{0}\right)} \equiv \frac{B_{\max}\left(R_{0}\right) - B_{\max}\left(R_{0} + \Delta R\right)}{B_{\max}\left(R_{0}\right)} \approx \frac{3}{R_{0}} \cdot \Delta R$$
(2.103)

Откуда

$$\Delta R \approx \frac{R_0}{3} \cdot \frac{\Delta B_{\max}(R_0)}{B_{\max}(R_0)} .$$
(2.104)

В соответствии с полученным выражением можно определить, как точно мы нашли положение диполя. Для этого необходимо:

- решая прямую задачу, вычислить значения поля найденного диполя в точках измерения: *B*_a^(comp), *a* = 1, 2, ..., *N*.
- 2) сравнивая поле $B_a^{(comp)}$ со значениями поля $B_a^{(meas)}$, которые использовались при решении обратной задачи, найти максимальное значение отношения $|B_a^{(comp)} B_a^{(meas)}| / B_a^{(meas)}$:

$$\frac{\Delta B}{B} = \max_{a=1,2,\dots,N} \left\{ \left| \boldsymbol{B}_{a}^{(comp)} - \boldsymbol{B}_{a}^{(meas)} \right| / B_{a}^{(meas)} \right\}.$$
(2.105)

3) определить оценочное значение погрешности определения положения диполя:

$$\Delta R \approx \frac{R_0}{3} \cdot \frac{\Delta B}{B}, \qquad (2.106)$$

где R_0 – расстояние от центра области измерения до найденного диполя.

Косвенная оценка

Кроме рассмотренного критерия точности решения задачи можно использовать видоизменённое требование (2.73).

$$K = \left| \sum_{k=1}^{3} T_{kk} \right| / \sum_{i=1}^{3} \left| T_{ii} \right| \to 0.$$
(2.107)

Здесь в числителе стоит абсолютное значение следа тензора T, знаменатель представляет собой сумму модулей элементов главной диагонали этого же тензора. Можно ожидать, что чем ближе значение K к нулю, тем точнее найденное решение.

2.8. О верификации дипольной модели источника поля

Для того чтобы определить, насколько источник поля похож на дипольный, можно сравнить измеренное поле с полем, вычисленным для источника, найденного в результате решения ОЗД. При этом можно использовать введённый ранее критерий *g* (2.55). Если измеренное и вычисленное поля будут сильно отличаться, можно сделать вывод о том, что либо решение найдено неправильно, либо мы имеем дело с источником, модель которого отлична от дипольной. К сожалению, разработать способ, позволяющий различить эти две ситуации, в данной работе не удалось.

2.9. Метод решения обратной задачи для нескольких слабо взаимодействующих диполей

В данной главе представлен метод решения обратной задачи для группы слабо взаимодействующих диполей (ОЗД-N).

2.9.1. Постановка задачи

Рассмотрим метод решения обратной задачи для группы слабо взаимодействующих точечных магнитных диполей, в основе которого лежит итерационное уточнение решения обратной задачи для системы невзаимодействующих диполей.



Рис.2.9. Трехмерное (3D) представление обратной задачи для системы слабо взаимодействующих точечных диполей.

Пусть имеется система произвольно ориентированных диполей m_q , q = 1, 2, ..., N (рис. 2.9), расположенных примерно в одной плоскости D с пространственным шагом w. Предположим также, что у всех диполей модули магнитных моментов $|m_q|$ примерно одинаковы и направлены примерно нормально к D.

Каждому диполю поставим в соответствие область измерения s_q , расположенную примерно под ним. Все области измерения находятся примерно в одной плоскости, отстоящей от плоскости диполей D на расстоянии h. Характерный размер областей измерения считаем достаточно малым (в отношении точности решения ОЗД).

Предположим также, что расстояние *h* между диполем и соответствующей ему областью измерения меньше характерного расстояния *w* между диполями.

59

Данные предположения позволяют считать, что поле в некоторой области измерения s_p складывается из поля \boldsymbol{B}_p диполя \boldsymbol{m}_p , находящегося над этой областью, и полей \boldsymbol{B}_q соседних диполей \boldsymbol{m}_q ($q \neq p$); при этом $\left| \boldsymbol{B}_p \right| > \sum_{q \neq p} \left| \boldsymbol{B}_q \right|$.

Такой набор назовем системой слабо взаимодействующих диполей.

2.9.2. Метод решения

Процедура решения поставленной ОЗД-N состоит в следующем.

Сначала по данным измерения магнитного поля B_q для каждой пары диполь m_q –область измерения s_q решается ОЗД и находится решение (нулевое приближение): $m_q^{(0)}$, $X_q^{(0)}$ – магнитный момент и местоположение диполя (q = 1, 2, ..., N, где N – число диполей/областей измерения).

Далее, из индукции магнитного поля B_q , измеренной в данной области измерения s_q , вычитаются вклады $B_p^{(0)}$ ($q \neq p$) – индукции магнитных полей, создаваемых в данной области s_q всеми остальными диполями:

$$\boldsymbol{B}_{q}^{(1)} = \boldsymbol{B}_{q} - \sum_{p \neq q} \boldsymbol{B}_{p}^{(0)} \quad .$$
(2.108)

Здесь величины $\boldsymbol{B}_{p}^{(0)}$ вычисляются на основе модели поля точечного источника и найденных значений $\boldsymbol{m}_{q}^{(0)}, \boldsymbol{X}_{q}^{(0)}$.

Полученные уточненные значения величин $B_q^{(1)}$ используются для повторного решения ОЗД для областей s_q и диполей m_q (нахождение первого, второго и следующих приближений): $m_q^{(1)}$, $X_q^{(1)}$. Можно ожидать, что после достаточного числа итераций R решение $m_q^{(R)}$, $X_q^{(R)}$ приблизится к искомому решению задачи $m_q^{(true)}$, $X_q^{(true)}$.

2.9.3. Алгоритм решения

На основании вышеизложенного можно сформулировать следующий алгоритм решения ОЗД-N:

1. Измеряем поле в областях s_q , где q = 1, ..., N - номер области измерения, N - количество областей измерения (совпадает с числом диполей). Соответствующие набо-

ры данных обозначим: ${}^{q}\boldsymbol{B}_{a}$ – поле в точках измерения q-ой области; ${}^{q}\boldsymbol{r}_{a}$ – координаты точек измерения q-ой области.

Для каждой пары область s_q – диполь m_q находим решение ОЗД (как для одиночных диполей):

$$\left\{{}^{q}\boldsymbol{X}^{(0)},{}^{q}\boldsymbol{m}^{(0)}\right\} = OZD\left({}^{q}\boldsymbol{B}_{a},{}^{q}\boldsymbol{r}_{a}\right);$$

 По найденным параметрам диполей ^qX⁽⁰⁾, ^qm⁽⁰⁾ в соответствии с моделью поля точечного диполя (2.1) вычисляем поля, создаваемые всеми диполями в соответствующих им областях измерения:

$${}^{q}\boldsymbol{B}_{a}^{(0)} = \boldsymbol{B}\left({}^{q}\boldsymbol{X}^{(0)}, {}^{q}\boldsymbol{m}^{(0)}, {}^{q}\boldsymbol{r}_{a}\right);$$

4. Для каждой *q* -ой области измерения *s_q* вычисляем поле, создаваемое только *q* -ым диполем *m_q* - для этого из результатов измерений поля в *q* -ой области вычитаем вычисленные поля, создаваемые соседними диполями:

$${}^{q}\boldsymbol{B}_{a}^{(1)} = {}^{q}\boldsymbol{B}_{a} - \sum_{p \neq q} {}^{p}\boldsymbol{B}_{a}^{(0)}$$
;

5. По уточнённым значениям полей ${}^{q}\boldsymbol{B}_{a}^{(1)}$ для каждой пары область s_{q} – диполь \boldsymbol{m}_{q} вновь находим решение ОЗД:

$$\left\{ {}^{q}\boldsymbol{X}^{(1)}, {}^{q}\boldsymbol{m}^{(1)} \right\} = OZD\left({}^{q}\boldsymbol{B}^{(1)}{}_{a}, {}^{q}\boldsymbol{r}_{a} \right);$$

 Шаги 3-5 повторяем заданное число раз, либо до выполнения какого-либо условия сходимости решения (например, до момента, когда новое решение перестанет заметно отличаться от предыдущего).

<u>Примечание:</u> (0),(1),... – номера итераций, *OZD*(...) – алгоритм решения ОЗД.

2.10. Распространение методов магнитного компьютерного видения на другие типы полей

В данном разделе обсуждается принципиальная возможность распространения методов МКВ на случаи, когда в качестве переносчика информации выступает не магнитное, а электрическое или тепловое поля.

2.10.1. Аналогии магнитного, электрического, электротокового, теплового полей

В статическом случае соответствие между величинами, описывающими поля, и параметрами среды указано в таблице 2.1, где по аналогии с электрическим и магнитным моментами *p* и *m* введён тепловой "дипольный момент" *t*.

По аналогии с электрическим диполем, введённое понятие теплового дипольного момента можно представить как два тепловых "заряда" (точечный нагреватель соответствует положительному заряду, точечный холодильник соответствует отрицательному заряду), расположенных друг от друга на расстоянии, малом, по сравнению с расстоянием до точки наблюдения.

Наименование величины	Обобщен-	Статическое	Статическое	Статическое	Стационар-
	ные	магнитное	электриче-	токовое по-	ное тепло-
	обозначения	поле	ское поле	ле	вое поле
Напряжённость	F	$H = -\nabla \psi$	$oldsymbol{E}=- abla \phi$	$oldsymbol{E}=- abla \phi$	$\boldsymbol{Q} = -\nabla T$
Индукция	G	$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{E}$		$q = \kappa \cdot Q$
Скалярный по-	Y	1//	Ø	Ø	T
тенциал	5	Ψ	Ψ	arphi	1
Проницаемость	η	μ	ε	σ	16
среды				0	K
Дипольный мо-	d	101	n	c	+
мент	u	m	P	3	l

Таблица 2.1. Аналогии магнитного, электрического и теплового полей

По аналогии с векторами напряжённости электрического и магнитного полей Eи H введён также вектор напряжённости теплового поля Q. Остальные обозначения, использованные в таблице, обычные. Обобщённые обозначения всех используемых величин приведены во втором столбце таблицы.

Скалярный потенциал любого из указанных полей удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \zeta = 0 \ . \tag{2.109}$$

Условия на границе раздела сред при отсутствии источников имеют вид:

$$\zeta_1 = \zeta_2 , \qquad \eta_1 \cdot \frac{\partial \zeta_1}{\partial n} = \eta_2 \cdot \frac{\partial \zeta_2}{\partial n} .$$
 (2.110)

Современные датчики позволяют с высокой степенью точности измерить локальную индукцию магнитного поля B и температуру T. Однако отсутствуют средства для прямого измерения теплового потока q или скалярного магнитного потенциала ψ , хотя во многих приложениях определение этих величин представляет значительный интерес, например, при анализе высокотемпературных тепловых явлений.

Следует отметить, что аналогия между различными типами физических полей используется достаточно давно для решения, например, таких задач, как моделирование физических полей [37] и тепловая интроскопия [42].

2.10.2. Задача о сфере, помещённой в однородное поле

В качестве примера использования указанных выше аналогий рассмотрим классическую задачу о сфере радиуса R, помещённой в однородное поле F_0 (рис. 2.10).



Рис. 2.10. Задача о сфере, помещённой в однородное поле F_0 . Использованы обобщённые обозначения (см. табл. 2.1): F_0 - напряжённость поля, η_1 - проницаемость среды внутри сферы, η_2 - проницаемость среды снаружи сферы.

Как известно, результирующее поле вне сферы складывается из исходного поля и поля диполя [27]:

$$\zeta_2 = -F_0 \cdot r + \frac{d \cdot r}{r^3} . \tag{2.111}$$

Здесь

$$\boldsymbol{d} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + 2\eta_2} R^3 \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\theta}} -$$
(2.112)

дипольный момент, индуцируемый в сфере однородным полем F_{θ} .

Реализовать на практике задачу о сфере, помещённой в однородное поле, можно способами, показанными на рис. 2.11: а) сферический образец магнетика, помещенного между полюсами магнита, приобретает наведённый магнитный момент m; б) сферический образец диэлектрика между обкладками плоского конденсатора приобретает наведённый электрический дипольный момент p; в) сферический образец проводника, помещённый внутри плоского слоя токопроводящей среды ($\sigma_{образца} \neq \sigma_{среды}$) с током, приобретает наведённый токовый дипольный момент *s*; г) сферический образец, помещённый внутри плоского слоя теплопроводящей среды ($\kappa_{oбразца} \neq \kappa_{cpedba}$), приобретает наведённый тепловой дипольный момент *t*.





Используя магнитотепловую аналогию можно распространить описанный выше разработанный метод решения ОЗД, развитый для магнитного диполя, например, на случай стационарной теплопроводности. Следует отметить, что в тепловой дефектометрии аналогичная задача решается для нестационарной теплопроводности [42].

Аналогичным образом можно развить, например, стационарные методы дефектоскопии диэлектриков.

2.11. Выводы к главе 2

 В данной главе описан предлагаемый метод решения ОЗД. Отличительной особенностью метода является то, что задача решается по данным измерения вектора индукции магнитного поля в дискретном наборе точек, сосредоточенных в малой (по сравнению с расстоянием до источника) области пространства. Именно поэтому данный метод подходит для реализации системы магнитного "видения" - области измерения в данном случае соответствует магнитный "глаз".

- Показано, что ОЗД имеет особенность в "нулевой" плоскости. Предложены различные способы преодоления этой особенности.
- Рассмотрены различные погрешности, возникающие при решении ОЗД, и предложены способы их оценки.
- 4) Рассмотрен 2D-случай ОЗД, когда дипольный момент *m* и точки измерения лежат в одной плоскости. Показано, что в 2D-случае ОЗД может быть решена тем же методом, что и в 3D-случае – с точностью до обозначений. При этом в 2D-случае отсутствует особенность "нулевой" плоскости.
- 5) На основе разработанного метода решения ОЗД также решена обратная задача для нескольких слабо взаимодействующих диполей (ОЗД-N).
- 6) В соответствии с рассмотренными методами решения ОЗД и ОЗД-N разработаны алгоритмы, которые в дальнейшем были положены в основу созданного программного комплекса ППМКВ (см. главу 4).
- Продемонстрирована принципиальная возможность распространения методов МКВ на случаи, когда переносчиком информации являются электрическое, токовое и тепловое поля.

В данной главе не были упомянуты разработанные, но пока не апробированные методы решения ОЗД по данным измерения только одной компоненты поля или по данным измерения скалярного потенциала. Описания этих методов можно найти в приложениях П4-П5).

Глава 3. Натурное моделирование метода решения обратной задачи для точечного магнитного диполя и его приложений

Данная глава состоит из двух основных разделов.

В первом разделе приводятся описание и результаты натурных испытаний созданного аппаратно-программного комплекса "система магнитного компьютерного видения" (АПК-МКВ), предназначенного для проведения натурных экспериментов по решению простейших задач МКВ.

Во втором разделе главы приводится описание натурных и компьютерных экспериментов, целью которых было показать работоспособность созданных методов и алгоритмов решения ОЗД и ОЗД-N и оценить возможности разработанного макета системы МКВ при решении следующих практических задач:

- Дистанционное измерение магнитного момента;
- Магнитное позиционирование (локация);
- Навигация автономного агента;
- Магнитный дигитайзер;
- Обнаружение и идентификация объектов по наведённому магнитному полю;
- Измерение деформации.

3.1. Аппаратно-программный комплекс "Система магнитного компьютерного видения"

Для проверки разработанных методов и алгоритмов решения ОЗД и ОЗД-N, а также натурного моделирования приложений МКВ, был создан АПК-МКВ. В отличие от существующих систем сканирования неоднородных магнитных полей, например, таких как [32], созданный АПК-МКВ измеряет поле лишь в некоторой локальной области пространства, но при этом, измерения производятся с большой точностью и высоким пространственным разрешением. Эти свойства были заложены в АПК-МКВ в соответствии с требованиями к системе МКВ, которые были сформулированы в главах 1 и 2.

3.1.1. Общее описание и основные характеристики комплекса

Построенная экспериментальная установка АПК-МКВ предназначена для решения различных задач МКВ. Она позволяет в ручном и автоматическом режимах производить измерение постоянного и переменного магнитных полей (возможность

66

генерации поля была заложена, но ещё не использовалась), накапливать и обрабатывать данные, использовать их для решения задач МКВ.

АПК-МКВ состоит из двух основных частей – аппаратной и программной. Аппаратная часть обеспечивает измерение (и генерацию) магнитного поля, усиление сигналов с датчиков и преобразование их в цифровой вид. Программная часть комплекса позволяет управлять аппаратной частью, производить накопление и обработку данных измерений, решать задачи МКВ.

Таблица 3.1. Общие характеристики экспериментальной установки

Параметр	Значение
Маканиан над настота пискратизации (при наморании на	40000
максимальная частота дискретизации (при измерении на	40000
	9
Количество входных каналов Ації (однополярных)	<u> </u>
Разрядность АЦП, ойт	12
Количество независимых каналов входного усилителя	4
Коэффициенты предусиления (изменяются переключением	1, 10, 100
перемычек на плате входного усилителя, независимо для	
каждого канала) – КО	
Коэффициенты усиления входных усилителей (выбор про-	0.5, 2, 8,
изводится программно, независимо для каждого канала) -	32, 128,
K	512
Максимальное измеряемое напряжение (К0=1, К=0.5), В	±2.5
Разрешающая способность, В	2.5/4096/
1 ' '	(K0*K)
Компенсируемое напряжение смещения на входе, мВ	±50/K0
Количество ЦАП	2
Разрядность ЦАП, бит	12
Диапазон изменения напряжения на выходах выходных	±2.5
усилителей ЦАП, В	
Количество обслуживаемых шаговых двигателей	3
Минимальный шаг системы позиционирования, мм	0.09407
Максимальное количество шагов	150 x 150 x 150
Размер зоны измерения	≈(15 х 15 х 15) мм
Тактовая частота микроконтроллера (1 инструкция – 1	16
такт), МГц	
Размер памяти программ, Кбайт	128
Размер ОЗУ, Кбайт	4+32
Скорость обмена с ПК по каналу RS-232, бод/с	115200

(данные указаны для 3D-модификации)

Комплекс был спроектирован для работы с различными типами датчиков магнитного поля. В табл. 3.1 приведены основные характеристики комплекса, не зависящие от используемого типа датчиков. В табл. 3.2 даны характеристики при использовании датчиков 2SA-10 фирмы SENTRON [67,92] (работа с другими типами датчиков не проводилась). Датчики 2SA-10 были выбраны в качестве основных потому, что они обладают весьма хорошими характеристиками (малым размером чувствительной области, высокой линейностью, широким диапазоном измеряемого поля, возможностью измерения двух компонент поля одновременно и пр.).

Таблица 3.2. Характеристики экспериментальной установки

при использовании датчи	иков 2SA-10
-------------------------	-------------

Параметр	Значение
Линейный диапазон измеряемого поля, мТл	± 40
Максимальный диапазон измеряемого поля, мТл	± 45
Разрешающая способность	±2
(K0=1, K=512, число измерений=10000), мкТл	
Нелинейность (в линейном диапазоне измеряемого поля), %	0.2
Максимальная частота изменения измеряемого поля, кГц	до 15

Программное обеспечение АПК состоит из двух основных частей. Первая часть является программой микроконтроллера основного модуля установки и предназначена, в основном, для осуществления процесса измерений поля, накопления данных и посылки их на персональный компьютер. Вторая часть представляет собой программу на персональном компьютере, позволяющую пользователю управлять процессом измерений, анализировать результаты и решать задачи МКВ. Следует отметить, что для обработки результатов большинства экспериментов дополнительно использовался пакет программ ППМКВ, реализованный в среде МАТLAB.

3.1.2. Описание аппаратной части

Структура аппаратной части системы МКВ показана на рис. 3.1. Главным элементом установки является плата сбора и обработки информации. К ней подключены датчики магнитного поля, входной усилитель и система позиционирования. Кроме того, имеется возможность подключения источника магнитного поля с усилителем мощности (экспериментов с управляемым источником магнитного поля пока не проводилось). Посредством интерфейса RS-232 установка связана с персональным компьютером (ПК).

Установка может проводить измерение и генерацию поля, накапливать данные и предварительно их обрабатывать. Программа на ПК занимается решением задач МКВ (ресурсов самой установки достаточно для решения лишь самых простых из них).

68



Рис. 3.1. Блок-схема экспериментальной установки

Исторически было две модификации установки. Первая модификация (рис. 3.2) позволяла измерять по две компоненты вектора индукции магнитного поля в одной плоскости и, соответственно, решать только двухмерные задачи МКВ. Затем, во второй модификации установки (рис. 3.3), была реализована предусмотренная при проектировании возможность измерения всех трёх компонент поля в пространстве.



Рис. 3.2. Внешний вид системы МКВ (2D-модификация): 1 – плата сбора и обработки информации; 2 – входной усилитель; 3 – система позиционирования; 4 – плата управления системой позиционирования; 5 – датчик магнитного поля; 6 – источник магнитного поля (постоянный магнит). Источники питания +5 В и ±15 В, +5 В не показаны



Рис. 3.3. Внешний вид системы МКВ (3D-модификация): 1 – плата сбора и обработки информации; 2 – входные усилители; 3 – система позиционирования; 4 – плата управления системой позиционирования; 5 – датчики магнитного поля; 6 – источник магнитного поля (постоянный магнит); 7 – источник питания системы позиционирования (+5 B); 8 – основной источник питания (±15 B, +5 B)

Датчики магнитного поля

Для измерения вектора индукции магнитного поля используется интегральный датчик Холла 2SA-10 фирмы SENTRON (рис. 3.4). К достоинствам этого датчика можно отнести хорошую линейность, широкий диапазон измеряемого поля, наличие встроенного концентратора поля и схем усиления. Основные характеристики датчика приведены в табл. 3.3.



Рис. 3.4. Двухосевой датчик магнитного поля 2SA-10: а) внешний вид датчика (показано расположение диска-концентратора магнитного поля и направления осей чувствительности); б) блок-схема датчика (иллюстрация из [67.92])

Количество измеряемых компонент поля	2
Размер чувствительной области (диаметр диска-концентратора маг-	0.2
нитного поля), мм	
Магнитная чувствительность, В/Тл	50
Линейный диапазон измеряемого поля, мТл	±40
Максимальный диапазон измеряемого поля, мТл	±45
Частота изменения измеряемого поля, КГц	015
Нелинейность (типичное значение в линейном диапазоне измеряемо-	0.1
го поля), %	0.1
Напряжение смещения, мВ	±10
Максимальная спектральная плотность магнитного шума (в центре	
диска-концентратора), $HT\pi/\sqrt{\Gamma \mu}$	750
Рекомендуемое напряжение питания, В	5.0
Тип корпуса	SOIC-8

Таблица 3.3. Основные характеристики датчика 2SA-10

Датчик подключается к входному усилителю по дифференциальной схеме (рис. 3.5). Поскольку собственный шум датчика достаточно велик (см. табл. 3.3), для повышения точности измерений [23,45] пришлось уменьшить ширину полосы пропускания входного усилителя примерно до 100 Гц посредством фильтров низкой частоты (R1,R2,C1, R1',R2',C1').



Рис. 3.5. Схема подключения датчика 2SA-10 к плате входного усилителя (показаны только сигнальные линии)

Для того, чтобы минимизировать влияние изменений напряжения в цепи питания на выходные сигналы, питание датчика осуществляется от собственного прецизионного источника напряжения 5 В (поз. DA9, приложение П1.7), в качестве которого использовалась микросхема REF195GP, которая обеспечивает высокую стабильность напряжения [88].

В 3D-модификации установки потребовалось измерять не две, а три компоненты вектора индукции поля, поэтому использовались два датчика 2SA-10. Датчики располагаются так, чтобы их оси чувствительности были ортогональны друг другу (рис. 3.6), при этом одна и та же компонента поля измеряется обоими датчиками. Эта особенность использовалась в дальнейшем для масштабирования показаний датчиков для компенсации несоответствия магнитных чувствительностей датчиков.

Измерение трёх компонент вектора индукции поля в одной и той же точке пространства производится в два этапа – сначала поле измеряется одним датчиком, затем второй датчик помещается в ту же самую точку, и с него также снимаются показания.

На рис. 3.7. показаны оси координат 3D-модификации установки и направления осей чувствительностей магнитных датчиков.



Рис. 3.6. Использование двух датчиков 2SA-10 для измерения трёх компонент поля: 1 – датчик B0,B1; 2 – датчик B2,B3; 3 – держатель датчиков



Рис. 3.7. Система координат установки X0,X1,X2 и вектора чувствительности датчиков B0,B1 и B2,B3 (см. рис. 3.5).

Система позиционирования

Система позиционирования предназначена для того, чтобы задавать и измерять пространственные координаты датчиков. Созданная система позиционирования является трёхмерной и имеет, соответственно, три шаговых двигателя. Для создания сис-
темы позиционирования использованы механика, биполярные шаговые двигатели и датчики нулевой дорожки (щелевые оптроны) от приводов магнитных головок стандартных 3.5" дисководов гибких магнитных дисков.

Шаговые двигатели позволяют одновременно изменять и измерять координаты датчиков [35,45]. Вследствие того, что использованы биполярные шаговые двигатели, для управления ими применены специальные микросхемы-драйверы BA6845FS фирмы ROHM CO., LTD [93]. Необходимая последовательность управляющих сигналов формируется микроконтроллером платы сбора и обработки информации. Чтобы исключить влияние скачков тока шаговых двигателей на измерительные цепи, для питания системы позиционирования используется отдельный источник напряжения.

Так как система позиционирования является довольно массивным телом из магнитного материала, датчик магнитного поля пришлось разместить от неё как можно дальше (на расстоянии примерно 15 см) посредством держателя из немагнитного материала.

Входной усилитель с управляемым коэффициентом усиления

Входной усилитель предназначен для масштабирования сигнала, поступающего с датчика магнитного поля. Кроме того, программируемый коэффициент усиления позволяет значительно увеличить динамический диапазон измеряемого сигнала. Наличие инструментального усилителя на входе усилителя позволяет эффективно бороться с синфазными наводками (помехами), а также увеличивает входное сопротивление системы, что важно при работе с некоторыми типами датчиков магнитного поля [5] (например, при работе с мостовыми магниторезистивными датчиками).

Принципиальная схема входного усилителя приведена на рис. П1.7.

Входной каскад усилителя (предварительный усилитель) построен на микросхеме AD620N (поз. DA7 на рис. П1.7) [31,72]. Данная микросхема обладает высокой стабильностью и линейностью коэффициента усиления, а специальный вход REF позволяет эффективно смещать сигнал на выходе микросхемы.

Использованный вариант схемы формирования напряжения смещения на входе усилителя показан на рис. П1.6. Исходя из величины напряжения смещения датчика 2SA-10 (см. табл. 3.3) диапазон регулирования входного напряжения смещения был выбран равным нескольким десяткам милливольт. Величина коэффициента усиления

К0 предварительного усилителя (микросхемы AD620) выбирается посредством переключения соответствующей перемычки на плате.

Выходной сигнал предварительного усилителя (поз. DA7 на рис. П1.7) поступает на вход двухкаскадного усилителя с программно выбираемым коэффициентом усиления. Этот усилитель построен на двух прецизионных операционных усилителях OP07 и четырёх аналоговых ключах К590КН5. Суммарный коэффициент усиления может принимать значения -0.5, -2, -8, -32, -128, -512. Точные значения коэффициентов усиления определяются во время калибровки.

Усиленный в заданное число раз сигнал поступает на вход схемы формирования выходного напряжения смещения, которое составляет половину диапазона АЦП (т.е. 1.25 В).

На выходе схемы усилителя также имеется фильтр низкой частоты (поз. R8, C1 на рис. П1.7), который необходим для корректной работы АЦП. Кроме того, имеется цепь защиты АЦП от перенапряжения (поз. VD1, VD2, R16, R8 на рис. П1.7).

Плата сбора и обработки информации

Плата сбора и обработки информации принимает и выполняет команды от ПК. Она измеряет и генерирует сигналы, накапливает результаты измерений и предварительно обрабатывает их. Вычислительных ресурсов платы в принципе достаточно и для решения простейших задач МКВ.

Главным элементом платы является микроконтроллер Atmega128-16AI (поз. ATMEG1 на рис. П1.2) фирмы Atmel [53,73].

К персональному компьютеру микроконтроллер подключен по последовательному каналу RS-232 посредством драйвера MAX202SE (поз. MAX21 на рис. П1.2). Скорость обмена с ПК составляет 115200 бод/с.

Поскольку плата сбора и обработки информации должна накапливать довольно много результатов измерений, решать некоторые задачи МКВ, к микроконтроллеру подключено внешнее ОЗУ объёмом 32 Кбайта (поз. 62257 на рис. П1.3).

Встроенный в микроконтроллер АЦП имеет разрядность 10 бит. Поскольку поле необходимо измерять с большим разрешением, использовался внешний 12разрядный АЦП AD7858AR (поз. AD786 на рис. П1.4) [31,72].

Для того чтобы решать задачи МКВ, когда нужно управлять величиной поля источника, на борту платы имеются две микросхемы AD7945 [72]

(поз. AD787, AD788 на рис. П1.4), являющиеся 12-разрядными ЦАП. Выходы ЦАП подключаются к выходному усилителю (поз. U29-U31 на рис. П1.4), задачей которого является увеличение нагрузочной способности ЦАП и формирование биполярного выходного сигнала. Диапазон формируемого напряжения на выходе выходного усилителя ЦАП ±2.5 В.

В качестве источника опорного напряжения для ЦАП и внешнего АЦП использована микросхема AD680JT [72] (поз. AD680 на рис. П1.4).

Для управления драйверами шаговых двигателей и входными усилителями используются 4 регистра К1533ИР33 (поз. IP35-IP38 на рис. П1.3).

Реализован также входной цифровой порт на микросхемах – двунаправленных буферах шин К1533АП6 (поз. U14-U18 на рис. П1.3). Именно к этому порту подключаются датчики нуля системы позиционирования.

В установке использована также программируемая логическая интегральная схема (ПЛИС) MAX7128 фирмы Altera [71] (поз. ALTER1 на рис. П1.3), применение которой существенно упростило проектирование и отладку платы.

Проектирование схемы и разводка печатных плат установки осуществлялись в среде проектирования P-CAD [29].

3.1.3. Описание программной части

Структура программного обеспечения

Программное обеспечение построенной установки МКВ состоит из программы микроконтроллера платы сбора и обработки информации ("MCVS") и программы для ПК ("MCVS_terminal").

Программа "MCVS"

Программа платы сбора и обработки информации написана на языке программирования Си++ в среде WinAVR [53]. Программирование микроконтроллера Atmega128 осуществлялось посредством интерфейса внутрисистемного программирования (ISP) с помощью программатора STK200 и утилиты AVRDUDE [53].

Структура программы MCVS показана на рис. 3.8.

<u>Блок инициализации</u> программы MCVS отвечает за инициализацию памяти стеков и переменных, подсистемы микроконтроллера, его портов, устройств установ-

ки МКВ, глобальных переменных, блока обмена с ПК. Кроме того, в нём считываются параметры системы и калибровочные коэффициенты из ППЗУ.



Рис. 3.8. Блок-схема программы MCVS

<u>Основная часть</u> программы MCVS реализована в виде функции main(), представляющей собой бесконечный цикл, в теле которого находятся обработчик команд от ПК и обработчик фоновых процессов. Параллельно с выполнением главного цикла программы происходит обработка различных аппаратных прерываний микроконтроллера (прерываний таймера, последовательного порта и др.)

В виде фоновых процессов реализованы режимы непрерывного измерения напряжения на входах АЦП в реальном времени ("осциллограф АЦП10" и "осциллограф АЦП12").

<u>Модуль обмена данными с ПК</u> может работать в двух основных режимах: текстовом и двоичном. Для приёма / передачи данных использованы стандартные функции работы с последовательным портом [53,73].

В текстовом режиме данные передаются и принимаются в виде последовательности ASCII-символов. Наличие текстового режима позволяет использовать для работы с системой МКВ любой компьютер, на котором имеется программа-терминал. Этот режим использовался в основном для отладки программы MCVS.

В двоичном режиме данные передаются в виде easyPPP-пакетов. Основой для создания протокола easyPPP послужил протокол Asynchronous HDLC, который используется в PPP-протоколе передачи данных [86].

Кроме текстового и двоичного режимов обмена данными с ПК имеется ещё один специальный режим, позволяющий установке МКВ непрерывно передавать 12битные данные АЦП в ПК со скоростью, приближающейся к максимальной (для данной аппаратной реализации) скорости передачи данных. Он используется, когда результаты измерений передаются в ПК в реальном времени.

Для управления шаговыми двигателями системы позиционирования в программе MCVS были реализованы соответствующие функции, позволяющие изменять и измерять текущие координаты датчиков.

<u>В программе MCVS также реализована функция преобразования, которая</u> выполняет перевод <u>показаний АЦП</u> в единицы измерения напряжения – вольты. В основе этой функции лежат передаточные характеристики измерительной системы "входной усилитель – АЦП", показанные на рис. 3.9. Горизонтальные участки графиков соответствуют "зашкаливанию", которое возникает, если на вход АЦП подаётся напряжение, выходящее за пределы диапазона измерения АЦП.



Рис. 3.9. Передаточные характеристики системы "входной усилитель – АЦП" для различных значений коэффициента усиления. Uвх – напряжение на входе усилителя, Uaцп – показания АЦП

Правильный выбор коэффициента усиления позволяет избежать "зашкаливания", а также добиться минимальной относительной погрешности измерений, чему соответствует работа в старшей части шкалы АЦП.

В программе MCVS предусмотрены функции измерения напряжения, позволяющие выбирать АЦП (АЦП12 или АЦП10), вход (канал входного усилителя), предел измерения (коэффициент усиления) и частоту дискретизации. Они возвращают минимальное, максимальное, среднее и среднеквадратичное значения результатов требуемого числа измерений.

Поскольку входные усилители и АЦП не являются абсолютно линейными, а точные значения коэффициентов усиления неизвестны, то возникает необходимость в использовании функции преобразования результатов измерения из единиц показаний АЦП в вольты. В качестве этой функции используется полином пятой степени (на каждом пределе измерения калибровка проводилась по пяти точкам: ±Umax, ±Umin, 0). Значения ±Umax, ±Umin в идеале должны соответствовать точкам переключения коэффициента усиления – в этом случае ошибка, вызванная сменой предела измерения, будет минимальной. Калибровка в точке 0 необходима для того, чтобы можно было правильно измерять слабые сигналы без переключения коэффициента усиления.

Значения коэффициентов функции преобразования вычисляются программой MCVS_terminal во время калибровки. Найденные значения коэффициентов хранятся затем в энергонезависимой памяти, в качестве которой используется ППЗУ микро-контроллера.

В таблице 3.4 приведены калибровочные значения напряжений для различных пределов измерений установки. Эти значения выбраны так, чтобы наиболее эффективно откалибровать установку по всей ширине диапазонов измерения.

Таблица 3.4. Калибровочные значения напряжений (Uвх, калибр. – калибровочное значение напряжения; Uвх, max – максимальное измеряемое напряжение при коэффициенте усиления К)

Uвх, калибр., мВ	Uвх, max (K), мВ	Пределы измерения, К
2400	2500 (0.5)	0.5
600	625 (2)	0.5, 2
150	156 (8)	2, 8
37.5	39.1 (32)	8, 32
9.37	9.77 (128)	32, 128
2.34	2.44 (512)	128, 512
0.580	-	512
0	-	0.5, 2, 8, 32, 128, 512

Программа "MCVS_terminal"

Программа "MCVS_terminal" предназначена для того, чтобы управлять установкой МКВ, принимать и обрабатывать результаты измерений, отображать на экране и сохранять в файлах полученные данные. Программа "MCVS_terminal" является 32-битным Windows-приложением, написана на языке C++ в среде разработки Borland C++ Builder 4 [4].

Программа состоит из двух основных частей (рис. 3.10): объекта класса MCVS и графического интерфейса пользователя.



Рис. 3.10. Структура программы MCVS_terminal

Связь с установкой МКВ осуществляется посредством объекта класса TComPort [59]. Обмен данными происходит в основном в двоичном режиме: обработка пакетов easyPPP проводится объектом соответствующего класса. Реализована также поддержка режима "12 бит", при котором данные измерений 12-ти разрядного АЦП (АЦП12) принимаются, обрабатываются и отображаются в режиме реального времени. Результаты измерений либо отображаются на экране компьютера, либо сохраняются в файлах. Объект <u>класса MCVS по сути</u> является виртуальной копией установки MKB: методы класса соответствуют основным процедурам программы MCVS, а переменные класса – её глобальным переменным. Кроме того, объект класса MCVS содержит образ параметров системы MKB и коэффициентов функций преобразования показаний АЦП. В программе MCVS_terminal имеются процедуры, которые позволяют синхронизировать этот образ с реальным содержимым ППЗУ, а также сохранять/загружать его в файл/из файла (ерг).

Внешний вид <u>графического интерфейса пользователя</u> программы MCVS_terminal представлен на рис. 3.11, 3.12. Приложение имеет две основные вкладки: Commands и Debug.

Вкладка Debug предназначена для побайтного отображения отправляемых команд и принимаемых сообщений и используется при отладке.

Вкладка Commands содержит множество подвкладок, каждая из которых соответствует той или иной операции с установкой МКВ и содержит соответствующие элементы управления, ввода и вывода информации. В качестве примера на рис. 3.11 показана подвкладка режима осциллографа АЦП12.

ADC12 scope n	node		and the second s		
2400			Y	Input: 1	
2200				Scale: 128 Preamp: 1	
2000	~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~			T scale: 5 kHz	
1800				Y scale: 5	
1000 Oms	20ms	40ms		View: dots	

MCVS termina					
e Options Hel	P				
ommands Debu	19				
Measure Field					
Motors Senso	rs Options		backgro	und field	
full repeats: 10		Measure	Load	Filter	Save
don't off motor	rs while measure 🗾				
auto scale 📘	volts		raw	field	
autoso Times: 5	cale select: Min.%: 20	Measure	Load	Filter	Save
scale	e factors:	clear	field = (ra v	+ - backgro	und)
Kx1: 1.0	Ki0: 0.02				
Kx2: 1.0	Ki1: 0.02				Jave



Рис. 3.12. Внешний вид интерфейса пользователя программы MCVS_terminal. Подвкладка "Измерение поля"

Программа "MCVS_terminal" позволяет получить картину измеряемого поля. Результаты измерений сохраняются в виде текстовых файлов, что позволяет обрабатывать их в других программах. Поддерживается работа с тремя различными форматами файлов. Файлы txt предназначены для работы с программами MATLAB, Excel и др. Файлы mpf позволяют визуализировать и обрабатывать данные в программе "Magnetic FIeld" (данная программа была создана автором для визуализации полей и решения задач МКВ, но вскоре от неё пришлось отказаться в пользу системы MAT-LAB). Файлы fld являются "родными" для программы MCVS_terminal: кроме координат точек измерения и значений поля они содержат параметры процедуры измерения поля.

Процедура измерения поля (рис. 3.12) имеет множество настроек, с помощью которых пользователь может задавать различные параметры: конфигурация и размер области измерения, коэффициенты усиления, частоту дискретизации сигнала, количество измерений в каждой точке измерения и пр.

Обычно измерение поля источника включает в себя три этапа: измерение поля при отсутствии источника, измерение поля при наличии источника, вычисление поля, создаваемого источником. Все три этапа выполняются программой "MCVS_terminal", для чего в ней имеются соответствующие массивы значений полей: backg_field, raw field и clear field. Любой из этих массивов может быть сохранён в файлах.

3.1.4. Калибровка измерительной части комплекса

Калибровка измерительной части АПК СМКВ производилась в два этапа: сначала калибровались характеристики преобразования входных усилителей напряжения (по известному источнику напряжения), затем калибровались показания системы при измерении поля (по известному источнику магнитного поля).

Результаты калибровки входных усилителей по напряжению использовались при преобразовании показаний датчиков в абсолютные значения компонент вектора индукции магнитного поля (выражаются в Теслах).

Ввиду отсутствия прецизионных приборов для измерения магнитного поля или эталонных источников поля, в качестве истинных значений коэффициентов преобразований датчиков поля использовались значения, гарантированные производителем. Результаты калибровки по источнику магнитного поля носили оценочный характер и были предназначены для того, чтобы определить рабочий диапазон, на который датчики поля были настроены заводом изготовителем (датчики 2SA-10 могут поставляться запрограммированными на значение коэффициента преобразования поля, равное 25 В/Тл или 50 В/Тл) [67,92].



Рис. 3.13. Коэффициенты преобразования/усиления различных узлов системы измерения

Полный процесс преобразования единиц измеряемого поля из Тесла в деления АЦП (рис. 3.13) можно записать следующим образом:

$$D = Sud \times Kuu \times Sbu \times F , \qquad (3.1)$$

здесь *F* - измеряемое поле, *Sbu* - чувствительность датчика 2SA-10, *Kuu* - коэффициент усиления входных усилителей (зависит от выбранного предела измерения), *Sud* - коэффициент преобразования АЦП.

В ходе калибровки системы измерения по напряжению посредством блока калибровки, определяется значение коэффициента *Gud*, который равен:

$$Gud = Sud \times Kuu . \tag{3.2}$$

В ходе калибровки системы измерения по полю посредством катушек Гельмгольца (непосредственно по показаниям АЦП), определяется значение коэффициента *Gbd*, который равен:

$$Gbd = Sud \times Kuu \times Sbu . \tag{3.3}$$

Чувствительность Sbu используемых датчиков можно найти по формуле:

$$Sbu = Gbd/Gud . (3.4)$$

Для калибровки входных усилителей по напряжению использовался блок калибровки, схема которого изображенная на рис. 3.14. Параметры схемы были подобраны в соответствии с табл. 3.4. Все вычисления в процессе калибровки производятся программой MCVS_terminal. Истинные значения напряжения на входе усилителей измерялись лабораторным вольтметром (рис. 3.15). Калибровка проводилась при значении коэффициента предусиления K0=1.



Рис. 3.14. Принципиальная схема блока калибровки



Рис. 3.15. Схема калибровки входных усилителей

Для того чтобы определить характеристики преобразования поля в напряжения используемыми датчиками магнитного поля, в качестве эталонного источника поля были использованы катушки Гельмгольца. Однородное поле, создаваемое этой системой катушек в своём центре, вычисляется по формуле:

$$B = (4/5)^{3/2} \mu_0 N I / R , \qquad (3.5)$$

где B - индукция магнитного поля, μ_0 - магнитная постоянная, N - число витков в каждой из двух катушек, I - величина электрического тока, протекающего через катушки, R - радиус катушек (выбирается равным расстоянию между катушками).

Фотография используемых катушек показана на рис. 3.16.

Число витков каждой из двух катушек N = 100, внутренний радиус обмоток катушек $R_{_{hapymp}} = 25.0$ мм, наружный радиус обмоток катушек $R_{_{hapymc}} = 28.0$ мм, ширина обмоток катушек h = 5.5 мм. Намотка производилась внавал медным лакирован-

ным проводом диаметром d = 0.15 мм. Расчётный радиус катушек и расстояние между их центрами составляло R = 26.5 мм.



Рис. 3.16. Эталонный источник магнитного поля - катушки Гельмгольца

Схема эксперимента, в ходе которого производилась описанная калибровка по магнитному полю, представлена на рис. 3.17. Для того чтобы измерять ток, проходящий через катушку, использовался последовательно включенный резистор R1 с известным сопротивлением, на котором вольтметром измерялось падение напряжения. Чтобы иметь возможность менять направление тока и поля на противоположное, использовался переключатель S1.

При калибровке соответствующий датчик (B0,B1 или B2,B3) располагался точно в центре системы катушек Гельмгольца, а одна из его осей чувствительности (B1 или B3) ориентировалась параллельно оси катушек.





В процессе калибровки системы измерения были получены средние по всем пределам измерения значения чувствительностей датчиков. В таблице 3.10 представлены эти значения и их отклонения от заводских значений.

Канал измерения	Измеренное значе- ние, В/Тесла	Заводское значение, В/Тесла	Отклонение от за- водского значения, %
B1	44.41	50	11.2
B3	43.46	50	13.1

Таблица 3.10. Значения чувствительностей датчиков 2SA-10 Sbu (Вольт/Тесла), гарантируемые заводом изготовителем и полученные в процессе калибровки.

Далее во всех экспериментах в качестве значений чувствительностей датчиков использовались заводские значения (Sbu=50 Вольт/Тесла), поскольку использованные для калибровки катушки Гельмгольца, созданы с точностью, не превышающей значений в таблице 3.10 (вспомним, хотя бы тот факт, что катушки намотаны внавал, а не виток к витку). При необходимости провести более точные эксперименты по калибровке датчиков по полю, необходимо иметь калиброванный источник поля или калиброванный датчик поля.

Следует отметить, что в принципе, при решении ОЗД в случае, когда нет необходимости в определении абсолютного значении вектора магнитного момента источника (например, при решении задачи магнитного позиционирования), калибровка по абсолютному значению измеряемого поля может отсутствовать – главное, обеспечить <u>линейность</u> характеристики преобразования поля в напряжение и одинаковую чувствительность датчиков, измеряющих компоненты вектора индукции магнитного поля.

3.1.5. Способ измерения координат объектов в системе координат установки

В описанных далее натурных экспериментах по моделированию приложений системы МКВ для измерения истинных значений координат объектов (датчиков, источников поля и др.) используется метод, который, несмотря на свою простоту, позволяет получить достаточно высокую точность.

Начало системы координат, в которой измеряются положения объектов, соответствует нулевому положению датчиков, а направления осей координат совпадают с направлениями перемещения системы позиционирования установки. Система координат установки и направления чувствительных осей датчиков были показаны на рис. 3.6. Оси X,Y,Z установки обозначены, соответственно, X0,X1,X2. Чувствительные оси первого датчика, измеряющего компоненты поля Bx,By обозначены соответ-

ственно B0,B1. Чувствительные оси второго датчика, измеряющего компоненты поля Bz,By обозначены соответственно B2,B3.

На рабочую плоскость XY установки (основание, к которому жестко прикреплена система позиционирования) наклеивается лист миллиметровой бумаги. В плоскости XZ установки также помещается лист миллиметровки

Измерение координат производится в несколько этапов.

Прежде всего, производится калибровка - устанавливается взаимосвязь между листами миллиметровки и системой координат установки МКВ. Для этого делается 4 фотоснимка, соответствующих различным положениям датчиков установки: {0,0,0}, {100,0,0}, {0,100,0}, {0,0,100}. Здесь координаты точек указаны в шагах установки. Величина шага установки по каждому направлению известна (см. табл. 3.1).

Затем, на основании установки размещаются все необходимые объекты, датчик установки помещается в положение {0,0,0} и, посредством цифровой фотокамеры, делается два снимка – один сверху (вид на плоскость XY), другой спереди (вид на плоскость XZ). При этом фотокамера располагается достаточно далеко от установки, перпендикулярно фотографируемой плоскости и примерно в одних и тех же точках (в идеале лучше иметь две неподвижные камеры).

Далее, на полученных изображениях измеряются координаты (в пикселях) искомых объектов, реперных точек на миллиметровках, центра системы датчиков. Производится перевод полученных значений из системы координат изображений сначала в систему координат, привязанных к миллиметровкам, а затем в систему координат установки (необходимые матрицы преобразования координат вычисляются на этапе калибровки).

Описанный метод позволил достичь абсолютной погрешности измерения 3Dкоординат объектов не превышающей 0.5 мм.

3.1.6. Результаты испытаний комплекса

Перед проведением натурных экспериментов АПК-МКВ был протестирован в работе, откалиброван, определены его основные характеристики, выработаны некоторые рекомендации по настройке параметров измерения поля для получения оптимальных результатов. Также были выявлены некоторые недостатки системы и предложены способы их устранения.

Как показала практика измерений, большей точности результатов измерений удавалось добиться при использовании в каждой серии измерений лишь одного предела измерения входных усилителей (то есть без переключения пределов). Это позволяло избежать ошибки "сшивания" разных пределов.

По результатам измерений постоянного однородного поля (использовалось МПЗ) в проводимых экспериментах была определена абсолютная погрешность измерения компонент вектора индукции поля – она составила не более $\Delta B=\pm 2$ мкТл. При этом абсолютная погрешность определения пространственных координат точек измерения была принята равной величине одного шага установки, т.е. около 0.095 мм, что подтверждается результатами измерений координат датчиков по цифровым фотографиям при различных положениях.

Построенная установка обладает вычислительными ресурсами, достаточными для решения простейших задач МКВ в режиме реального времени без использования внешнего компьютера. Однако, ввиду удобства (например, возможности визуализации данных измерений и результатов решения ОЗД) решение задач МКВ проводилось в среде MATLAB 6.5 посредством разработанного автором пакета программ ППМКВ (см. главу 4).

Посредством построенного АПК было проведено большинство натурных экспериментов по моделированию задач МКВ, описание которых приводится ниже.

3.2. Приложения системы магнитного компьютерного видения

Далее будут рассмотрены описания натурных экспериментов по моделированию приложений системы МКВ и полученные результаты.

3.2.1. Магнитное позиционирование (локация)

Одним из возможных приложений метода решения ОЗД является задача МПЛ, которую можно сформулировать следующим образом.

Имеется некоторый твердый объект из немагнитного материала. С этим объектом жестко связан точечный магнитный диполь (компактный постоянный магнит). Требуется, измеряя поле этого диполя, определить местоположение и, если необходимо, ориентацию искомого объекта.

В рамках данной работы было проведено два натурных эксперимента по решению задачи магнитной локации: (2+1)D-МПЛ и (3+2)D-МПЛ.

Постановка задачи (2+1)D локации

Задача (2+1)D локации заключается в том, чтобы определить местоположение (2 координаты) и ориентацию (угол, определяющий направление) объекта, перемещающегося по плоскости.

Сформулированную задачу можно легко решить, используя частное решение ОЗД – решение ОЗД в 2D случае (см. раздел 2.6 главы 2). В этом случае имеются следующие ограничения: вектор магнитного момента диполя и все точки измерения должны лежать в одной плоскости. В каждой точке измеряют по две компоненты вектора индукции магнитного поля, лежащие в той же плоскости.

Экспериментальная установка

Натурный эксперимент, в ходе которого была решена сформулированная выше задача (2+1)D-локации, был выполнен исторически раньше, чем создан АПК-МКВ. Инструментальной основой эксперимента была простейшая установка 2D-магнитного видения. Эта установка позволяла измерять по две компоненты поля в точках, принадлежащих одной плоскости. Кроме того, она позволяла измерять третью компоненту поля в той же плоскости.

В качестве датчиков магнитного поля в данной установке использовались упомянутые ранее датчики Холла 2SA-10. При измерениях использовалась рекомендуемая производителем схема включения датчиков (рис. 3.18). Выходные напряжения датчиков измерялись с помощью цифрового лабораторного вольтметра B7-40/4. Для питания датчиков использовался лабораторный источник стабилизированного напряжения Б3-713,4. Уровень напряжения питания датчиков контролировался с помощью вольтметра B7-16.



Рис. 3.18. Принципиальная схема включения датчика 2SA-10

Экспериментальная установка состояла из неподвижного плоского основания S1 (рис. 3.19). На него нанесена сетка, образующая лабораторную систему координат

XY. На поверхности основания S1 находится источник поля M и подвижная часть S2 установки с перекрестием T и жёстко прикреплёнными датчиками U1 и U2. Перекрестие позволяет перемещать датчики строго поступательно и с хорошей точностью определять их положение в лабораторной системе координат. При изготовлении установки использовались только немагнитные материалы.

Взаимное расположение датчиков и источника поля показано на рис. 3.20. Центры чувствительности датчиков и вектор магнитного момента источника находятся в одной горизонтальной плоскости, параллельной плоскости ХҮ лабораторной системы координат. Оси чувствительности первого датчика Вх1 и Ву1 параллельны осям Х и Y. Ось чувствительности Вz2 второго датчика перпендикулярна плоскости ХҮ. Таким образом, датчик U1 позволяет измерять х-, у-компоненты поля, а датчик U2 предназначен для измерения z-компоненты поля в той же плоскости.



Рис. 3.19. Экспериментальная установка (вид сверху)





Рис. 3.20. Взаимное расположение датчиков и источника поля

Рис. 3.21. Источник поля *m* – полный магнитный момент

В качестве источника поля в эксперименте использовался постоянный магнит в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 3.21). Предполагалось, что выбранный

источник можно представить в виде точечного диполя, расположенного в центре магнита. Магнитный момент эквивалентного точечного диполя считался равным суммарному магнитному моменту магнита, который был определён посредством измерения поля датчиками 2SA-10 для известного положения и ориентации магнита.

Натурный эксперимент (2+1)D локация

Сначала была получена картина фонового поля (поля в отсутствие источника). Это поле вычиталось из результатов дальнейших измерений.

После этого необходимо было расположить источник поля (вектор его магнитного момента) наиболее точно в плоскости измерения. Для этого путём юстировки положения источника удалось добиться минимального изменения показаний *Bz2* (значений *z*-компоненты) при перемещении датчиков в плоскости измерения.





Рис. 3.22. Расположение областей Рис. 3.23. Результаты решения ОЗД измерения 1 относительно источника по- на основе экспериментальных данных ля 2; *m* – вектор магнитного момента ис- для 22 областей (см. рис. 3.28) точника

В заключение эксперимента измерялось поле источника в различных точках плоскости. Погрешность позиционирования датчиков (т. е. погрешность определения относительных координат точек измерения) была не хуже ± 0.1 мм. Точность измерения абсолютных координат датчиков и источника в лабораторной системе отсчёта составляла ± 0.5 мм. Абсолютные погрешности измерения компонент поля *Bx1*, *By1*, *Bx2*, *Bz2* были $\pm 2 \cdot 10^{-6}$ Тл.

Результаты эксперимента

В ходе физического эксперимента поле источника было измерено в 23 областях (рис. 3.22). Каждая из этих областей содержит по 3х3 точек измерения, расположенных с шагом 1 мм. Для этих областей посредством 2D-алгоритма (см. раздел 2.6) был получен следующий набор решений ОЗД, показанный на рис. 3.23. Точками показаны вычисленные на основании экспериментальных данных координаты диполей. Закрашенный прямоугольник – источник поля. На рисунке не показано одно решение, которое является явным "выбросом". Средние значения координат и магнитного момента диполя (для выборки из 22 решений) показаны в табл. 3.11. Там же приведены истинные (измеренные) значения этих величин.

Величина	Измеренное значение	Вычисленное значение
$X_{\!x}$, мм	100.0 ± 0.5	98 ± 2
$X_{\! {\mathcal Y}}$, мм	100.0 ± 0.5	99 ± 2
m_x , 10^{-3} A·m ²	3.0 ± 0.2	9 ± 7
m_y , 10^{-3} A·m ²	43.2 ± 0.4	45 ± 5
m , 10 ⁻³ A·m ²	43.2 ± 0.4	48 ± 6

Таблица 3.11. Результаты экспериментального решения ОЗД

Очевидно, что вычисленные значения координат диполя и его магнитного момента совпадают с реальными значениями.

Помимо демонстрации возможности решения ОЗД разработанным методом, в ходе описанного эксперимента также были сформулированы некоторые требования, учтенные позднее при создании АПК Система МКВ.

Постановка задачи (3+2)D магнитной локации

Задача (3+2)D-магнитной локации заключается в том, чтобы по данным измерения магнитного поля источника определить его положение и ориентацию в пространстве. На практике источник поля (обычно постоянный магнит) жестко прикрепляется к немагнитному объекту наблюдения.

Следует отметить, что в случае магнитной локации с использованием дипольного источника ориентацию объекта можно определить с точностью до угла поворота вокруг вектора магнитного момента диполя.

В основе решения сформулированной задачи (3+2)D-магнитной локации лежит решение ОЗД в 3D-случае (см. раздел 2.2 главу 2).

Натурный эксперимент по решению задачи (3+2)D локации

Для решения задачи магнитной (3+2)D локации использовался описанный ранее АПК-МКВ (см. раздел. 3.1).

В качестве источника поля использовался постоянный магнит из материала NdFeB, имеющий форму цилиндра с диаметром 4.95 мм и высотой 5.90 мм, намагниченный вдоль оси цилиндра. Для удобства магнит приклеен к небольшому основанию, которое может перемещаться вдоль направляющей, сделанной из деревянной линейки (рис. 3.24, 3.25).

Посредством нескольких пробных экспериментов была найдена оптимальная (с точки зрения точности решения ОЗД) конфигурация области измерения: куб 3х3х3 точки, расположенных с шагом 1,8814 мм (20 шагов системы позиционирования) вдоль каждой из осей системы координат установки.





Рис. 3.24. Фотография эксперимента по моделированию магнитной локации. вид сверху

Рис. 3.25. Фотография эксперимента по моделированию магнитной локации. вид спереди

Измерения производились на пределе измерения с коэффициентом усиления 8. Частота измерений равнялась 10 КГц, в каждой точке для каждой компоненты поля проводилось по 20000 измерений и определялось среднее. (Эти же настройки использовались в экспериментах, описанных в разделах 3.2.2, 3.2.5, 3.2.6.)

Для решения ОЗД при каждом положении источника проводилось по два измерения поля: одно соответствовало измерению фонового поля (поля в отсутствие источника), другое – измерению поля в присутствии источника. Вычитая из результатов второго измерения фоновое поле, мы получали истинное поле источника.

Как показали измерения, в пределах рабочей области установки фоновое поле можно считать однородным, поэтому для повышения точности измерений в качестве фонового поля использовалось его среднее значение по всем точкам измерения.

Результаты эксперимента

Результаты проведенного эксперимента по моделированию решения задачи магнитного позиционирования для различных положений источника представлены в табл. 3.13, 3.14. В названиях столбцов используется обозначение алгоритмов решения ОЗД из раздела 2.5.4 главы 2.

Τ	Сабл. 3.13	Абсолютные	ошибки	определения	местоположен	ия и	ориентации	дипо-
ля, 1	MM							

L, мм	ΔΧ,	MM	Δdir M , °		
	mnk2 01 g	mnk2 01a none	mnk2 01 g	mnk2 01a none	
55.2	10.0	9.8	19.8	22.8	
50.4	3.1	3.2	16.9	16.4	
45.8	7.8	6.4	24.8	23.5	
41.0	2.4	2.4	14.7	15.0	
37.1	1.8	1.7	14.2	14.3	
32.6	1.6	1.4	18.1	18.0	
29.0	0.5	0.5	18.0	17.8	
25.7	0.9	0.9	19.2	19.4	
23.1	1.0	1.1	18.8	18.7	
21.3	1.5	1.6	14.7	13.6	
20.6	1.7	1.7	13.1	10.6	
20.7	1.7	1.7	4.7	4.9	

Как видно из таблицы 3.13, при использовании квадратичной аппроксимации, в области видимости радиусом L примерно 40 мм ошибка определения местоположения диполя не превышает 2 мм, а ошибка определения ориентации диполя не превышает 20 градусов. Среднее (по измерениям в пределах области видимости источника) значение модуля вектора магнитного момента источника составило 0.108 A*м^2 ± 0.012 A*м^2 (Расчётное значение для магнитного момента цилиндрического магнита из материала NdFeB, Br=1.2 Тл составило 0.116 A*м^2). А максимальная ошибка определения модуля вектора магнитного момента не превысила 0.036 A*м^2.

По полученным данным можно сделать вывод, что алгоритмы "mnk2 01 g" и "mnk2 01a none" сопоставимы по точности решения.

3.2.2. Дистанционное измерение магнитного момента

Постановка задачи

Пусть имеется дипольный источник постоянного магнитного поля, например, постоянный магнит. Требуется определить, какой у этого источника вектор магнитно-го момента.

Для решения этой задачи практике часто требуется сначала расположить источник в строго фиксированном положении, а затем измерить его поле в одной или нескольких точках измерения. При этом если направление вектора магнитного момента заранее неизвестно, могут возникнуть определенные трудности, преодолеть которые можно посредством дополнительных измерений поля вокруг источника.



Рис. 3.26. Использование системы МКВ для дистанционного измерения магнитного момента. Здесь *X*,*m* – положение и магнитный момент диполя; *B*(*r*_a) – значение вектора индукции поля в точках измерения; *S* – набор датчиков поля; *A* – система усиления и оцифровки; *F* – программа решения ОЗД; *X'*,*m'* – найденные положение и магнитный момент диполя.

Используя разработанный метод решения ОЗД, можно определить модуль и направление вектора магнитного момента источника, всего лишь поместив источник в зону действия установки МКВ (рис. 3.26). Это позволяет значительно ускорить и упростить процесс измерения.

Натурный эксперимент

Натурный эксперимент по моделированию задачи дистанционного измерения магнитного момента совпадает с натурным экспериментом по решению задачи (3+2)D магнитной локации, описание которого представлено выше.

3.2.3. Навигация автономного агента посредством системы магнитного компьютерного видения

Постановка задачи (2D-случай)

Сформулируем задачу навигации автономного агента посредством системы МКВ следующим образом.

Имеется агент, снабжённый системой датчиков магнитного поля, позволяющих измерять по две компоненты вектора индукции. Далее будем полагать, что система координат агента (рис. 3.27) жёстко привязана к агенту и указанной системе датчиков,

начало этой системы координат совпадает с геометрическим центром системы датчи-ков.



Рис. 3.27. Агент, снабжённый системой датчиков магнитного поля. Показан способ перемещения агента: сначала агент поворачивается на угол Δφ; затем осуществляет поступательное перемещение Δ*r* по прямой. S – начальная точка, E – конечная точка, *m* – ориентир (источник поля)

Решая задачу навигации, агент должен придти из начальной точки S в конечную точку E (рис. 3.27). Агенту известны параметры диполя ориентира (его координаты и вектор магнитного момента) и координаты точек S и E в лабораторной системе координат.

В каждой точке траектории агент измеряет поле, затем решает задачу ориентирования. Вычислив своё местоположение и ориентацию в лабораторной системе координат, агент определяет направление на конечную точку траектории Е, поворачивается на месте на нужный угол и перемещается по прямой на некоторое фиксированное расстояние Δr (рис. 3.27).

Далее в тексте символом L будем обозначать значения величин в лабораторной системе координат; символом A – значения этих величин в собственной системе координат агента. Например, значения вектора магнитного момента m диполя в лабораторной системе координат и в системе координат агента будут соответственно ${}^{L}m$ и ${}^{A}m$.

Решение (2D-случай)

Очевидно, что для однозначного решения задачи ориентирования в двухмерном случае агенту достаточно знать параметры лишь одного диполя-ориентира.

Рассмотрим рис. 3.28. На нём введены следующие обозначения (здесь и далее $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$):

 eL_{α} – векторы ортонормированного базиса лабораторной системы координат;

 eA_{α} – векторы ортонормированного базиса системы координат агента (они задают ориентацию агента);

m – вектор магнитного момента диполя-ориентира;

X – координаты диполя-ориентира;

 $\langle r \rangle$ – вектор, задающий положение агента в лабораторной системе координат.



Рис. 3.28. Решение задачи навигации в 2D-случае

Величины ^{*L*}*X* и ^{*L*}*m* считаются заданными. Векторы ^{*A*}*X* и ^{*A*}*m* агент находит, решая ОЗД. Необходимо определить положение агента ^{*L*} $\langle r \rangle$ и его ориентацию ^{*L*}*eA*_{*a*} относительно лабораторной системы координат.

Для этого на векторе *m* построим вспомогательную систему координат. Векторы её ортонормированного базиса запишем как

$$\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{1} = \boldsymbol{m} / |\boldsymbol{m}|, \ \boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{2} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{1}, \tag{3.6}$$

где $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^{\varphi = \pi/2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица поворота на 90° против часовой стрел-

ки. Значения векторов eM_1 и eM_2 в лабораторной системе координат и системе координат агента будут соответственно равны

$${}^{L}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{1} = {}^{L}\boldsymbol{m} / |{}^{L}\boldsymbol{m}|, \; {}^{L}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{2} = \boldsymbol{D} \cdot {}^{L}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{1}, \qquad (3.7)$$

$${}^{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{1} = {}^{A}\boldsymbol{m} / \left| {}^{A}\boldsymbol{m} \right|, \; {}^{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{2} = \boldsymbol{D} \cdot {}^{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{1}. \tag{3.8}$$

Переход из одной системы координат в другую можно записать с помощью матрицы ортогонального преобразования [9]. Так, для любого вектора *а*

$${}^{L}\boldsymbol{a} = \mathop{\boldsymbol{G}}_{M \to L}{}^{M}\boldsymbol{a} , \ {}^{A}\boldsymbol{a} = \mathop{\boldsymbol{G}}_{M \to A}{}^{M}\boldsymbol{a} . \tag{3.9}$$

Здесь

$$G_{\alpha\beta}_{M\to L} = \left({}^{L}\boldsymbol{e}\boldsymbol{L}_{\alpha} \cdot {}^{L}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{\beta} \right), \ G_{\alpha\beta}_{M\to A} = \left({}^{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{A}_{\alpha} \cdot {}^{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{\beta} \right).$$
(3.10)

Поскольку G – матрицы ортогональных преобразований, соответствующие им матрицы обратных преобразований координат равны G^{T} [9]. Поэтому

$${}^{M}\boldsymbol{a} = \mathop{\boldsymbol{G}}_{A \to M} {}^{A}\boldsymbol{a} = \mathop{\boldsymbol{G}}_{M \to A} {}^{T} {}^{A}\boldsymbol{a} . \tag{3.11}$$

Теперь мы можем найти матрицу преобразования G:

$${}^{L}\boldsymbol{a} = \mathop{\boldsymbol{G}}_{M \to L}{}^{M}\boldsymbol{a} = \mathop{\boldsymbol{G}}_{M \to L}{}_{M \to A}{}^{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{a} = \mathop{\boldsymbol{G}}_{A \to L}{}^{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{a} .$$
(3.12)

Откуда

$$\mathbf{G}_{A\to L} = \mathbf{G}_{M\to L} \mathbf{G}_{M\to A}^T.$$
(3.13)

Из рис. 3.35 следует:

$${}^{L}\langle \boldsymbol{r}\rangle = {}^{L}\boldsymbol{X} + {}^{L}\left(-{}^{A}\boldsymbol{X}\right), \qquad (3.14)$$

поэтому окончательно координаты агента можно записать

$${}^{L}\langle \boldsymbol{r}\rangle = {}^{L}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{G}_{A \to L} {}^{A}\boldsymbol{X} .$$
(3.15)

Векторы, задающие ориентацию агента в лабораторной системе координат, равны

$${}^{L}(\boldsymbol{e}\boldsymbol{A}_{\alpha}) = \underset{A \to L}{\boldsymbol{G}} {}^{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{A}_{\alpha} = \underset{A \to L}{\boldsymbol{G}}_{\beta\gamma} {}^{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{A}_{\alpha\gamma} = \underset{A \to L}{\boldsymbol{G}}_{\beta\alpha} , \qquad (3.16)$$

поскольку

$${}^{A}eA_{\alpha\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{\alpha\gamma}.$$
(3.17)

Следует отметить, что если погрешность системы перемещения (шасси) агента значительно меньше погрешности решения ОЗД системой МКВ, становится возможным учитывать решения, полученные на предыдущих шагах, что позволяет увеличить точность ориентирования.

Натурный эксперимент (2D-случай)

Натурный эксперимент, в ходе которого была решена задача магнитной 2Dнавигации агента, был выполнен с помощью 2D-модификации АПК-МКВ.

Вследствие особенностей конструкции АПК, приходилось перемещать и поворачивать не агента, а диполь-ориентир (агент оставался неподвижным). Поэтому осуществлялся соответствующий перевод данных измерений и вычислений из системы координат агента (установки МКВ) в "лабораторную" систему координат и обратно.

В качестве диполя-ориентира использовался тот же постоянный магнит, что и в эксперименте, описанном в разделе 3.21 (рис. 3.21). Значение магнитного момента источника было определено заново, посредством усреднения более чем 50 решений ОЗД. При этом количество и расположение точек измерения совпадали с конфигурацией датчиков агента (3×3 точки, расположенные с шагом 0.95 мм).

Условия эксперимента были следующие:

 L *dipoleX* = {1.0 ± 0.2, 1.0 ± 0.3} *мм* – координаты диполя-ориентира в лабораторной системе координат;

^{*L*}*dipoleM* = $\{-0.0492 \pm 0.0009, -0.0031 \pm 0.0009\} A \times M^2$ – магнитный момент диполяориентира в лабораторной системе координат;

 $\Delta r = 5 MM - длина шага;$

min $R = 1.5 \times \Delta r$ – минимальное расстояние, на которое агент должен приблизиться к конечной точке E.

№ траектории	^{L}S , MM	^{<i>L</i>} <i>E</i> , <i>мм</i>
1	{-30,-20}	{30,-20}
2	{20,0}	{100,0}
3	{0,-20}	{0,-100}
4	{14.1,-14.1}	{70.7,-70.7}

Таблица 3.15. Параметры траекторий агента

Параметры траекторий указаны в таблице 3.15. Начальные положения агента для каждого из четырёх случаев совпадали с начальными точками траекторий S.

Отметим, что конечные точки траекторий 2 – 4 выбраны заведомо слишком далеко от диполя ориентира. Так сделано с целью оценить размеры "области видимости" ориентира, т.е. области, в пределах которой агент может уверенно передвигаться по заданной траектории. Измерения по траекториям 2 – 4 прекращались, если агент значительно отклонялся от истинного направления на конечную точку траектории.

Результаты эксперимента приведены на рисунках 3.29, 3.30. Они доказывают справедливость полученных нами ранее выражений для решения задачи магнитной навигации.

Из рис. 3.29 следует также, что для данной конфигурации системы МКВ агента и для данного диполя-ориентира "область видимости" источника представляет собой круг с радиусом, равным примерно 45 мм.





Рис. 3.29. Траектории движения агента, полученные в ходе натурного эксперимента

Рис.3.30. Изменение ориентации агента (угла между осями Х лабораторной системы координат и системы координат агента) вдоль траектории. По оси абсцисс отложен номер шага

Постановка задачи магнитной навигации агента (3D-случай)

Задача навигации автономного агента посредством системы МКВ в 3D-случае формулируется точно также, как и в 2D-случае. Единственное отличие состоит в том, что агент перемещается не по плоскости, а в объеме.

Решение (3D-случай)

Для получения однозначного решения задачи ориентирования в пространстве одного диполя уже недостаточно вследствие осесимметричности создаваемого им поля. Решить задачу можно лишь при наличии как минимум двух диполей. Далее будем полагать, что <u>диполи включаются в разные моменты времени</u>: в каждый момент времени агент измеряет поле, создаваемое только одним диполем.

Рассмотрим рис. 3.31. На нём введены следующие обозначения (здесь и далее i, j, k = 1, 2, 3):

*eL*_{*i*} – векторы ортонормированного базиса лабораторной системы координат;

еА_i – векторы ортонормированного базиса системы координат агента (задают ориентацию агента);

p, *q* – векторы магнитных моментов диполей;

Хр, *Хq* – координаты диполей;

 $\langle r \rangle$ – вектор, задающий положение агента в лабораторной системе координат.



Рис. 3.31. Задача магнитной навигации агента в 3D-случае

Величины ^{*L*}*Xp*, ^{*L}</sup><i>Xq* и ^{*L*}*p*, ^{*L*}*q* считаются заданными. Решив обратные задачи для диполей, агент также находит ^{*A*}*Xp*, ^{*A*}*Xq* и ^{*A*}*p*, ^{*A*}*q*. Необходимо определить положение агента ^{*L*} $\langle r \rangle$ и его ориентацию ^{*L*}*eA*_{*i*} относительно лабораторной системы координат.</sup>

Для этого, как и в двухмерном случае, воспользуемся вспомогательной системой координат, которую можно построить на любой паре неколлинеарных векторов из набора p, q и Xq - Xp. (Если все векторы из указанной тройки коллинеарны, то однозначно решить задачу ориентирования невозможно.) Далее будем полагать, что неколлинеарны векторы p и q (т.е. $p \times q \neq 0$).

Векторы ортонормированного базиса вспомогательной системы координат запишем как

$$\boldsymbol{eM}_{1} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|, \ \boldsymbol{eM}_{2} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}/|\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}|, \ \boldsymbol{eM}_{3} = \boldsymbol{eM}_{1} \times \boldsymbol{eM}_{2}.$$
 (3.18)

Значения этих ортонормированных векторов в лабораторной системе координат:

$${}^{L}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{1} = {}^{L}\boldsymbol{p}/|{}^{L}\boldsymbol{p}|, \ {}^{L}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{2} = {}^{L}\boldsymbol{p} \times {}^{L}\boldsymbol{q}/|{}^{L}\boldsymbol{p} \times {}^{L}\boldsymbol{q}|, \ {}^{L}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{3} = {}^{L}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{1} \times {}^{L}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{2}, \ (3.19)$$

и в собственной системе координат агента:

$${}^{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{1} = {}^{A}\boldsymbol{p}/|{}^{A}\boldsymbol{p}|, \; {}^{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{2} = {}^{A}\boldsymbol{p} \times {}^{A}\boldsymbol{q}/|{}^{A}\boldsymbol{p} \times {}^{A}\boldsymbol{q}|, \; {}^{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{3} = {}^{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{1} \times {}^{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{2}. \; (3.20)$$

По аналогии с двухмерным случаем решение задачи ориентирования будет иметь вид

$${}^{L}\langle \boldsymbol{r}\rangle = {}^{L}\boldsymbol{X}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{G}_{A\to L}{}^{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{p}, \qquad (3.21)$$

$${}^{L}(\boldsymbol{e}\boldsymbol{A}_{i}) = \mathop{\boldsymbol{G}}_{A \to L}{}^{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{A}_{i} = \mathop{\boldsymbol{G}}_{jk}{}^{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{A}_{ik} = \mathop{\boldsymbol{G}}_{ji}{}_{A \to L}.$$
(3.22)

Здесь

$$G_{ij} = \left({}^{L}\boldsymbol{e}\boldsymbol{L}_{i} \cdot {}^{L}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{j} \right), \quad G_{ij} = \left({}^{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{A}_{i} \cdot {}^{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{M}_{j} \right).$$
(3.23)

$${}^{A}eA_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{ik} .$$
(3.24)

3.2.4. Магнитный дигитайзер

Одним из возможных приложений системы МКВ, основанной на решении ОЗД, является магнитный дигитайзер, описание которого приводится ниже

Постановка задачи

Задача магнитного дигитайзера заключается в том, чтобы измерить координаты точек искомой кривой. Чтобы это сделать, можно выбрав достаточно малый пространственный шаг, оцифровать кривую посредством измерения координат достаточно большого числа точек.



Рис. 3.32. Плоский дигитайзер. **r**1,**r**2,**r**3 – координаты точек оцифровываемой кривой, **n**1,**n**2,**n**3 – вектора нормалей к кривой в этих точках.

Посредством решения ОЗД для постоянного магнита, перемещаемого вдоль измеряемой кривой, можно получить не только координаты точек кривой, но и на-

правления нормалей к ней в этих точках, поэтому можно оцифровать кривую, проведя измерения в меньшем числе точек (рис. 3.32).

Следует отметить, что магнитный дигитайзер можно использовать как для оцифровки плоских и пространственных кривых, так и для оцифровки поверхностей.



Рис. 3.33. Результаты натурного моделирования магнитного дигитайзера (2D-случай) источник m={-50, 0} мА*м^2. Показаны истинные и полученные посредством системы МКВ значения точек и нормалей кривой

Натурный эксперимент (2D-случай)

Задача магнитного дигитайзера в 2D-случае была решена в ходе натурного эксперимента, который был проведён посредством описанного ранее АПК-МКВ.

Область измерения размером 5x5 точек, расположенных с шагом 0.474 x 0.475 мм, располагалась в начале лабораторной системы координат (Рис. 3.41). В качестве источника магнитного поля снова использовался постоянный магнит (рис. 3.21) с магнитным моментом равным m={-50, 0} мА*м^2.

На рис. 3.33 показан результат измерения координат точек кривой и направлений нормалей к кривой в этих точках. Видно, что при удалении магнита от области измерения, заметно возрастает ошибка определения координат точек кривой. При этом увеличение погрешности измерения направления нормали практически не заметно.

3.2.5. Обнаружение объектов по наведённому магнитному моменту

Ниже представлено описание натурного эксперимента, в котором была произведена демонстрация возможности применения созданного АПК-МКВ для решения задачи магнитного поиска (см. главу 1).

Постановка и решение задачи

Схема установки, решающей задачу обнаружения объектов из магнитных материалов представлена на рис. 3.34. Управляемый или неуправляемый источник магнитного поля (на рисунке показан в виде цилиндрического магнита с магнитным моментом m_s) создаёт в исследуемой области пространства магнитное поле ^{*s*} *B* (индуцирующее поле). Данное магнитное поле измеряется системой датчиков *S*, расположенных точках измерения с координатами r_a . При помещении в это поле объекта из магнитного материала, этот объект приобретает индуцированный магнитный момент *m*, благодаря чему создаёт собственное магнитное поле ^{*o*} *B* (индуцированное поле). В соответствии с принципом суперпозиции электромагнитного поля, в области измерения возникает поле, равное сумме индуцирующего и индуцированного полей: $B_a = {^sB_a} + {^oB_a}$. Вычитая из суммарного измеренного поля индуцирующее поле: ${^oB_a} = B_a - {^sB_a}$, получим индуцированное поле.



Рис. 3.34. Схема установки для обнаружения объектов из магнитных материалов

В случае, когда размеры объекта малы по сравнению с расстоянием до него, а индуцирующее поле слабо меняется в пределах области, занимаемой объектом, индуцированное поле в первом приближении представляет собой поле диполя (см. раздел 2.10.2). Решая ОЗД, можно найти его координаты X и вектор магнитного момента m, по которым можно судить о местоположении, величине, магнитной проницаемости и ориентации объекта.





Рис. 3.35. Эксперимент по обнаружению и идентификации объектов по наведённому магнитному моменту вид спереди

Рис. 3.36. Эксперимент по обнаружению и идентификации объектов по наведённому магнитному моменту вид сбоку

Описание натурного эксперимента

Для того чтобы проверить возможность практической реализации описанного метода, был проведен следующий натурный эксперимент.

Сначала с помощью АПК-МКВ в некоторой области измерялось фоновое магнитное поле. Затем на некотором расстоянии от области помещался мощный источник индуцирующего поля, которое также измерялось. После этого рядом с индуцирующим источником помещался объект из магнитного материала и измерялось суммарное поле. Далее, по полученным данным измерений решалась ОЗД и определялись параметры индуцирующего и индуцированного источников. Найденные параметры индуцированного источника и дают информацию о местоположении и величине искомого объекта.

Фотографии эксперимента представлены на рис. 3.35, 3.36.

Область измерения представляла собой куб 3х3х3 точки, расположенных с шагом 1,8814 мм (20 шагов системы позиционирования) вдоль каждой из осей системы координат установки. Источник индуцирующего поля представлял собой шар диаметром 15.0 мм из сплава NdFeB, намагниченный вдоль прямой, проходящей через центр шара. Искомый объект – шар диаметром 7.90 мм из подшипниковой стали.

В эксперименте предполагалось, что фоновое поле (поле без магнита и объекта) однородно. Решение ОЗД проводилось методом mnk2 01a none (см. раздел 2.5.4 главы 2).

Результаты натурного эксперимента

Результаты эксперимента представлены в табл. 3.16. В первом столбце указаны истинные координаты центра магнита, во втором – значение магнитного момента магнита, найденное посредством решения ОЗД, в третьем – истинные координаты центра металлического шара. Четвертый столбец содержит вычисленный посредством решения ОЗД наведенный магнитный момент шара, а пятый – значение абсолютной ошибки определения координат металлического шара (объекта поиска).

Табл. 3.16. Результаты эксперимента по обнаружению и идентификации объекта по наведенному магнитному полю (все координаты указаны в системе координат установки МКВ)

магнит	магнит,	объект	объект,	объект
истинное значение	m ,	истинное значение	m ,	ошибка
Х,мм	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{m}^2$	Х,мм	10 ⁻⁶ :	Хмм
			$A \cdot M^2$	
-55.6, -13.9, -7.57	1.37	-25.1, -12.6, 11.5	51.	29.4
-55.6, -13.9, -7.57	1.37	-14.5, -12.3, 11.4	130	13.1
-55.6, -13.9, -7.57	1.37	-14.1, -22.8, 11.6	190	28.1
-35.4, -12.6, -7.64	1.48	-8.85, -22.7, 11.2	2810	6.6
-35.4, -12.6, -7.64	1.48	-8.08, -27.6, 11.5	1060	17.3

Из таблицы видно, что чем ближе объект поиска к магниту, тем больше наведенный магнитный момент. Также видно, что чем больше наведенный магнитный момент и ближе объект к области измерения, тем меньше ошибка определения местоположения объекта. Большие значения ошибок объясняются тем, что эксперимент проводился на пределе чувствительности используемых датчиков.

3.2.6. Измерение деформации

Постановка задачи

Разработанный метод решения ОЗД-N может быть использован для измерения деформаций объектов из немагнитных материалов. В этом случае набор диполей-

магнитиков наклеивается на поверхность исследуемого объекта или внедряется в объем материала (рис. 3.37).

Измеряя поле диполей в соответствующих им областях и решая по полученным данным ОЗД-N, можно определять положения и ориентации диполей до и после деформирования объекта, что позволяет определять параметры деформации.



Рис. 3.37. Измерение деформаций посредством системы МКВ (ОЗД-N). *m*_i – магнитные моменты диполей; *S*_i - области измерений, расположенные *примерно* напротив диполей; *F* – воздействие, вызывающее деформацию среды.

Натурный эксперимент

Посредством разработанного АПК-МКВ был проведён натурный эксперимент по решению ОЗД-N и основанной на ней задачи измерения деформации.



Рис. 3.38. Эксперимент по моделированию системы измерения деформации (вид сверху)

Был рассмотрен самый простой случай - измерение деформации вдоль прямой линии посредством решения ОЗД для двух дипольных источников.

В качестве источников поля использовались одинаковые постоянные магниты из материала NdFeB. Каждый магнит имеет форму цилиндра с диаметром 4.95 мм и высотой 5.90 мм, намагниченный вдоль оси цилиндра. Для удобства магниты приклеены к небольшим основаниям, которые могут перемещаться вдоль направляющей, сделанной из деревянной линейки (рис. 3.38).

Примерно напротив каждого магнита располагалась область измерения. Каждая представляла собой куб 3х3х3 точки, расположенных с шагом 1,8814 мм (20 шагов системы позиционирования) вдоль каждой из осей системы координат установки.

Поскольку область действия установки достаточно мала, по сравнению с выбранными расстояниями между областями измерения, эксперимент проводился в два этапа: сначала измерялось поле в области примерно напротив правого магнита (рис. 3.38), затем вся система (магниты и направляющая) смещалась вправо на некоторое фиксированное расстояние s - так, чтобы левый магнит располагался примерно напротив области измерения, измерялось соответствующее поле. На втором этапе к координатам точек измерения добавлялось смещение *s*.

Деформация объекта моделировалась сдвигом правого магнита от начального положения влево на расстояние *d*, что соответствует деформации сжатия.

Решение ОЗД-N производилось с использованием алгоритма mnk2 01a none.

Расстояние *h* между линией, содержащей диполи, и центром области измерения составляло 17 мм.

Было произведено три серии экспериментов – для разных начальных расстояний *s* между магнитами (центрами областей измерений): 50, 40 и 30 мм, что соответствует значениям отношений h/s: 0.34, 0.43 и 0.57.

Основные результаты измерений представлены в табл. 3.17 - 3.22. Использованы следующие обозначения: *s* – расстояние между диполями, *d* – смещение правого диполя относительно его начального положения, *n* – число итераций в методе решения ОЗД-N, $w \equiv \Delta X_{n=1} / \Delta X_{n=10}$ – относительное уменьшение абсолютной ошибки ΔX определения координат при увеличении числа итераций с *n* = 1 до *n* = 10.

Из таблиц видно, что итерационное уточнение решения, положенное в основу ОЗД-N позволяет уменьшить погрешность решения примерно в 1.2 ÷ 2.3 раза, при этом, польза от применения метода ОЗД-N становится более существенной при меньших значениях базового расстояния *s* между диполями.

d, мм	s = 50 мм		мм s = 40 мм			s = 30 мм			
	n=1	n=10	w	n=1	n=10	W	n=1	n=10	W
0	1.30	0.97	1.34	2.01	1.59	1.26	4.32	2.59	1.67
-1	2.02	1.72	1.17	2.21	1.66	1.33	4.32	2.45	1.76
-2	1.85	1.50	1.23	2.09	1.65	1.27	3.87	1.87	2.07
-3	1.84	1.64	1.12	1.79	1.44	1.24	4.58	2.14	2.14
-4	1.80	1.91	0.94	2.19	1.69	1.30	4.81	2.01	2.39
-5	2.10	1.97	1.07	2.44	1.66	1.47	5.34	2.23	2.40

Табл. 3.21. Абсолютная ошибка определения координат левого (неподвижного) диполя (используется алгоритм mnk2 01a none)

Табл. 3.22. Абсолютная ошибка определения координат правого (сдвигаемого) диполя (используется алгоритм mnk2 01a none)

d, мм	s = 50 mm			s = 40 мм			s = 30 мм		
	n=1	n=10	W	n=1	n=10	W	n=1	n=10	w
0	1.88	1.75	1.07	2.45	1.66	1.48	3.47	1.52	2.28
-1	1.87	1.79	1.04	2.22	1.79	1.24	3.17	1.41	2.25
-2	1.81	1.78	1.02	2.04	1.71	1.19	3.09	1.19	2.60
-3	1.89	1.72	1.10	2.32	1.60	1.45	3.02	1.48	2.04
-4	2.04	1.88	1.09	2.29	1.76	1.30	2.88	1.33	2.17
-5	1.89	1.83	1.03	2.03	1.69	1.20	3.10	1.36	2.28

Об определении параметров деформации

Продемонстрируем, каким образом можно вычислить параметры деформации, используя данные, полученные при решении ОЗД-N.

С помощью описанного в главе 2 метода решения ОЗД-*N* можно измерять координаты положения диполей до и после деформации $X_q = (x_q, y_q, z_q, 1)^T$ и $X'_q = (x'_q, y'_q, z'_q, 1)^T$ – соответственно, а значит, находить параметры деформации среды. Далее мы предполагаем деформации среды однородными по пространству, но не обязательно малыми. В этом случае координаты X_q и X'_q связаны между собой некоторым аффинным преобразованием, матрицу 4×4 которого мы обозначим символом G, а именно $X'_q = G \cdot X_q$. Задача состоит в том, чтобы сначала по заданным координа-
там X_q и X'_q (q = 1, 2, ..., N) найти матрицу G, а затем интерпретировать ее компоненты. Кратко опишем схему вычислений.

Шаг первый. Образуем объединенные матричные массивы координат диполей $n \times 4$ до и после деформации — X и X' соответственно. Учитывая, что эти массивы связаны между собой соотношением $X' = G \cdot X$, умножим это соотношение справа на матрицу X^T (4×*n*) и в результате получим

$$\mathbf{X}' \cdot \mathbf{X}^T = \boldsymbol{G} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T \,. \tag{3.25}$$

Если точки X_q не лежат в одной плоскости и $n \ge 4$, матрица $D = X \cdot X^T + 4 \times 4$ не вырождена, поэтому получаем искомый результат

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{X}' \cdot \boldsymbol{X}^T \cdot \boldsymbol{D}^{-1}. \tag{3.26}$$

Шаг второй. Как известно, матрица 4×4 аффинного преобразования в однородных координатах G (именно она вычислялась выше) содержит в левом верхнем углу блок A (3×3), который описывает центроаффинное преобразование. Первые три компоненты четвертого столбца задают координаты вектора трансляции t. Применяя к матрице A полярное разложение (его также называют разложением SVD), найдем главные оси и главные значения деформации среды и матрицу поворота участка среды как целого. Таким образом, можно найти, во-первых, параметры "твердого" смещения участка среды (участок снабжен магнитными частицами), задаваемые вектором трансляции t, направлением оси и углом поворота среды как целого и, вовторых, главные оси и главные значения величины деформации среды.

При использовании более сложных моделей деформаций можно дополнительно привлечь данные об ориентации диполей (эти данные получаются в ходе решения ОЗД-*N*).

Используя большее количество магнитных диполей можно измерить параметры деформации во всех интересующих участках исследуемого объекта. Для этого удобно распределить необходимое количество диполей в узлах почти прямоугольной сетки у (или на) поверхности объекта и для определения параметров деформации использовать тройки (для плоской задачи) или четвёрки (для объёмной задачи) близлежащих диполей.

109

3.3. Выводы к главе 3

1) Посредством проведения компьютерных и натурных экспериментов была продемонстрирована возможность использования простейшей системы МКВ для решения ряда практических задач, таких как

- Магнитное позиционирование (2+1D, 3+2D локация);
- Дистанционное измерение магнитного момента;
- Навигация автономного агента;
- Магнитный дигитайзер;
- Обнаружение объектов по наведённому магнитного моменту;
- Измерение деформации немагнитных объектов.

2) Результаты экспериментов также выявили ограничения установки АПК-МКВ и методов, например, был определен размер области видимости источника поля, определена достижимая точность решения ОЗД и ОЗД-N. В частности показано, что при использовании датчиков Холла и постоянных магнитов из материала NdFeB характерный размер области видимости источника составил единицы сантиметров, а абсолютная точность определения координат магнитов составила доли и единицы миллиметров.

Глава 4. Численное моделирование методов решения обратной задачи для одного и нескольких слабо взаимодействующих диполей

В описанных в предыдущей главе натурных экспериментах была апробирована предлагаемая физико-математическая модель системы МКВ, на основе которой была создана соответствующая компьютерная модель, предназначенная для более эффективного и тщательного исследования разработанных методов и алгоритмов решения ОЗД и ОЗД-N. Эта модель представляет собой пакет программ (далее ППМКВ), предназначенный, в том числе, и для проектирования систем МКВ, оценки их возможностей при решении практических задач. В данной главе приводится описание ППМКВ и результаты экспериментов, проведённых с его помощью.

4.1. Пакет программ, используемый для численного моделирования

Все эксперименты по численному моделированию решения ОЗД и ОЗД-N проводились посредством ППМКВ, разработанного автором в среде MATLAB [2,15,46]. Данный пакет представляет собой набор функций, позволяющих:

- Создавать различные источники поля (например, точечные дипольные источники и источники, состоящие из дискретного набора точечных дипольных источников);
- Создавать наборы точек измерения с необходимой геометрической конфигурацией (в виде тетраэдра, куба, сферы и др.);
- Производить вычисление значения вектора индукции, магнитного поля и первых его производных, скалярного и векторного потенциалов создаваемых различными источниками (см. выше) в заданном наборе точек измерения;
- Моделировать наличие измерительных шумов с заданными параметрами;
- Решать ОЗД алгоритмами, рассмотренными в главе 2;
- Вычислять фактические и оценочные значения погрешностей решения ОЗД;
- Осуществлять графическое отображение всех необходимых исходных, конечных и промежуточных данных.

Функции МАТLAB, предназначенные для решения ОЗД и ОЗД-N, были зарегистрированы в РОСПАТЕНТе [106]. Функция, решающая ОЗД в случае линейной аппроксимация поля, была также реализована на языке СИ для использования в программе установки АПК-МКВ и зарегистрирована там же [107].

Следует отметить, что в среде МАТLAВ для решения различных систем линейных уравнений методом наименьших квадратов использовалась функция x=lsqr(a,b,tol,maxit) [2], которая решает систему линейных уравнений a*x=b либо непосредственно, либо посредством МНК, минимизируя норму вектора (b-a*x). Здесь а – матрица коэффициентов, b – вектор свободных членов, x – вектор неизвестных. Параметр maxit задаёт максимальное число итераций метода, а величина tol позволяет регулировать требуемую точность решения.

4.2. Задачи численного моделирования

Перечислим наиболее важные вопросы, на которые следовало ответить посредством численных экспериментов:

- <u>Насколько сильно отличается магнитное поле источника конечных размеров от</u> поля точечного диполя и как это отличие влияет на точность решения ОЗД? Данный вопрос имеет большое значение, поскольку реальные источники поля отличаются от точечных диполей;
- <u>Как зависит точность решения ОЗД от используемого алгоритма?</u> Следует ожидать, что некоторые из разработанных методов решения ОЗД лучше работают при одних условиях, и хуже при других;
- Как зависит точность решения ОЗД от взаимного расположения источника поля и точек измерения? При обсуждении методов решения ОЗД была выявлена особенность решения в "нулевой" плоскости. Следует оценить, как эта особенность влияет на точность решения;
- Как зависит точность решения ОЗД от конфигурации и размеров области измерения, числа точек измерения? На практике в силу технических и экономических ограничений следует использовать наиболее эффективные конфигурации "магнитного глаза";
- <u>Насколько устойчивы разработанные методы и алгоритмы решения ОЗД к шу-</u> <u>мам измерения поля?</u> При наличии шумов в исходных данных решение ОЗД

может быть очень неустойчивым, поэтому следует определить границы устойчивости методов и алгоритмов;

- <u>Как определить точность полученного решения по исходным данным?</u> Получаемое решение всегда будет неточным. Поэтому оценка погрешности решения является важным вопросом для оценки точности (а значит и адекватности) данных, которые получаются на выходе системы МКВ;
- <u>Как оценить возможности данной конкретной системы МКВ по её техническим</u> <u>и конструктивным параметрам?</u> Ответ на данный вопрос позволяет определить возможности системы МКВ без создания установки. Также появляется возможность подбора оптимальных и эффективных параметров установки.

4.3. Общие замечания по численным экспериментам

ОЗД является осесимметричной относительно вектора магнитного момента источника, поэтому вычисления проводились не во всём объеме вокруг источника, а лишь в плоскости *XY*, содержащей диполь и вектор его магнитного момента. Вследствие указанной симметричности задачи (следует из выражения для поля диполя) в большинстве экспериментов рассматривалась лишь первый квадрант этой плоскости. Для простоты диполь располагался в начале лабораторной системы координат.

Все вычисления при моделировании производились в системе единиц СИ. Значения магнитных моментов источников, расстояний между источником и областями измерения, шумов измерений поля и прочих параметров задачи выбирались примерно такими же, что и в описанных ранее натурных экспериментах. Это делалось с целью иметь возможность сопоставить фактические и вычисленные возможности созданного АПК-МКВ.

Далее при описании поставленных экспериментов будут использоваться следующие обозначения:

- *src_M* полный магнитный момент источника поля,
- *src_X* координаты (центра) источника поля,
- pts_X координаты центра области измерения,
- pts_N количество точек измерения в области измерения,
- *pts_R* радиус сферы, описанной вокруг точек области измерения (характерный размер области измерения),

- *pts_type* конфигурация области измерения (например, "cube", "ball" см. раздел 4.4.1),
- *pts_L* расстояние от центра источника поля до центра области измерения,
- *pts_fi* угол, задающий направление от источника на центр области измерения, отсчёт производится против часовой стрелки от оси X,
- *pts_psiX, pts_psiY, pts_psiZ* углы, определяющие ориентацию области измерения в пространстве: при необходимости, область измерения (иногда вместе с осями чувствительности датчиков) поворачивалась последовательно, сначала вокруг оси *X*, затем вокруг оси *Y*, затем вокруг оси *Z* лабораторной системы координат,
- *errX* = |*calcX-trueX*| абсолютная ошибка определения координат диполя. Здесь
 calcX положение диполя, найденное в ходе решения ОЗД, *trueX* истинное положение диполя,
- *errM* = |*calcM-trueM*| абсолютная ошибка определения вектора магнитного момента диполя. Здесь *calcX* вектор магнитного момента, найденный в ходе решения ОЗД, а *trueX* его истинное значение,
- relX = errX/pts_L относительная ошибка определения координат диполя.
 Обычно в конечных результатах экспериментов под relX понимается максимальное значение по выборке (например, по всем ориентациям области измерения в данной точке),
- *relM* = *errM*/|*M*| относительная ошибка определения вектора магнитного момента диполя. Так же как и для *relX*, обычно в конечных результатах экспериментов под relM понимается максимальное значение по выборке.

4.4. Описания и результаты численных экспериментов по решению обратной задачи для одного точечного магнитного диполя

4.4.1. Влияние конфигурации области измерения на точность решения обратной задачи для диполя

В ходе данного численного эксперимента производилась оценка влияния конфигурации области измерения (количество точек измерения, их взаимное расположение в пространстве, размер области измерения) на точность решения ОЗД. Были рассмотрены следующие конфигурации *pts_type* областей измерения (рис. 4.1):

- Тетраэдр (tetraedr) точки измерения располагаются в вершинах правильного тетраэдра;
- Ортогональный крест (cross) точки располагаются на трех взаимноперпендикулярных отрезках одинаковой длины;
- "Тетраугольный" крест (tricross) точки располагаются на четырех лучах, исходящих из центра тетраэдра к его вершинам;
- "Октоугольный" крест (octocross) точки располагаются на четырнадцати лучах, исходящих из центра куба к его вершинам и центрам граней;
- Куб (cube) точки расположены в узлах правильной кристаллической решетки главные оси которой параллельны ребрам куба;
- Полый куб (box) точки расположены на гранях куба;
- Шар (ball) шар, заполненный точками, находящимися в узлах правильной кристаллической решётки. Данная конфигурация получается путём отсечения точек, находящихся вне сферы, вписанной в конфигурацию cube;
- "Правильная" сфера (sphere_tri) точки располагаются на сфере в вершинах разбиения её на почти равносторонние треугольники - используется итеративное разбиение правильного икосаэдра на треугольники;
- "Правильный" шар (ball_tri) точки располагаются на вложенных друг в друга "правильных" сферах. Расстояние между сферами одинаковое, в центре шара – одна точка;
- Случайно заполненный шар (sphrndball) точки случайным образом расположены внутри шара, их координаты вычисляются на основе случайных значений R, alpha, gamma (сферические координаты);
- Случайно заполненный шар (cartrndball) точки случайным образом расположены внутри шара, их координаты вычисляются на основе случайных значений Х,Ү,Z (декартовы координаты);
- Случайно заполненная сфера (rndsphere) точки расположены на поверхности сферы случайным образом.

Основными параметрами всех используемых областей измерения являются характерный размер pts_R и число точек измерения pts_N .

Описание эксперимента

В качестве источника поля выступал точечный магнитный диполь с параметрами: $pts_M = \{0; 0.050; 0\} A \times M^2$, $pts_X = \{0; 0; 0\} M$.

Характерный размер областей выбирался равным значению *pts_R*=0.001 м.

Центр области измерения располагался от источника поля на расстоянии $pts_L=0.100 \text{ M}$ (что соответствует условию $pts_R \ll pts_L$) в трех точках плоскости XY лабораторной системы координат – точках, соответствующих направлениям $pts_fi=0^\circ$, $pts_fi=45^\circ$, $pts_fi=90^\circ$. Предполагалось, что именно в этих направлениях метод решения O3Д может иметь какие-то особенности.



Рис. 4.1. Конфигурации областей измерения pts_type

Для того чтобы попытаться избавиться от влияния "правильных" и "симметричных" конфигураций источника и области измерения, в каждом из трёх положений центра области измерения производилось вращение области измерения, при этом значения углов *pts_psiX*, *pts_psiY*, *pts_psiZ* изменялись от 0° до 180° с шагом 10°. Область измерения вращалась вместе с осями чувствительности "виртуальных" датчиков поля. Для каждого положения и ориентации области измерения производилось решение ОЗД. По всем ориентациям области измерения для данного положения центра области измерения вычислялись максимальные значения ошибок *rel_X* и *rel_M*.

Решение ОЗД осуществлялось посредством алгоритма "mnk1-01-g". Также считалось, что шумы измерения поля и координат точек измерения отсутствуют.

В эксперименте варьировались конфигурации областей измерения *pts_type* и количество точек измерения *pts_N*.

Полученные результаты

В эксперименте для различных конфигураций pts_type были получены графики, показывающие зависимость погрешностей rel_X , rel_M решения ОЗД при положениях области измерения, соответствующих $pts_fi=0^\circ$, 45° , 90° . На рис. 4.2 в качестве пример приведён один из таких графиков. На нём отображены значения rel_X при $pts_fi=45^\circ$. Графики rel_X при $pts_fi=0^\circ$, 45° и графики rel_M при $pts_fi=0^\circ$, 45° , 90° очень похожи на представленный.



Рис. 4.2. Зависимость относительной ошибки *relX* определения координат диполя ($ptsX_{45}$) от конфигурации и числа точек измерения

На основании полученных данных построена таблица 4.1, в которой конфигурации области измерения расположены в порядке убывания точности решения (при сопоставимом числе точек измерения).

Из полученных графиков и таблицы можно сделать вывод, что при отсутствии шумов измерения поля значительное увеличение числа точек измерения для каждой из конфигураций области не ведет к заметному увеличению точности решения ОЗД.

No	Конфигурация	relX ,%	relM ,%	Примечание
П.П.		при	при	
		$ptsX_{45}$,	$ptsX_{45}$,	
		$ptsN \approx 200$	$ptsN \approx 200$	
1	ball_tri (iters=2)	$2 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-7}$	162 луча, исходящих от центра
2	sphere_tri	$2 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-7}$	совпадает c ball_tri (iters=0, layers=2)
3	ball_tri (iters=1)	3.10^{-7}	8·10 ⁻⁷	42 луча, исходящих от центра
4	ball_tri (iters=0)	3.10^{-6}	9·10 ⁻⁶	12 лучей, исходящих от центра
5	octocross	1.10^{-3}	$3 \cdot 10^{-3}$	8 лучей, исходящих от центра
6	ball	$\approx 9.10^{-3}$	$\approx 1.10^{-2}$	
7	cube	1.10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	
8	box	1.10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	
9	cross	$3 \cdot 10^{-2}$	8·10 ⁻²	6 лучей, исходящих от центра
10	sphrndball	$\approx 4 \cdot 10^{-1}$	≈1	
11	cartrndball	$\approx 4 \cdot 10^{-1}$	≈1	
12	rndsphere	$\approx 4 \cdot 10^{-1}$	≈1	
13	tricross	3	7	4 луча, исходящих от центра
14	tetraedr	3	9	Данные приведены для <i>ptsN</i> = 4

Таблица 4.1. Зависимость точности решения от конфигурации области измерения

Также по полученным графикам можно сделать предположение, что максимальная точность для каждой из симметричных конфигураций стремится к какому-то фиксированному для данной конфигурации значению. Можно предположить, что этот эффект является характерным при измерении производных поля по дискретному набору данных измерений значения поля.

Из таблицы 4.1 видно, что наиболее важную роль в увеличении точности решения ОЗД играет число лучей, на которых располагаются точки измерения и равномерность распределения этих лучей в пространстве.

Подводя итог, можно сделать вывод, что с точки зрения количества точек измерения и получаемой точности самыми эффективными из рассмотренных являются конфигурации ball_tri, sphere_tri – уже при 12-13 точках измерения они позволяют получить результат, на 3 порядка более точный, чем при использовании конфигураций cube, box, ball, cross и др.

4.4.2. Влияние направления от источника на область измерения на точность решения обратной задачи для диполя

Для того чтобы определить, как направление от источника на область измерения влияет на точность решения ОЗД, был осуществлен следующий численный эксперимент.

Описание эксперимента

Значения таких параметров эксперимента, как pts_M, pts_X, pts_R, pts_L были точно такими же, как и в предыдущем эксперименте (раздел 4.4.1). Аналогичным образом производилось вращение области измерения вместе с осями чувствительностей датчиков, при этом углы pts psiX, pts psiY, pts psiZ изменялись с шагом 20° .

Для каждого положения и ориентации области измерения производилось решение ОЗД. По всем ориентациям области измерения для данного положения центра области измерения определялись максимальные значения ошибок rel_X, rel_M.

Измерения производились для различных конфигураций pts_type областей измерения и различных алгоритмов решения ОЗД. Также считалось, что шумы измерения поля и координат точек измерения отсутствуют.

В эксперименте варьировалось значение угла pts_fi, который задаёт направление от источника на область измерения. Ввиду симметричности задачи значение угла pts_fi изменялось лишь в пределах от 0° до 90°, при этом шаг изменения pts_fi возрастал от минимального значения возле 0° до максимального значения возле 90°. Это было необходимо для подробного изучения особенности решения ОЗД возле "нулевой" плоскости.

Результаты эксперимента

В ходе эксперимента было получено множество графиков для различных алгоритмов решения ОЗД и конфигураций области измерения pts_type=cube, cartrndball, octocross (количество точек измерения, соответственно, pts_N=64, 100, 59). В качестве примера на рис. 4.3, 4.4 приведены результаты вычисления относительных ошибок rel X и rel M.

По графикам были составлены таблицы, примеры которых для pts_type=cartrndball приведены в приложении П6. В этих таблицах приводятся максимальные по нескольким диапазонам угла pts_fi значения относительных ошибок rel_X и rel_M. Для наглядности фрагмент таблицы П6.1 приведен в таблице 4.2.



Рис. 4.3. Зависимость погрешности rel_X от угла pts_fi для конфигурации области измерения pts_type=cube при числе точек измерения pts_N=64



Рис. 4.4. Зависимость погрешности rel_M от угла pts_fi для конфигурации области измерения pts_type=cube при числе точек измерения pts_N=64

Таблица 4.2. Влияние порядка аппроксимации на точность решения (жирным шрифтом отмечены максимальные значения по всем pts_fi)

Max_	_relX,	%
------	--------	---

Область	Метод	0°	Max	Max	Max	90°
			0÷5°	5÷10°	10÷90°	
cartrndball	Matrix/Mnk1 01 g	0.3225	9.1456	3.7258	1.8672	0.5484
	Mnk2 01 g	0.0059	0.9411	0.0391	0.0199	0.0069
	Mnk3 01 g	0.000232	0.3715	0.0083	0.0046	0.0026
cube	Matrix/Mnk1 01 g	0.0084	1.3845	0.0868	0.0454	0.0119
	Mnk2 01 g	0.0059	0.9411	0.0391	0.0199	0.0069
	Mnk3 01 g	2.59×10 ⁻⁶	0.0195	2.22×10 ⁻⁵	1.30×10 ⁻⁵	5.85×10 ⁻⁶
octocross	Matrix/Mnk1 01 g	0.0012	0.4572	0.0121	0.0063	0.0017
	Mnk2 01 g	0.0012	0.4572	0.0121	0.0063	0.0017
	Mnk3 01 g	1.28×10 ⁻⁶	0.0135	1.16×10 ⁻⁵	6.22×10 ⁻⁶	1.97×10 ⁻⁶

На основании результатов эксперимента были сделаны следующие основные выводы:

- 1. Погрешности rel_X, rel_M решения ОЗД уменьшаются при увеличении порядка аппроксимации. При этом имеется зависимость этих погрешностей от конфигурации области измерения. Так, например, для конфигурации остосгоз точности решения при использовании аппроксимации первого и второго порядка равны, хотя для конфигураций cartrndball и cube точность метода первого порядка меньше, чем точность метода второго порядка.
- Погрешности rel_X, rel_M решения ОЗД достигают максимального значения при значениях pts_fi~1°, а в области pts_fi>5° имеют малое и почти постоянное значение. Можно сделать вывод, что алгоритмы решения ОЗД дают максимальную погрешность в зоне перехода от "общего" решения к специальному решению "нулевой" плоскости.
- 3. При использовании априорного критерия Ω перехода к специальному решению ОЗД имеют место следующая особенность. Слишком малое значение Ω не позволяет "активировать" специальное решение "нулевой" плоскости, что приводит к неудовлетворительному решению для pts_fi<5°. В то же время, использование слишком большого порогового значения Ω приводит к некорректному использованию специального решения в области, далёкой от "нулевой" плоскости, что также приводит к неприемлемой погрешности при pts_fi>5°. Оптимальный выбор

значения $\Omega \approx 10^{-3} \div 10^{-4}$ зависит от используемого порядка аппроксимации поля и конфигурации области измерения и позволяет приблизиться к решению, полученному алгоритмами с выбором решения на основе апостериорного критерия *g*.

- Модификации алгоритмов "Mnk1 0a none", "Mnk2 0a none" не дают приемлемого решения вблизи "нулевой" плоскости. Вероятно, это следствие неполноты используемых систем уравнений.
- 5. Модификации "Mnk1 01a none", "Mnk2 01a none" дают решение с точностью, хоть и приемлемой, но заметно меньшей, чем точность методов с критерием *g* (из прочих результатов вычислений видно, что эта разница зависит ещё и от конфигурации области измерения).
- 6. Одновременное использование соотношения между полем и первой производной и соотношения между первой и второй производными (метод "Mnk1 01-12 none") позволяет достичь практически того же максимального значения погрешности решения, что и у методов с критерием g.
- 7. Учёт симметричности тензоров-производных поля позволяет увеличить точность решения алгоритмами с апостериорным критерием *g* примерно в два раза (для первого и второго порядков аппроксимации поля.). Аналогичная картина (см.Табл. 4.6) наблюдается для модификаций "mnk2 01-12 none", "mnk3 01-12 none". В таблице 4.7 показано, что учёт симметричности тензоров-производных поля не даёт улучшения решения при использовании модификаций алгоритмов "Mnk1 01a none", "Mnk2 01a none".

Подводя итог, можно сделать следующий вывод: при отсутствии шумов измерения наиболее точное решение получается при решении ОЗД алгоритмами, использующими более высокий порядок аппроксимации поля, учитывающими симметричность тензоров-производных поля и использующими апостериорный критерий *g*, на основе которого выбирается наилучшее решение из пары "общее" – "специальное".

4.4.3. Влияние расстояния от источника до области измерения на точность решения обратной задачи для диполя

Для того чтобы определить, как влияет на точность решения ОЗД расстояние от источника до области измерения, был осуществлен следующий численный эксперимент.

122

Описание эксперимента

Параметры эксперимента pts_M, pts_X, pts_R, pts_psiX, pts_psiY, pts_psiZ были такими же, что и в предыдущем эксперименте (раздел 4.4.2).

Главное отличие состояло в том, что центр области измерения располагался в точках плоскости ХҮ лабораторной системы координат вдоль лучей, исходящих из начала координат в трёх направлениях pts_fi=0°, 45°, 90°. Эти направления были выбраны для того, чтобы выявить особенное поведение методов решения ОЗД в "особенных" областях (например, в "нулевой" плоскости).

Варьируемым параметром было отношение расстояния от источника поля до центра области измерения к размеру области измерения — значение $pts_LR=pts_L/pts_R$. Значение pts_LR изменялось от 1.5 до 1000, что при фиксированном значении $pts_R=0.001$ соответствовало удалению области от источника на расстояние pts_L от 0.0015 до 1.

Измерения производились для различных конфигураций областей измерения pts_type и различных методов решения ОЗД. Также как и в предыдущих случаях, считалось, что шумы измерения поля и координат точек измерения отсутствуют.

Результаты эксперимента

В ходе эксперимента было получено множество графиков, демонстрирующих зависимость погрешности решения от расстояния между областью измерения и источником поля. В качестве примера на рис. 1 представлены полученные зависимости для rel_X при pts_fi=45°, pts_type=cartrndball и pts_N=100. Графики для других значений pts_fi, pts_type, pts_N и соответствующие графики rel_M выглядят похожим образом.

На основе графиков были составлены таблицы, примеры которых для pts_type=cartrnaball приведены в приложении П7. В качестве примера фрагмент таблицы П7.1 представлен в виде таблицы 4.3. В последних трёх столбцах таблиц приведены значения, определяющие углы наклона графиков (по сути, скорости убывания погрешностей при удалении от источника).

На основании результатов эксперимента были сделаны следующие основные выводы.

1. Точность всех алгоритмов решения ОЗД монотонно уменьшается при удалении области измерения от источника поля.

- Скорость убывания погрешности при удалении от источника тем больше, чем больше используемый порядок аппроксимации поля. При этом скорость убывания также зависит от используемой конфигурации области измерения.
- Методы, использующие аппроксимации поля более высоких порядков часто дают более точные решения (зависит от конфигурации области измерения и значения pts fi).
- 4. Вблизи источника при отношении pts_L/pts_R порядка 3-5 и меньше не удаётся получить решение ОЗД с приемлемой точностью. При значении pts_L/pts_R от 5 до 10-20 приемлемый результат (точность около 1%) можно получить, только используя аппроксимации поля высоких порядков. Лишь при значении отношения pts_L/pts_R более 10-20 методы первого порядка аппроксимации поля могут дать приемлемый результат. Таким образом, можно сделать вывод, что при работе вблизи источника предпочтительнее применять методы более высоких порядков.



Рис. 4.5. Зависимость rel_X от отношения pts_L/pts_R при pts_fi=45°, pts_type=cartrndball, pts_N=100.

Область	Метод	rX ₁₀ , %			$[\ln(rX_{1000})-\ln(rX_{10})]/$			
						[ln(1000)-ln(10)]		
		pts_fi=0°	pts_fi=45°	pts_fi=90°	pts_fi=0°	pts_fi=45°	pts_fi=90°	
cartrndball	Mnk1 01 g	3.9866	6.7856	6.0414	-1.0210	-1.0117	-1.0131	
	Mnk2 01 g	0.5560	0.7458	0.6947	-2.0484	-1.9960	-2.0085	
	Mnk3 01 g	0.1872	0.5659	0.5230	-2.9893	-2.1966	-2.1882	
cube	Mnk1 01 g	0.8429	1.4121	1.1962	-2.0009	-2.0004	-2.0004	
	Mnk2 01 g	0.8789	1.4121	1.1962	-2.0100	-2.0004	-2.0004	
	Mnk3 01 g	0.0760	0.0645	0.0580	-3.8476	-3.7795	-3.6853	
octocross	Mnk1 01 g	0.1308	0.2007	0.1755	-2.0240	-2.0046	-2.0115	
	Mnk2 01 g	0.1330	0.2007	0.1755	-2.0276	-2.0046	-2.0115	
	Mnk3 01 g	0.0128	0.0214	0.0189	-3.6650	-3.7165	-3.6806	

Таблица 4.3. Зависимость погрешности rel_X от отношения pts_L/pts_R.

(Здесь используется обозначение rX = max(relX)).

4.4.4. Влияние ориентации области измерения относительно диполя на точность решения обратной задачи для диполя

Для выяснения того, как ориентация области измерения влияет на точность решения был проведен следующий эксперимент.

Описание эксперимента

Значения таких параметров эксперимента, как pts_M, pts_X, pts_R, pts_L, pts_fi были такими же, что и в эксперименте, описанном в разделе 4.4.1. Отличия заключались в следующем.

Вращение областей измерений (вместе с осями чувствительности датчиков) на углы pts psiX, pts psiZ производилось с шагом 5°.

Для каждой ориентации области измерения производилось решение ОЗД. По всем ориентациям области измерения для данного положения центра области измерения строились распределения значений ошибок определения координат и магнитного момента источника. Также вычислялись минимальное min, максимальное max значение ошибок и их соотношение ratio=max/min.

В эксперименте вычисления проводились для различных конфигураций областей измерения pts_type (использовались конфигурации cross, octocross, cube, cartrndball). ОЗД решалась с помощью алгоритма "mnk1 01 g". Считалось, что шумы измерения поля и координат точек измерения отсутствуют.

Результаты эксперимента

В ходе эксперимента было получено множество графиков, один из которых представлен на рис. 4.6 в качестве примера. По всем полученным графикам составлена таблица 4.4, в которой содержатся значения ratio, min, max.

Из таблицы видно, что точность решения ОЗД достаточно сильно зависит от ориентации области измерения, особенно для случая pts_fi=0°. Можно предположить, что это связано с особенностями вычисления производных поля по дискретным наборам измерений.

Таблица 4.4. Результаты эксперимента по изучению влияния ориентации области измерения на точность решения ОЗД

Область измерения	Min relX (*10^-7)				
	pts_fi=0°	pts_fi=45°	pts_fi=90°		
cross (pts_N=31)	1.3	39	59		
octocross (pts_N=59)	0.06	2.0	2.9		
cube (pts_N=512)	0.32	9.8	15		
cartrndvall (pts_N=200)	2.7	650	720		

Область измерения	Max relX (*10^-7)			
	pts_fi=0°	pts_fi=45°	pts_fi=90°	
cross (pts_N=31)	240	400	340	
octocross (pts_N=59)	12	20	17	
cube (pts_N=512)	59	100	84	
cartrndvall (pts_N=200)	3200	4800	4300	

Область измерения	Ratio relX				
	pts_fi=0°	pts_fi=45°	pts_fi=90°		
cross (pts_N=31)	180	10	5.7		
octocross (pts_N=59)	190	10	5.7		
cube (pts_N=512)	180	10	5.7		
cartrndball (pts_N=200)	1200	7.4	6		



Рис.4.6. Распределение rel_X при изменении ориентации области измерения Область измерения cross (N=31). Метод mnk1-01-g. pts_fi=45°

4.4.5. Влияние шумов измерения поля на точность решения, оценка границ устойчивости методов

Для того чтобы оценить устойчивость разработанных методов решения ОЗД по отношению к шумам измерения поля, был проведен следующий численный эксперимент.

Описание эксперимента

Значения основных параметров эксперимента, таких как src_M , src_X , pts_R , pts_L , pts_fi были точно такими же, что и в эксперименте, описанном в разделе 4.4.1.

Однако, вращение области измерения вокруг осей *X*,*Y*,*Z* не осуществлялось, чтобы дополнительно не учитывать его влияние на конечный результат.

Для каждого из трёх положений (*pts_fi*=0°,45°,90°) области измерения заданное число раз *Bnoise_samples* производилось решение ОЗД и находились значения координаты источника *srcX_s* и его магнитный момент *srcM_s*, где *s* = 1,..., *Bnoise_samples* - номера решений. Каждое из полученных решений сравнивалось с истинным значением положения *srcX₀* и магнитного момента *srcM₀* диполя, и определялись абсолютные ошибки: *errX_s* = $|srcX_s - srcX_0|$, *errM_s* = $|srcM_s - srcM_0|$.

Для полученных распределений $errX_s$ и $errM_s$ вычислялись средние и среднеквадратичные отклонения: errXavg, errMavg и errXvar, errMvar соответственно. Затем определялись соответствующие им относительные величины:

127

relXavg = errXavg/ptsL, $relMavg = errMavg/|srcM_0|$ μ relXvar = errXvar/ptsL, $relMvar = errMvar/|srcM_0|$.

В эксперименте варьировалось значение соотношения шум/сигнал *Bnoise_NS*, выражаемого в процентах.

Шум измерения компонент вектора индукции поля считался гауссовым (далее функция G). Среднее значение шума *Bnoise_mean* считалось равным 0, а среднеквадратичное отклонение шума *Bnoise_var* вычислялось на основе модуля среднего значения поля $|B_0|$ в центре области измерения по формуле: *Bnoise_var=* $|B_0|$ **Bnoise_NS*/100. Далее, при решении ОЗД к истинным значениям поля, вычисляемым в ходе решения прямой задачи, добавлялись (к каждой компоненте вектора поля независимо) случайные значения G(*Bnoise mean*, *Bnoise var*).

При решении ОЗД использовались различные алгоритмы и конфигурации областей измерения.

В эксперименте предполагалось, что погрешности измерения координат точек отсутствуют, так как в некотором приближении любой ошибке измерения координат можно поставить в соответствие ошибку измерения поля.

Полученные результаты

В ходе эксперимента было построено множество графиков. В качестве примера на рис. 4.7, 4.8 приведены графики relXavg и relXvar для случая pts_fi=0°, pts_type=cartrndball, pts_N=100. Остальные графики похожи на представленные.



Рис. 4.7. Зависимость relXavg от величины шума измерения поля. pts type=cartrndball, pts N=100, pts fi=45°



Рис. 4.8. Зависимость relXvar от величины шума измерения поля pts type=cartrndball, pts N=100, pts fi=45°

На основании полученных результатов были сделаны следующие выводы:

 Среднее значение ошибки решения ОЗД при малых значениях шумов измерения поля практически не зависит от величины шума и определяется собственной погрешностью используемого алгоритма решения ОЗД, т.е. погрешностью метода при нулевом значении шумов. При этом алгоритм решения ОЗД даёт тем меньшее значение погрешности решения, чем более высокий порядок аппроксимации поля используется.

- 2. При увеличении до некоторого значения уровня шума влияние шума на погрешность решения остаётся незаметной. <u>При дальнейшем увеличении шума наблюдается практически пропорциональный ему рост погрешности решения</u>. После некоторого значения уровня шума измерения поля точности решений различных порядков аппроксимации практически совпадают (в большинстве случаев при превышении определенного уровня шума измерения, аппроксимации более высоких порядков дают несколько худшие результаты).
- Между уровнем шума и среднеквадратичным отклонением погрешности решения (разбросом решений) имеется практически пропорциональная зависимость.
- 4. Самые точные решения могут быть получены алгоритмами "mnk1 01 g", "mnk2 01 g" и т.п., а погрешности решений, получаемых на основе алгоритмов, использующих уравнения с производными высоких порядков, например, "mnk2 01-02 none", "mnk3 01-02 none" при наличии шума затрудняют использование этих алгоритмов.

Подводя итог, можно сделать вывод, что решение ОЗД ведёт себя достаточно устойчиво по отношению к шумам измерения поля. Также следует отметить, что использование более высоких порядков аппроксимации поля может быть оправдано только при низком уровне относительного шума измерения поля. Вероятно это связано с тем, что при наличии шумов трудно вычислить значения старших производных поля с необходимой точностью.

4.4.6. Оценка отличия полей источников различных форм и размеров от поля точечного диполя

Посредством компьютерного моделирования ответим на вопрос, как сильно отличается магнитное поле источника, имеющего конечные размеры и форму, от поля точечного магнитного диполя.

Описание эксперимента

Будем моделировать конечномерные источники поля посредством дискретных наборов, состоящих из большого числа точечных диполей. Эти диполи равномерно заполняют требуемый объём и имеют одинаковые векторы магнитного момента. Бу-

дем сравнивать поля таких источников с полем точечного диполя, имеющим магнитный момент, равный сумме всех диполей, составляющих источник.

Рассматривались следующие модели источников:

- Шар (ball) шар, заполненный точками, находящимися в узлах правильной кристаллической решётки. Данная конфигурация получается путём отсечения точек, находящихся вне сферы, вписанной в конфигурацию cube;
- Куб (cube) точки расположены в узлах правильной кристаллической решетки главные оси которой параллельны ребрам куба;
- Прямоугольный параллелепипед (cube_rect) точки расположены в узлах правильной кристаллической решетки главные оси которой параллельны ребрам куба.

Вследствие симметричности источников и выбранного их расположения (главные оси источников параллельны осям X,Y,Z лабораторной системы координат), вычисления достаточно проводить лишь в плоскости XY, содержащей вектор суммарного магнитного момента источников.

Во всех экспериментах центр источника поля располагался в начале системы координат src_X= $\{0;0;0\}$ м, а суммарный вектор магнитного момента источников выбирался равным pts M= $\{0;0.050;0\}$ А×м².

Полученные результаты

В результате проведения эксперимента были получены графики отклонений полей различных конечномерных источников от поля точечного диполя. На всех графиках результаты ограничены сверху значениями 1 Тл для абсолютного отклонения и 100% для относительного. Пример полученных графиков для источника в форме прямоугольного параллелепипеда показан на рис. 4.9.

По построенным графикам была составлена сводная таблица 4.5, в которой представлены примерные значения минимальных расстояний, на которых относительное отклонение поля от дипольного будет не более 1 % и не более 0.1 %.

Из полученных графиков и таблицы следует, что чем ближе форма источника к шару, тем меньше будет отклонение поля источника от дипольного. Кроме того, видно, что чем дальше мы удаляемся от источника, тем больше создаваемое им поле будет похоже на поле точечного диполя.



Рис. 4.9. Относительное отклонение от дипольного поля источника relB, %. Конфигурация источника cube_rect (S=4×2×2 мм, N=80×40×40=128000 диполей)

Таблица 4.5. Минимальные расстояния до центра источников, при которых отклонения полей от дипольного не превышают 1%, 0.1%

Модель источника	R _{1%} , мм	R _{0.1%} , мм
ball (R=2 мм, N=61432 диполей)	≈3	≈3
ball (R=10 мм, N=61432 диполей)	≈13	≈18
cube (R=2 мм, N=40×40×40=64000 диполей)	≈7	≈10
cube_rect (S=4×2×2 мм, N=80×40×40=128000 диполей)	≈26	≈79
cube rect (S=2×4×2 мм, N=40×80×40=128000 диполей)	≈26	≈79

По результатам эксперимента можно сделать вывод, что при построении систем, основанных на решении ОЗД, в качестве источников поля желательно использовать магниты сферической (или близкой к ней) формы и как можно меньшего размера. В этом случае конечные размеры и форма источника практически не должны повлиять на точность решения ОЗД.

Следует отметить, что источники с ярко выраженной несферической формой могут быть использованы для решения задач 6D-локации [100]. В этом случае модель источника должна учитывать форму объекта (в общем случае такая модель источника поля отличается от дипольной модели).

4.4.7. Определение возможностей системы магнитного компьютерного видения по её техническим характеристикам

Ранее мы рассмотрели различные факторы, влияющие на точность решения ОЗД, независимо друг от друга. Однако на практике они присутствуют одновременно.

Для того чтобы вкупе учесть все факторы, влияющие на точность решения ОЗД, проведём численный эксперимент, в котором учтём все исходные данные технической реализации системы МКВ: параметры датчиков – их чувствительность, разрешение, количество и взаимное расположение в пространстве; параметры источника – его мощность и расположение в пространстве относительно области измерения. Параметры фонового поля рассматривать не будем – его постоянную составляющую в натурных измерениях можно измерить и вычесть, а шумовую составляющую можно измерить и учесть, включив в шум измерения поля датчиками.

Введем следующие два понятия.

<u>Область видимости источника поля</u> – такая область пространства, в которой система МКВ с априори заданными параметрами может получить решение обратной задачи с гарантированной точностью.

<u>Область видения системы МКВ</u> – такая область пространства вокруг системы датчиков системы МКВ, в которой задача определения параметров заданных источников может быть решена с гарантированной точностью.

Размеры области видения системы МКВ определяются размером области видимости самого слабого из источников, которые предполагается наблюдать.

Посредством численного моделирования оценим возможности различных систем МКВ по обнаружению дипольного источника поля. Для этого построим карту точности решения ОЗД – другими словами, очертим область видения источника.

Описание эксперимента

В эксперименте в качестве источника поля выступал точечный магнитный диполь со следующими параметрами: pts_M= $\{0; 0.050; 0\}$ A×м^2, pts_X= $\{0; 0; 0\}$ м, т.е. магнитный момент источника направлен вдоль оси Y и находится в начале лабораторной системы координат.

Центр области измерения располагался в плоскости XY лабораторной системы координат на различных расстояниях pts_L от диполя (варьировались от 0.0015 до 0.050 м с шагом 0.002 м) и в различных направлениях pts_fi от диполя (значение pts_fi изменялось от 0° до 360°). При этом, чтобы учесть особенности методов решения O3Д pts_fi изменялось с более мелким шагом (равным 1°) вблизи значений 0°, 90°, 180°, 270° и 360°.

133

В каждом положении центра области измерения производилось вращение области измерения вокруг осей Х,Ү,Ζ, при этом углы поворота области измерения pts_psiX, pts_psiY, pts_psiZ менялись от 0° до 180° с шагом 20°. Помимо вращения точек измерения, поворачивались соответствующим образом и оси чувствительностей "виртуальных" датчиков поля. Вращение области измерения производилось для того, чтобы попытаться избавиться от влияния симметричных ("правильных") конфигураций точек измерения на конечный результат.

Для каждой ориентации области измерения производилось решение ОЗД выбранным методом. По всем ориентациям области измерения для данного положения центра области измерения определялись максимальные значения ошибок определения координат и магнитного момента источника.

При решении ОЗД использовались различные методы, конфигурации и размеры областей измерения.

Значение радиуса pts_R сферы, описанной вокруг области измерения в ходе эксперимента варьировалось и принималось равным значениям 0.0005, **0.001**, 0.002 и 0.003 м, что примерно соответствует характеристикам построенного АПК-МКВ.

Шумы измерения поля выбирались равными 0 мкТл (отсутствие шумов), 0.5, **1.0**, 2.0 и 10 мкТл.

Число выборок измерений по шуму для каждого положения и ориентации области измерений равнялось 1. Это позволило сократить время моделирования и не сказалось на качестве результата, поскольку большое число различных ориентаций и положений области измерения компенсировало малое число выборок по шуму.

Для того, чтобы нагляднее представить результаты, все полученные абсолютные значения ошибок "отсекались" сверху значениями errXmax=0.005 м, errMmax=0.005 A*м^2 и снизу значениями errXmin=10^-20 м, errMmin=10^-20 A*м^2.

Если параметры шума измерения поля известны и не изменяются, для данной конкретной системы МКВ можно определить область видения (см. выше) и использовать её для выдачи результатов с гарантированной точностью. Однако если параметры шума неизвестны или непостоянны, если некоторые параметры самой установки МКВ изменяются, возникает задача оценки точности полученного решения лишь по данным измерения поля.

134

Ранее (см. раздел 2.7.2) были предложены различные оценки точности решения ОЗД по исходным данным измерений поля. Для того чтобы проверить его работоспособность в проведенных измерениях также была проверена возможность использования различных критериев для оценки погрешности решения ОЗД по исходным данным измерений поля:

$$errX(1) = \frac{\sum_{a=1}^{N} \left| \mathbf{B}_{a}^{(meas)} - \mathbf{B}_{a}^{(calc)} \right|}{\sum_{a=1}^{N} \left| \mathbf{B}_{a}^{(calc)} \right|} , \qquad (4.1)$$

$$errX(2) = \frac{R_0}{3} \cdot \max_{a=1..N} \left(\frac{\left| \mathbf{B}_a^{(meas)} - \mathbf{B}_a^{(calc)} \right|}{\left| \mathbf{B}_a^{(calc)} \right|} \right) , \qquad (4.2)$$

$$errX(3) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{3} T_{ii}\right|}{\sum_{i=1}^{3} |T_{ii}|},$$
(4.3)

$$errX(4) = \sum_{a=1}^{N} \frac{\left| \mathbf{B}_{a}^{(meas)} - \mathbf{B}_{a}^{(calc)} \right|}{\left| \mathbf{B}_{a}^{(calc)} \right|} , \qquad (4.4)$$

Отметим, что errX(2) в отличие от остальных, является абсолютной, а не относительной оценкой точности.

Полученные результаты

В ходе эксперимента было получено множество графиков. На рис. 4.10-4.13 приведены примеры полученных оценок областей измерений. На рис. 4.14 приведены примеры графиков, полученных для различных вариантов оценочного критерия ошибки решения. Судя по графикам, наиболее адекватной оценкой является errX(2).







Рис. 4.10. Результаты оценки области видимости pts_type=cube, pts_N=27, ptsR=0.001 м, Bnoise=0 мкТл, pts_X={0,0,0}, pts_M={0,0.05,0} А·м^2, алгоритм mnk1-01-g











a) ptsR=0.0005 м

б) ptsR=0.003 м

Рис. 4.12. Влияние размера области измерения на область видимости errX, cube (N=28), Bnoise=1 мкТл, m={0,0.05,0} A·м^2

Вид сверху



a) var(noiseB)=0.5 мкТл
 б) var(noiseB)=10 мкТл
 Рис. 4.13. Влияние шума измерения поля на область видимости errX, cube (N=28), m={0,0.05,0} A⋅м^2, ptsR=0.001 м Вид сверху





На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы.

При отсутствии шумов измерения поля:

- практически все рассмотренные ранее методы решения ОЗД имеют более или менее выраженную особенность решения в "нулевой" плоскости.
- точность методов "mnkN 01 g" сравнима с точностью методов "mnkN 01a none" при использовании области измерения "cube". При использовании области типа "octocross" методы "mnkN 01a none" дают менее точное решение возле "нулевой" плоскости.
- использование методов аппроксимации более высоких порядков не приводит к увеличению точности решения.
- Учёт в уравнениях симметричности тензора *T* приводит к некоторому увеличению точности решения для методов "mnkN 01 g" и никак не сказывается на точности методов "mnkN 01a none".

При наличии шумов измерения поля наблюдаются следующие закономерности:

- Любой из использованных методов решения ОЗД имеют особенности решения в "нулевой" плоскости. Эта особенность проявляется в некотором снижении точности решения вблизи "нулевой" плоскости.
- использование методов аппроксимации более высоких порядков не приводит к увеличению точности решения и увеличению размера области видимости диполя.
- Учёт в уравнениях симметричности тензора *T* приводит к некоторому увеличению точности решения для методов "mnkN 01 g" и никак не сказывается на точности методов "mnkN 01a none".
- Точность решения в пределах области видимости источника при использовании области измерения типа "cube" выше, чем при использовании области типа "octocross". При этом внешний радиус области видимости получается практически одинаковым в обоих случаях.
- Увеличение размера области измерения ведёт к увеличению размера области видимости диполя (по местоположению диполя). При этом, уменьшается точность в пределах области видимости (уменьшается "глубина" области видимости).

- Уменьшение погрешности измерения поля также ведёт к увеличению размера области видимости.
- Критериями, пригодными для оценки точности решения по исходным данным, являются критерии errX(1), errX(2), errX(4). Критерий errX(3) не несёт выраженной информации об ошибке решения.

4.5. Численное моделирование решения обратной задачи для нескольких слабо взаимодействующих диполей

В данном разделе представлены описания и результаты численных экспериментов по моделированию решения обратной задачи для группы слабо взаимодействующих диполей. Для численных экспериментов была создана функция MATLAB (Приложение 15).

4.5.1. Влияние конфигурации диполей и областей измерения на точность решения (1D случай)

Прежде всего, был проведён эксперимент по решению ОЗД-N в простейшем случае, когда диполи располагаются на одной линии (см. рис. 4.15). В численном эксперименте число диполей было выбрано равным 100. Все диполи имели одинаковые магнитные моменты, равные по модулю 1 А*м^2. Ориентация диполей выбиралась случайным образом. Точно напротив каждого диполя располагалась группа из $3x_3x_3$ точек измерения. Характерный размер области измерения (радиус описанной окружности) был выбран равным R = 0.01 м. Расстояние между соседними диполями было фиксированным и равнялось w=1 м. Расстояние между линией диполей и линией областей измерения h варьировалось.



Рис. 4.15. 1D-случай ОЗД-N

На рис. 4.16, 4.17 показан процесс сходимости решения в ходе эксперимента для различных значений h. Видно, что для значения h=0.57 м наблюдается неустойчивость процесса решения O3Д-N.

На основании результатов эксперимента по решению задачи ОЗД-N в 1D-случае можно сделать следующий вывод:

- при h/a<0.57 наблюдается сходимость к решению примерно за 5 15 итераций;
- при h/a≥0.57 наблюдается отсутствие сходимости алгоритма решения.



Рис. 4.16. Процесс сходимости решения в 1D-случае ОЗД-N. Показано поведение абсолютной ошибки errXmax определения положения диполей при увеличении номера шага итерации. Графики соответствуют значениям h=0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.55 (чем

больше h, тем выше расположен график).



Рис. 4.17. 1D-случай ОЗД-N. Зависимость errXmax от номера шага итерации, при h=0.57 (наблюдается неустойчивость решения)

4.5.2. Влияние конфигурации диполей и областей измерения на точность решения (2D случай)

Для того чтобы проверить работоспособность разработанного алгоритма решения ОЗД-*N* в 2D-случае также была проведена серия компьютерных экспериментов.

В численном эксперименте (рис. 4.18) число диполей было выбрано равным 10×10 . Все диполи имели одинаковые магнитные моменты, равные по модулю 1 A*m^2 . Ориентация диполей выбиралась случайным образом. Точно напротив каждого диполя располагалась группа из 3x3x3 точек измерения. Характерный размер области измерения (радиус описанной окружности) был выбран равным R = 0.01 м. Расстояние между соседними диполями было фиксированным и равнялось a=1 м. Расстояние между линией диполей и линией областей измерения h варьировалось.

Процесс сходимости решения в 2D-случае выглядел точно также как и в 1Dслучае. При этом отсутствие сходимости решения наблюдалось при меньших значениях h. Погрешность получаемого решения варьировалась от 1% (при h<=0.3) до 20% (при h~0.4).

На основании результатов эксперимента по решению ОЗД-N в 2D-случае были сделаны следующие выводы:

- при h<0.42 наблюдается сходимость к решению за 5 15 итераций;
- при h>=0.43 наблюдается отсутствие сходимости.



В дополнение к описанному эксперименту также был проведён эксперимент, в котором значения параметров задачи соответствовали реальным возможностям установки МКВ.

Были использованы следующие численные значения величин (см. рис. 1):

• 5×5 магнитных диполей, расположенных в плоскости *XY* с шагом w = 40 мм; при этом магнитные моменты диполей имели значения $m = \{0; 0; 0,065\}$ A · M², то есть сонаправлены и перпендикулярны плоскости диполей. Указанное значение магнитного момента соответствует моменту магнитика из сплава неодим-железо-бор размером $4 \times 4 \times 4$ мм;

• под каждым из диполей помещалась область измерения, состоящая из 3×3×3 точек, расположенных в пространстве с шагом w=1 мм;

 Расстояние *h* от плоскости, проходящей через центры областей измерения, до плоскости диполей, соединяющей центры магнитиков, варьировалось в пределах 4 – 20 мм.

Параметры процедуры решения

• Погрешность измерения компонент вектора индукции поля выбиралась в диапазоне $\Delta B = \pm (1 - 50)$ мкТл (в ходе натурных экспериментов удалось достичь значения $\Delta B = \pm 2$ мкТ). Следует отметить, что при выбранной конфигурации модуль среднего значения вектора индукции |**B**| поля диполей в областях измерения составил около 1600 мкТ (h = 20 мм);

- число выборок по шуму измерения поля 20.
- число итераций 10;
- при решении ОЗД использовался алгоритм mnk2 01 g.

Таблица 4.6. Результаты компьютерного моделирования решения ОЗД-N (при отсутствии шумов измерения поля: $\Delta B = 0$)

h/w	Максимальная ошибка						
	координат диполя, мм магнитного момента					a, мA·м ²	
	ОЗД		ОЗД- <i>N</i> при числе итераций				
		5	20	5	20		
0,10	0,88	0,90	0,90	48,0	48,0	46,0	
0,20	0,35	0,45	0,45	12,0	12,0	8,0	
0,30	0,57	0,32	0,33	5,7	5,8	12,0	
0,40	2,10	0,29	0,27	4,0	3,8	31,0	
0,45	3,40	0,50	0,45	7,3	6,5	44,0	
0,47	4,10	0,94	7,60	14,0	100	51,0	
0,50	5,20	2,50	150	33,0	10^{12}	62,0	
0,60	11,0	63,0	216	3700	10^{23}	$1,16\cdot10^5$	

Основные результаты экспериментов представлены в таблице 4.6 и на рис. 4.19, 4.20. Приведены значения максимальной по всем диполям, областям и выборкам измерения ошибки определения координат диполя и магнитного момента.



Рис. 4.19 Зависимости абсолютной погрешности определения положения (*a*) и моментов (б) диполей в задаче ОЗД-*N* <u>от значений *h/w*</u> (*w*=40 мм, |*m*|=65 мА·м²). Пробные значения погрешности *ΔB*, мкТ: 1 (*1*), 2 (*2*), 5 (*3*), 10 (*4*), 20 (*5*), 50 (*6*). Число итераций — 10



Рис. 4.20. Зависимости абсолютной погрешности определения положения (*a*) и моментов (*б*) диполей в задаче ОЗД-*N* <u>от шума измерения</u> *ΔB* (*w*=40 мм, |*m*|=65 мА·м²). Значения *h/w:* 0,20 (*1*); 0,25 (*2*); 0,30 (*3*); 0,35 (*4*); 0,40 (*5*); 0,45 (*6*). Число итераций — 10

Также были проведены измерения для систем диполей, в которых разброс направлений векторов магнитных моментов составлял примерно 30°; — получены такие же результаты, как и для системы строго сонаправленных диполей.
4.5.3. Рекомендации по построению систем МКВ на базе обратной задачи для нескольких слабо взаимодействующих диполей

На основании всех проведённых численных экспериментов по решению ОЗД-*N* были сделаны следующие выводы:

- Самым оптимальным следует считать расположение диполей в одном направлении — перпендикулярном плоскости областей измерения (именно для такого расположения диполей приведены результаты в данной статье).
- При отсутствии шумов измерения поля область сходимости итерационного процесса уточнения решения ограничена значениями h/w ≤ 0,45. При значениях h/w > 0,45 метод проявляет свойство расходимости (см. таблицу).
- При наличии шумов измерения поля область сходимости метода сужается. При достижимой на практике погрешности измерений ΔB = ±2 мкТ для описанной выше конфигурации эксперимента область сходимости задачи ограничена значениями h/w ≤ 0,38.
- 4. Применение описанной процедуры итерационного уточнения позволяет значительно повысить точность решения (см. таблицу).

4.6. Выводы к главе 4

На основе результатов численного моделирования ОЗД можно сделать следующие рекомендации по построению систем МКВ:

- При построении систем, основанных на решении ОЗД, в качестве источников поля желательно брать магниты сферической (или близкой к ней) формы и как можно меньшего размера. В этом случае конечные размеры и форма источника практически не должны повлиять на точность решения ОЗД.
- Любой из использованных методов решения ОЗД имеют особенности решения в "нулевой" плоскости. Эта особенность проявляется в некотором снижении точности решения вблизи "нулевой" плоскости – эту область можно назвать "слепой зоной" (рис.20).
- Учёт в уравнениях симметричности тензора *T* позволяет увеличить точность решения примерно в два раза (для методов "mnk1 01 g", "mnk2 01 g" и т.п.).
- При наличии шумов измерения поля, использование методов аппроксимации более высоких порядков не приводит к увеличению точности решения и, соответственно, к увеличению размера области видимости диполя.

- Точность решения ОЗД достаточно сильно зависит от ориентации области измерения, особенно при решении ОЗД в "нулевой" плоскости.
- На точность решения ОЗД имеет большее влияние не число точек измерения, а их расположение в пространстве. С точки зрения количества точек измерения и получаемой точности самыми эффективными из рассмотренных являются конфигурации ball_tri, sphere_tri – уже при 12-13 точках измерения они позволяют получить результат, на 3 порядка более точный, чем при использовании конфигураций cube, box, ball, cross и др.
- Значительное увеличение числа точек измерения для каждой из конфигураций области не ведет к заметному увеличению точности решения ОЗД.
- Решение ОЗД ведёт себя достаточно устойчиво по отношению к шумам измерения поля.

Как показало компьютерное моделирование, любой из разработанных алгоритмов решения ОЗД позволяет получить решение с погрешностью, не меньшей некоторого значения, отличного от нуля. Поэтому для получения точного решения, следует использовать дополнительный уточняющий алгоритм, основанный, например, на методе наискорейшего спуска.



Рис. 4.21. Область видимости, "слепая зона", "нулевая" плоскость

Численное моделирование решения ОЗД-N показало, что предлагаемый в данной работе метод имеет достаточно большие ограничения на область сходимости. Так, в случае работы с плоской "матрицей" диполей, решение сходится при $h/w \le 0.45$ в случае отсутствия шумов измерения и при $h/w \le 0.38$ в случае шума $\Delta B = \pm 2$ мкТ (здесь w – расстояние между соседними диполями, h – расстояние между плоскостью диполей и плоскостью измерения). Несмотря на эти ограничения предложенный метод решения ОЗД-N позволяет увеличить точность решения в несколько раз.

Заключение

В ходе выполнения работы были решены следующие задачи:

- Предложен метод и разработаны алгоритмы решения ОЗД по данным измерения вектора индукции поля в дискретном наборе точек, расположенных в относительно малой, по сравнению с расстоянием до диполя, области. Метод включает несколько вариантов преодоления особенности решения в "нулевой" плоскости, несколько способов оценки точности получаемого решения. Также предложен метод решения ОЗД-N в 2D-случае. На основе предложенного метода решения ОЗД-N также решена ОЗД-N и разработан соответствующий алгоритм.
- Создана действующая экспериментальная установка АПК-МКВ, предназначенная для натурного моделирования и оценки возможностей систем МКВ, основанных на методах решения ОЗД и ОЗД-N.
- Создан пакет программ ППМКВ, предназначенный для проектирования систем МКВ и численного моделирования задач и приложений МКВ.
- Посредством ППМКВ исследовано влияние основных технических параметров системы МКВ на возможности этой системы по решению задач МКВ. Также продемонстрирована устойчивость метода решения ОЗД при наличии шумов измерения. Посредством ППМКВ определены границы устойчивости метода решения ОЗД-N.
- Посредством численного и натурного моделирования исследована возможность использования системы МКВ для решения таких практических задач как дистанционное измерение магнитного момента дипольных источников, определение положения и ориентации объектов, оцифровка кривых и поверхностей, навигация автономного агента, обнаружение и определение параметров объектов из магнитных материалов по наведённому магнитному полю, бесконтактное измерение деформации.

Список литературы

- 1. Абакумов А.А. Магнитная интроскопия. Учеб. пособие для вузов. М.: Энергоатомиздат, 1996. — 272 с.: ил.
- Ануфриев И., Смирнов А., Смирнова Е., МАТLAВ 7 в подлиннике. СПб.: "БХБ Санкт Петербург". 2005. 1097 с.
- 3. Арбузов С. О. Магниточувствительные поисковые приборы // Специальная Техника. №6 2000 г. / http://st.ess.ru/publications/6 2000/arbuzov/arbuzov.htm
- 4. Архангельский А.Я. Программирование в C++Builder 5. М.: ЗАО "Издательство БИНОМ", 2001. 1152 с.
- 5. Бараночников М.Л. Микромагнитоэлектроника. М.: ДМК Пресс, 2001. Т.1. 544 с. ил. (Серия "Учебник")
- Бараночников М.Л. Микромагнитоэлектроника. Справочные сведения о наиболее известных и распространенных изделиях микромагнитоэлектроники. М.: 2002. Т.2. 691 с. ил.
- 7. Васильев Б.В., Колычева Е.В. Магнитокардиограф // Медицинская техника. 1980.
 №2. С.37-40
- Введенский В.Л., Ожогин В.И. Сверхчувствительная магнитометрия и биомагнетизм. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – (Соврем. пробл. физики). – 200 с.
- 9. Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975. 416 с. с ил.
- Григорашвили Ю.Е., Бухлин А.В., Карпов Р.Г., Степанов А.М., Мингазин В.Т. Устройство для обнаружения локальных дефектов проводящих объектов. Патент РФ №2308026. Приоритет патента 20.04.2005 г.
- Григорашвили Ю.Е., Карпов Р.Г., Бухлин А.В. Локатор источников слабых магнитных полей // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. М.: "Научтехлитиздат", 2006, №9. – С.21-25.
- Григорашвили Ю.Е., Карпов Р.Г., Степанов А.М. Метод локации источников слабых магнитных полей // Известия вузов. Электроника. – М.: МИЭТ, 2006, №2. – С.37-41.
- 13. Гуменюк-Сычевский В.И., Примин М.А., Недайвода И.В. Методы и алгоритмы локализации источника магнитного поля. Киев: Наукова думка, 1992. 92 с.
- Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики: Учеб. пособие для втузов. 2-е изд., испр. и доп. М.: Высшая школа, 1999. 718 с.
- 15. Дьяконов В. МАТLAВ 6: учебный курс. СПб.: Питер, 2001. 592 с., илл.
- 16. Желамский М. Магнитное позиционирование в нашлемных системах. / Электроника: Наука, Технология, Бизнес. 1/2007. С.86-90

- 17. Звежинский С., Ларин А. Периметровые маскируемые магнитометрические средства обнаружения. // Специальная техника, №4, 2001.
- Карпов Р.Г. Алгоритмическая, программная и аппаратная реализация системы магнитной локации скрытых объектов. // Известия вузов. ЭЛЕКТРОНИКА №3(77), 2009. С.53-60
- Карпов Р.Г. Метод анализа и обработки данных для устройства трехмерной магнитной локации. Диссертация на соискание степени кандидата технических наук: 05.13.01. Место защиты: Моск. гос. ин-т электронной техники. 2009 г.
- 20. Касаткин С. И., Муравьёв А. М., Поляков П.А. и др. Пространственно векторная мышь для САПР трехмерной графики. // Доклады конф. CAD/CAM/PDM -2001. Институт проблем управления РАН. Москва. // http://lab18.ipu.rssi.ru/labconf/aticle.asp?num=9
- Касаткин С.И., Поляков П.А., Абакумов А.А(мл.)., Муравьёв А.М., Поляков О.П., Терещенко И.В. Манипулятор для виртуальной реальности // Датчики и системы 2001, №11 С.6-9.
- Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение.
 М.: Мир, 2001. 576 с.
- 23. Клаассен К.Б. Основы измерений. Электронные методы и приборы в измерительной технике. М.: Постмаркет, 2002. 352 с.
- 24. Кнеппо П., Титомир Л. Биомагнитные измерения. М.: Энергоатомиздат, 1989. 288 с.
- 25. Ковалев А.В. Поисковые технические средства на основе методов интроскопии // Специальная техника. – М.: 1999, №6. – С.13-21.
- 26. Крянев А.В., Лукин Г.В. Математические методы обработки неопределённых данных. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 216 с.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.: Теоретическая физика: Учеб. пособие. Т.VIII. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука, 1982.- 620 с.
- 28. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т. Т. II. Теория поля. 7-е изд., испр. М.: Наука, 1988. - 512 с.
- 29. Лопаткин А.В. Проектирование печатных плат в системе P-CAD 2001. Учебное пособие для практических занятий. Нижний Новгород, 2002. 178 с.
- Магнитный поиск затонувших объектов. Л.: Изд-во ОКБ НПО "Рудгеофизика" МГ СССР, 1991. – 21 с.
- 31. Методы практического конструирования при нормировании сигналов с датчиков: Пер. с англ. // http://www.autexspb.da.ru, http://www.analog.com.ru
- 32. Михайловский А. Г., Павлов В. С., Уфимцев С. А. Система измерения неоднородных магнитных полей // Вестн. Перм. ун-та. 2000. Вып. 6. Физика. С. 72–77

- Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1983. – 455 с.
- 34. Пріміп М.А. Математичні моделі, методи й алгоритми просторовочасового аналізу магнітних полів та їх застосування в системах діагностики і виявлення. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічных наук. – Київ: Національна академія наук України. Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова, 2000. – 395 с.
- 35.РидикоЛ.И.Контроллершаговогодвигателя//http://radiotech.by.ru/ShematicPCB/Avtomatika/stepmotor.htm, http://dian.ru
- 36. Русаков А.Е. Влияние собственного магнитного момента на поведение классических электродинамических систем. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – М.: МГУ, 2006. – 102 с.
- Рязанов Г.А. Электрическое моделирование с применением вихревых полей. М.: "Наука", 1969 г. 336 с., илл.
- Семенов В.Г. Решение обратной задачи по определению источника физического поля дипольной или квадрупольной модели // Труды ИЗМИРАН. – М., 1981. – С.3-19.
- Семеновский Р.Б., Аверкиев В.В., Яроцкий В.А. Специальная магнитометрия. СПб.: Наука, 2002. – 228 с.
- 40. Смирнов Б.М. Решение задачи определения координат источника магнитного поля // Измерительная техника, 2003, №7. С.38-42.
- 41. Степанов А.М., Карпов Р.Г., Полякова К.В. Программа расчёта координат и дипольного момента магнитного диполя, аппроксимирующего ферромагнитный объект, на основании данных о магнитном поле в конечном множестве точек пространства. Свидетельство РФ о государственной регистрации программы для ЭВМ №2008610913, дата заявки 25.12.2007 г.
- 42. Стороженко В.А., Мельник С.И., Орёл Р.П. Тепловая дефектометрия на основе решения обратной задачи нестационарной теплопроводности. Харьков.// http://ndt-vostok.com.ua/articles/article14.doc
- 43. Тихонов В.В., Шалаев Б.Н. Особенности решения ОЗ при магнитном исследовании подводных сред. // Известия ЛЭТИ, 1983, выпуск 327.
- 44. Форсайт Д. А., Понс Ж. Компьютерное зрение. Современный подход: Пер. с англ. М.: Издательский дом "Вильямс", 2004. 928 с.
- 45. Хоровиц П., Хилл У. Искусство схемотехники: Пер. с англ. 6-е изд. М.: Мир, 2003. 704 с.
- 46. Чен К., Джиблин П., Ирвинг А. МАТLAВ в математических исследованиях: Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 346с., ил.

- 47. Шапиро Л., Стокман Дж. Компьютерное зрение: Пер. с англ. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 752 с., 8 с. ил.: ил.
- Щербаков Г.Н. Обнаружение скрытых объектов для гуманитарного разминирования, криминалистики, археологии, строительства и борьбы с терроризмом. – М.: Арбат-Информ, 2004. – 144 с.
- Щербаков Г.Н., Анцелевич М.А., Удинцев Д.Н. Увеличение глубины обнаружения локальных ферромагнитных объектов в толще укрывающих сред методом дистанционного параметрического подмагничивания // Специальная техника. М., 2004, №6 С.68-72
- 50. Электрические измерения. Средства и методы измерений (общий курс). Под ред. Е. Г. Шрамкова. Учеб. пособие для втузов. М.: Высшая школа, 1972.
- 51. AA and AB-Series Analog Sensors. NVE Corporation // www.nve.com
- 52. Aurora System Technical Specifiations / NDI // http://www.ndigital.com/medical/aurora.php
- 53. AVR Freaks. Сайт для разработчиков систем на микроконтроллерах AVR фирмы Atmel // http://www.avrfreaks.net
- 54. Baillet S., Garnero L. A Bayesian Approach to Introducing Anatomo-functional Priors in the EEG/MEG inverse problem. IEEE Trans. on Biomed. Eng., 1997, Vol. 44, №3, p.347-385.
- Bezdicek M., Caldwell D.G. Portable absolute position tracking system for human hand fingertips. / Proceedings of Virtual Concept 2006. Cancun, Mexico, Nov.27th – Dec.1st, 2006
- 56. Bruno A.C. SQUIDs and Inverse Problem Techniques in Nondestructive Evaluation of Metals // Brazilian Journal of Physics, vol.31, no.4, December, 2001, pp.587-596
- Callmer J., Skoglund M., Gustafsson F. Silent Localization of Underwater Sensors using Magnetometers. // Topics in Localization and Mapping. Jonas Callmer. Linköping studies in science and technology. Thesis. No.1489. 2011. pp.97-114
- Chao Hu, Meng, M.Q.-H., Mandal, M. A Linear Algorithm for Tracing Magnet Position and Orientation by Using Three-Axis Magnetic Sensors / Univ. of Alberta, Edmonton. Magnetics, IEEE Transactions. Vol. 43. Issue 12. Dec. 2007. P. 4096 4101
- 59. Crnila D., Doland P. ComPort Library version 2.64 for Delphi 3,4,5,6 and C++Builder 3,4,5,6, 1998-2002 // http://www2.arnes.si/~sopecrni, http://www.delphi.com/comportlib/messages
- 60. CVonline: On-Line Compendium of Computer Vision // Editor: Robert B. Fisher // Division of Informatics, University of Edinburgh // http://www.dai.ed.ac.uk/cvonline/

- 61. Czipott P.V., Perry A.V., Whitecotton B.R., et al. Magnetic detection and tracking of military vehicles. // Meeting of the MSS Specialty Group on Battlefield Acoustic and Seismic Sensing, Magnetic and Electric Field Sensors. Vol.1, 23 Oct 2001.
- 62. Daniela Gerovska, Marcos J. Araúzo-Bravo, Petar Stavrev. Determination of the parameters of compact ferro-metallic objects with transforms of magnitude magnetic anomalies. / Journal of Applied Geophysics. Volume 55, Issues 3-4, March 2004, Pages 173-186
- Eichardt R., Baumgarten D., Rienzo L.D., et al. Localisation of buried ferromagnetic objects based on minimum-norm-estimations // COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering Vol.28 No.5, 2009 pp.1327-1337.
- 64. Epp V.Ya., Kopytov G.F., Mitrofanova T.G. In-verse Problem For Static Electromagnetic Field In A Dipole Approximation / Tomsk State Pedagogical University // http://arXiv:physics/0404081 v1
- 65. Faugeras O., Keriven R.. PDE's and the Stereo Problem // http://cermics.enpc.fr/~keriven/stereo.html
- 66. Feder H. J. S., Leonard J. J., Smith C. M. Adaptive Mobile Robot Navigation And Mapping / Massachussets Institute of Technology and Charles Stark Draper Laboratory, Cambridge // albacore.mit.edu/ ~ileonard/pubs/ijrr preprint.pdf
- 67. Hall Effect Sensor 2SA-10. Datasheet / SENTRON // www.sentron.ch
- Hamalainen M., Hati R., Ilmoniemi R.J. and Knuutile J. and Lounasmaa O.V. Magnetoencephalography - theory, instrumentation and applications to non-invasive studies of the working human brain. Reviews of Modern Physics, Vol. 65, No. 2. April 1993. p.413-503
- 69. Hauk O. Basics of EEG and MEG: Physiology and data analysis. 2003 // http://www.mrc-cbu.cam.ac.uk/EEG/doc/eeg/eeg_intro.shtml
- 70. Helmet-mounted sighting system. Werner H. Egli, Dennis Kuhlmann, Jack E. Wier. / US Patent № 4,287,809. Sep. 8, 1981. // http://www.freepatentsonline.com
- 71. http://www.altera.com
- 72. http://www.analog.com
- 73. http://www.atmel.com
- Jason T.Sherman, Jonathan K.Lubkert, Radivoje S.Popovic, Mark R. DiSilvestro. Characterization of a Novel Magnetic Tracking System / IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, Vol.43, No.6, June 2007. P.2725-2727
- Jerbi K., Baillet S., Mosher J.C. et al. Localization of realistic cortical activity in MEG using current multipoles // NeuroImage 22 (2004) pp. 779-793.

- Jerbi K., Mosher J.C., Baillet S. and Leahy R.M.. On MEG forward modelling us-ing multipolar expansions. Physics in Medicine and Biology. 47 (2002) 523-555
- 77. Kasac J., Brezak D., Majetic D. &. Novakovic B. Mobile Robot Path Planing Using Gauss Potential Functions and Neural Network / University of Zagreb, Croatia // www.geocities.com/jkasac/daaam book2002.pdf
- 78. Koren Y., Borenstein J. Potential Field Methods and Their Inherent Limitations for Mobile Robot Navigation / The University of Michigan // www.eecs.umich.edu/~johannb/paper27.pdf
- 79. Kumar S., Skvoretz D.C., Moeller C.R., et al. Real-Time Tracking Gradiometer for use in an Autonomous Underwater Vehicle for Buried Minehunting // .
- 80. Lahmann K.J., Hester J.T., Lohmann C.M.F. Long-distance navigation in sea turtles / University of North Carolina // www.unc.edu/depts/geomag/abstracts/EEEreview.pdf
- Magnetic position and orientation tracking system. Frederick H.Raab, Ernest B.Blood, Terry O.Steiner, Herbert R.Jones. / IEEE TRANSACTIONS ON AEROSPACE AND ELECTRONIC SYSTEMS. Vol.AES-15, No.5. Sep.1979
- 82. Martin Isaksson. Vehicle Detection using Anisotropic Magnetoresistors. / Master's thesis. Communications Sustems Department of Signals and Systems, Chalmers University of Technology, Sweden, 2007
- 83. Metal Immune Magnetic Tracker. Ronald J.Lewandovski, Emmet J.Wier. / US Patent № 6,154,024. Nov. 28, 2000. // http://www.freepatentsonline.com
- 84. Murray D., Jennings C. Stereo vision based mapping and navigation for mobile robots
 / University of British Columbia, Vancouver// www.cs.ubc.ca/ spider/donm/pubs/icra97.pdf
- Pei Y.H., Yeo H.G. UXO Survey using Vector Magnetic Gradiometer on Autonomous Underwater Vehicle. // 0-933957-38-1. MTS, 2009
- 86. Perkins D. The Point-to-Point Protocol: A Proposal for Multi-Protocol Transmission of Datagrams Over Point-to-Point Links, RFC 1134, CMU. 1989, November.
- Plotkin A., Paperno E. 3-D Magnetic Tracking of a Single Subminiature Coil With a Large 2-D Array of Uniaxial Transmitters // IEEE TRANSACTION ON MAGNETICS, Vol.39, No.5, September 2003
- Precision Micropower Low Dropout Voltage References: REF19x Series Datasheet // www.analog.com
- Review on Patents about Magnetic Localization Systems for in vivo Catheterizations.
 / Giuseppe Placidi, Danilo Franchi, Alfredo Maurizi and Antonello Sotgiu / Recent Patents on Biomedical Engineering, 2009, Vol.2, No. 1
- 90. Ritz T., Schulten K. The Magnetic Sense of Animals // www.ks.uiuc.edu/Research/magsense/ms.html

- Rudnicki Marek, Wiak Slawomir. Optimization and Inverse Problems in Electromagnetism. – Springer, 2003. – 360 p.
- 92. Sentron 2SA-10 Hall effect 2-Axis Magnetic Field Sensor Overview // GMW Associates // http: // www.gmw.com/magnetic measurements/Sentron/sensors/2SA-10.html
- 93. Stepping motor driver BA6845FS // Datasheet, Rohm
- 94. Takaaki Nara, Satoshi Suzuki, Shigeru Ando. A Closed-Form Formula for Magnetic Dipole Localization by Measurement of Its Magnetic Field and Spatial Gradients. / IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, Vol.42, No.10, October 2006. P.3291-3293
- 95. Tarantola A. Inverse problem theory and methods for model parameter estimation. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics. 2005. 358 p.
- 96. The Measurement, Instrumentation and Sensors Handbook. Editor John G. Webster. CRC Press, 1998. 2630 p.
- 97. Trihatmo S., Jarvis R.A. Short-Safe Compromise Path for Mobile Robot Navigation In A Dynamic Unknown Environment / Robotic Research Center, Monash University, Australia // www.araa.asn.au/acra/acra2003/papers/43.pdf
- 98. Wahlstörm N., Callmer J., Gustafsson F. Single target tracking using vector magnetometers. // IEEE 2011 (ICASSP 2011)
- 99. Wang X., Meng M.Q-H. Application of a magnetic dipole modelling approach to the problem of tracking a capsule endoscope / Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine 2011 // http://pih.sagepub.com/content/225/4/377
- 100. Yang Wan'an, Hu Chao, Max Q.H.Meng, Dai Houde, Chen Dongmei. A New 6D Magnetic Localization Technique for Wireless Capsule Endoscope Based on a Rectangle Magnet. / Chinese Journal of Electronics, Vol.19, No.2, Apr.2010. P.360-364
- 101. Yoichi Haga Catheter Tip Position Sensing Sys-tem Using MI Sensor // Research Associate, Graduate School of Engineering, Tohoku Univer-sity // http://www.mmc.or.jp

Публикации автора

- 102. Марценюк М.А., С.В. Машкин. Навигация автономного агента посредством системы магнитного компьютерного видения. // Теория, методы и средства измерений, контроля и диагностики. Материалы VI междунар. науч.-практ. конф., г. Новочеркасск, 30 сентября 2005 г. С.83-86
- 103. Марценюк М.А., Машкин С.В. "Магнитное компьютерное видение: моделирование и физический эксперимент". // "Компьютерное моделирование 2007" Тр. междунар. науч.-тех. конф. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007 г. С.

- 104. Марценюк М.А., Машкин С.В. "Решение обратной задачи для группы слабо взаимодействующих магнитных диполей". // Тезисы Х международной науч.-тех. конф. "Компьютерное моделирование 2009" СПбГПУ, 23-24 июня 2009 г. С.
- 105. Марценюк М.А., Машкин С.В. Моделирование системы магнитного компьютерного видения // Вестник Перм. ун-та. Физика. 2004. Вып. 1. С. 112 128.
- 106. Марценюк М.А., Машкин С.В. Программа для решения обратных задач для одного и нескольких слабо взаимодействующих точечных магнитных диполей // Свид-во о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011616795. РОС-ПАТЕНТ.
- 107. Марценюк М.А., Машкин С.В. Программный комплекс установки магнитного компьютерного видения (Magnetic Computer Vision System). // Свид-во об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2006610006. РОСПАТЕНТ.
- 108. Марценюк М.А., Машкин С.В., Новиков С.В. и др. Компьютерное зрение: Учебно методическое пособие. Пермь: Изд-во Перм. гос. ун-та. 2007. 215 с.
- 109. Марценюк М.А., Машкин С.В., Селиверстов Е.В.. Моделирование навигации автономного агента посредством системы магнитного компьютерного видения // Вестник Перм. ун-та. Инф. сист. и техн. 2005. Вып. 4. С. 11 25.
- 110. Машкин С.В. Аппаратно программный комплекс магнитного компьютерного видения // Вестник Перм. ун-та. Инф. сист. и техн. 2005. Вып. 4. С. 66 80.
- 111. Машкин С.В., Марценюк М.А. "Метод измерения механических деформаций посредством системы магнитного компьютерного видения" // Науч.-тех. ведомости СПбГПУ. №4(88), 2009 С. 151-158
- 112. Машкин С.В., Марценюк М.А. Анализ температурных и магнитных полей с помощью магнитотепловых аналогий // Тез. докл. конф. мол. уч. "Неравновесные процессы в сплошных средах". Пермь. 26, 27 дек. 2003 г. С 67 – 68.
- 113. Машкин С.В., Марценюк М.А. Практические приложения системы магнитного компьютерного видения // Труды VI всероссийской конф. "Необратимые процессы в природе и технике", г. Москва, 26-28 января 2011 г. Ч.2. С. 303 – 306.
- 114. Машкин С.В., Марценюк М.А., Архангельский П.В. Приложения системы магнитного компьютерного 3D-видения // Вестник Перм. ун-та. Инф. сист. и техн. 2011. Вып. 12 (38). С. 35 – 46.
- 115. Сивков В.Г., Марценюк М.А., Машкин С.В. Лабораторный практикум "Моделирование устройств записи и хранения информации" // Вестник Перм. ун-та. Инф. сист. и техн. 2010. Вып. 2. С. 11 – 25.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П1. Принципиальная схема АПК-МКВ



Рис.Ш1.1. Схема соединений модулей



(Центральный процессор и модуль RS-232)

Рис.II1.2. Принципиальная схема модуля сбора и обработки информации















П1.6. Схема создания напряжения смещения

на входе усилителя (вариант)



с переключаемым коэффициентом усиления

Рис.Ш1.7. Принципиальная схема модуля четырехканального усилителя











Рис.П1.11. Схема прошивки ПЛИС Altera

П2. Исходный код функции для решения ОЗД (MATLAB)

Листинг П2.1

```
function [dipoleX, dipoleM, varargout] =
find dipole(ra,Ba,approximation,equations,zpmethod)
% Функция решает обратную задачу для диполя в 3D случае
8
% BXOЛ:
8
             = Nx3 матрица - координаты точек измерения
   ra
8
   Вa
             = Nx3 матрица - значение поля в точках измерения
   approximation = строка - метод или порядок аппроксимации поля,
%
8
                  используемый при вычислении производных поля по данным измерений.
8
                  Общий вид аппроксимации:
                  Ba = B0 + T*ras + Q*ras*ras + U*ras*ras*ras + D*ras*ras*ras*ras
8
8
                  Возможные значения:
                   'matrix'- решение матричной системы уравнений, линейное
8
8
                           приближение поля
                   'mnk1' - MHK1
8
                   'mnk2' - MHK2
'mnk3' - MHK3
2
8
                   'mnk4' - MHK4
8
                   'mnkls' - МНК1 с учётом симметричности некоторых тензоров
8
                   'mnk2s' - МНК2 с учётом симметричности некоторых тензоров
8
                   'mnk3s' - МНКЗ с учётом симметричности некоторых тензоров
8
                   'mnk1v' - МНК1 с подгонкой коэффициентов чувствительности
%
8
                            измерения поля
8
                            (используя симметричность тензора Т)
                = строка - система уравнений, используемая при нахождении R0.
8
  equations
                  Возможные значения:
8
                  %
8
8
%
                   '01-12' - B0<->T,T<->Q
8
                   '12'
                         - T<->Q
%
  zpmethod
8
                 = строка - способ учета особенности в "нулевой" плоскости
8
                  Возможные значения:
                   'none' - не учитывается
%
                  'omega' - используется критерий оmega (определение попадания
8
            в "нулевую" плоскость) - необходимо задать значение global MIN_OMEGA
8
00
                  'g'

    используется критерий д (выбор лучшего решения из двух)

% ВЫХОД:
% dipoleX = вектор 1x3 = найденное положение диполя
% dipoleM = вектор 1х3 = найденный магнитный момент диполя
% varargout = переменное число выходных аргументов, в зависимости от выбранного метода:
00
               avqB
%
               avgr
8
               ras
%
               в0
8
               B1(T)
8
               B2 (Q)
8
               B3(U)
8
               B4 (D)
8 BHYNCJEHNE avgB, avgr, ras, B0, B1(T), B2(Q), B3(U), B4(D) ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЯ
% ПОЛЯ
*****
MAX ITER = 500;
TOLERANCE = 1e-20;
%Определяем количество точек измерения
N = size(Ba, 1);
%Находим среднее значение поля
```

```
avgB = mean(Ba, 1);
«Находим положение центра области измерения
avgr = mean(ra,1);
«Находим координаты точек измерения относительно центра области измерения
avgrM = repmat(avgr,N,1);
ras = ra - avgrM;
%Находим коэффициенты аппроксимации поля
switch(approximation)
case 'matrix'
        «Вычислить матрицы первого момента поля А и форм-фактора G
        A=zeros(3,3);
        G=zeros(3,3);
        for j=1:3
for l=1:3
            A(j,l)=sum(Ba(:,j).*ras(:,l));
            G(j,l)=sum(ras(:,j).*ras(:,l));
        end
        end
        %Вычислить тензор Т
        T = A * inv(G);
        %ВО совпадает с avgB
        B0 = avgB;
        %На всякий случай заполняем выходные аргументы
        Q = []; U = []; D = [];
case 'mnk1'
        %находим В0 и Т методом наименьших квадратов
        [A,B] = form3d_AB1(ras,Ba);
        tol = TOLERANCE;
        maxit = MAX ITER;
        [X, fl] = LSQR(A, B, tol, maxit);
        B0 = [X(1) X(2) X(3)];
        T = [X(4) \quad X(5) \quad X(6);
             X(7) X(8) X(9);
             X(10) X(11) X(12)];
        %На всякий случай заполняем выходные аргументы
        Q = []; U = []; D = [];
case 'mnk2'
        %находим B0, T, Q методом наименьших квадратов
        [A,B] = form3d AB2(ras,Ba);
        tol = TOLERANCE;
        maxit = MAX ITER;
        [X,fl] = LSQR(A,B,tol,maxit);
        B0 = [X(1) X(2) X(3)];
        T = [X(4) \ X(5) \ X(6);
             X(7) X(8) X(9);
             X(10) X(11) X(12)];
        Q=zeros(3,3,3);
        c=13;
        for i=1:3
        for j=1:3
        for k=1:3
            Q(i,j,k) = X(c);
            c=c+1;
        end
        end
        end
```

```
%На всякий случай заполняем выходные аргументы
         U = []; D = [];
case 'mnk3'
          %находим B0, T, Q, U методом наименьших квадратов
          [A,B] = form3d AB3(ras,Ba);
          tol = TOLERANCE;
         maxit = MAX ITER;
          [X,fl] = LSQR(A,B,tol,maxit);
         B0 = [X(1) X(2) X(3)];
         T = [X(4) \ X(5) \ X(6);
                X(7) X(8) X(9);
                X(10) X(11) X(12)];
         Q=zeros(3,3,3);
         c=13;
         for i=1:3
          for j=1:3
          for k=1:3
              Q(i,j,k)=X(c);
              c=c+1;
         end
         end
         end
         U=zeros(3,3,3,3);
         c=40;
         for q=1:3
         for w=1:3
          for e=1:3
          for r=1:3
              U(q,w,e,r)=X(c);
              c=c+1;
         end
         end
         end
         end
         %На всякий случай заполняем выходные аргументы
         D = [];
case 'mnk4'
          %находим B0, T, Q, U, D методом наименьших квадратов
          [A,B] = form3d AB4(ras,Ba);
         tol = TOLERANCE;
         maxit = MAX_ITER;
          [X,fl] = LSQR(A,B,tol,maxit);
         B0 = [X(1) X(2) X(3)];
          \begin{split} \mathtt{T} &= & [\mathtt{X}(4) & \mathtt{X}(5) & \mathtt{X}(6); \\ & \mathtt{X}(7) & \mathtt{X}(8) & \mathtt{X}(9); \\ & \mathtt{X}(10) & \mathtt{X}(11) & \mathtt{X}(12)]; \end{split} 
         Q=zeros(3,3,3);
         c=13;
          for i=1:3
          for j=1:3
          for k=1:3
              Q(i,j,k)=X(c);
              c=c+1;
         end
         end
         end
         U=zeros(3,3,3,3);
         c=40;
         for q=1:3
```

```
for w=1:3
        for e=1:3
        for r=1:3
           U(q, w, e, r) = X(c);
            c=c+1;
        end
        end
        end
        end
        D=zeros(3,3,3,3,3);
        c=121;
        for u=1:3
        for o=1:3
        for p=1:3
        for s=1:3
        for f=1:3
            D(u, o, p, s, f) = X(c);
            c=c+1;
        end
        end
        end
        end
        end
case 'mnk1s'
        %находим ВО и Т методом наименьших квадратов
        [A,B] = form3d AB1s(ras,Ba);
        tol = TOLERANCE;
        maxit = MAX ITER;
        [X, fl] = LSQR(A, B, tol, maxit);
        B0 = [X(1) X(2) X(3)];
        T = [X(4) X(5) X(6);
             X(5) X(7) X(8);
             X(6) X(8) X(9)];
        %На всякий случай заполняем выходные аргументы
        Q = []; U = []; D = [];
case 'mnk2s'
        %находим ВО, Т и Q методом наименьших квадратов
        [A,B] = form3d AB2s(ras,Ba);
        tol = TOLERANCE;
        maxit = MAX ITER;
        [X,fl] = LSQR(A,B,tol,maxit);
        B0 = [X(1) X(2) X(3)];
        T = [X(4) X(5) X(6);
             X(5) X(7) X(8);
             X(6) X(8) X(9)];
        Q=zeros(3,3,3);
                             Q(1,1,2) = X(11);
        Q(1,1,1) = X(10);
                                                   Q(1,1,3) = X(12);
        Q(1,2,1) = X(11);
                             Q(1,2,2) = X(13);
                                                  Q(1,2,3) = X(14);
        Q(1,3,1) = X(12);
                             Q(1,3,2) = X(14);
                                                   Q(1,3,3) = X(15);
        Q(2,1,1) = X(11);
                             Q(2,1,2) = X(13);
                                                   Q(2,1,3) = X(14);
                             Q(2, 2, 2) = X(16);
                                                   Q(2,2,3) = X(17);
        Q(2,2,1) = X(13);
        Q(2,3,1) = X(14);
                             Q(2,3,2) = X(17);
                                                   Q(2,3,3) = X(18);
        Q(3,1,1) = X(12);
                             Q(3,1,2) = X(14);
                                                   Q(3,1,3) = X(15);
        Q(3,2,1) = X(14);
                             Q(3,2,2) = X(17);
                                                   Q(3,2,3) = X(18);
        Q(3,3,1) = X(15);
                             Q(3,3,2) = X(18);
                                                   Q(3,3,3) = X(19);
        %На всякий случай заполняем выходные аргументы
        U = []; D = [];
case 'mnk3s'
        8находим B0, T, Q, U методом наименьших квадратов
```

```
[A,B] = form3d_AB3s(ras,Ba);
```

tol = TOLERANCE; maxit = MAX ITER; [X, fl] = LSQR(A, B, tol, maxit);B0 = [X(1) X(2) X(3)]; $T = [X(4) \quad X(5) \quad X(6);$ X(5) X(7) X(8);X(6) X(8) X(9)]; Q=zeros(3,3,3); Q(1, 1, 2) = X(11);Q(1,1,3) = X(12);Q(1, 1, 1) = X(10);Q(1,2,3) = X(14);Q(1,2,1) = X(11);Q(1,2,2) = X(13);Q(1,3,3) = X(15);O(1,3,1) = X(12);Q(1,3,2) = X(14);Q(2,1,1) = X(11);Q(2,1,2) = X(13);Q(2,1,3) = X(14);Q(2,2,1) = X(13);Q(2,2,2) = X(16);Q(2,2,3) = X(17);Q(2,3,1) = X(14);Q(2,3,2) = X(17);Q(2,3,3) = X(18);Q(3,1,1) = X(12);Q(3,1,2) = X(14);Q(3,1,3) = X(15);Q(3,2,1) = X(14);Q(3,2,2) = X(17);Q(3,2,3) = X(18);Q(3,3,1) = X(15);Q(3,3,2) = X(18);Q(3,3,3) = X(19);U=zeros(3,3,3,3); U(1,1,3,1) = X(22); U(1,1,3,2) = X(24); U(1,1,3,3) = X(25);U(1,2,1,1) = X(21); U(1,2,1,2) = X(23); U(1,2,1,3) = X(24); $\mathbb{U}\left(1,2,2,1\right) \ = \ \mathbb{X}\left(23\right); \quad \mathbb{U}\left(1,2,2,2\right) \ = \ \mathbb{X}\left(26\right); \quad \mathbb{U}\left(1,2,2,3\right) \ = \ \mathbb{X}\left(27\right);$ U(1,2,3,1) = X(24);U(1,3,1,1) = X(22);U(1,2,3,2) = X(27);U(1,2,3,3) = X(28);U(1,3,1,2) = X(24);U(1,3,1,3) = X(25);U(1,3,2,1) = X(24); U(1,3,2,2) = X(27); U(1,3,2,3) = X(28);U(1,3,3,1) = X(25); U(1,3,3,2) = X(28); U(1,3,3,3) = X(29);U(2,1,1,1) = X(21); U(2,1,1,2) = X(23); U(2,1,1,3) = X(24);U(2,2,2,1) = X(26); U(2,2,2,2) = X(30); U(2,2,2,3) = X(31);U(2,2,3,1) = X(27); U(2,2,3,2) = X(31); U(2,2,3,3) = X(32); $\mathbb{U}\left(2,3,1,1\right) \ = \ \mathbb{X}\left(24\right); \quad \mathbb{U}\left(2,3,1,2\right) \ = \ \mathbb{X}\left(27\right); \quad \mathbb{U}\left(2,3,1,3\right) \ = \ \mathbb{X}\left(28\right);$ U(2,3,2,1) = X(27); U(2,3,2,2) = X(31);U(2,3,3,1) = X(28); U(2,3,3,2) = X(32);U(2,3,2,3) = X(32);U(2,3,3,3) = X(33);U(3,1,1,1) = X(22); U(3,1,1,2) = X(24); U(3,1,1,3) = X(25);U(3,1,2,1) = X(24); U(3,1,2,2) = X(27); U(3,1,2,3) = X(28);U(3,1,3,1) = X(25); U(3,1,3,2) = X(28); U(3,1,3,3) = X(29);U(3,2,3,1) = X(28); U(3,2,3,2) = X(32); U(3,2,3,3) = X(33);U(3,3,1,1) = X(25); U(3,3,1,2) = X(28); U(3,3,1,3) = X(29); $\mathbb{U}\left(3,3,2,1\right) \ = \ \mathbb{X}\left(28\right); \quad \mathbb{U}\left(3,3,2,2\right) \ = \ \mathbb{X}\left(32\right); \quad \mathbb{U}\left(3,3,2,3\right) \ = \ \mathbb{X}\left(33\right);$ U(3,3,3,1) = X(29); U(3,3,3,2) = X(33); U(3,3,3,3) = X(34);%На всякий случай заполняем выходные аргументы D = []; case 'mnklv' %находим сырые значения В0 и Т методом наименьших квадратов %(сырые = коэффициенты чувствительности по осям не выровнены) [ARAW, BRAW] = form3d AB1(ras, Ba); tol = TOLERANCE; maxit = MAX ITER; [XRAW, fl] = LSQR (ARAW, BRAW, tol, maxit); BORAW = [XRAW(1) XRAW(2) XRAW(3)];TRAW = [XRAW(4) XRAW(5) XRAW(6);XRAW(7) XRAW(8) XRAW(9); XRAW(10) XRAW(11) XRAW(12)]; %считая, что Bak = alphak * B0k + alphak * Tki * rai' Bak = BORAWk + TRAWki * rai' 8 8 alpha1 = 1.0%и используя симметричность тензора Tki, получим:

170

```
TRAW
      alpha(1) = 1.0;
      alpha(2) = TRAW(2,1)/TRAW(1,2);
      alpha(3) = TRAW(3,1)/TRAW(1,3);
      B0(1) = alpha(1) * B0RAW(1);
      B0(2) = alpha(2) * B0RAW(2);
      BO(3) = alpha(3) * BORAW(3);
      T(1,1) = alpha(1) * TRAW(1,1);
      T(1,2) = alpha(1) * TRAW(1,2);
      T(1,3) = alpha(1) * TRAW(1,3);
      T(2,1) = alpha(2) * TRAW(2,1);
      T(2,2) = alpha(2) * TRAW(2,2);
      T(2,3) = alpha(2) * TRAW(2,3);
      T(3,1) = alpha(3) * TRAW(3,1);
T(3,2) = alpha(3) * TRAW(3,2);
      T(3,3) = alpha(3) * TRAW(3,3);
      disp([ 'mnk1v: alpha=[' num2str(alpha(1)) ' ' num2str(alpha(2)) ' '
num2str(alpha(3)) ']' ]);
      %решаем задачу методом mnk1 (далее)
      %На всякий случай заполняем выходные аргументы
      Q = []; U = []; D = [];
otherwise
      error('finddipole3d: error: unknown approximation');
      return;
end
******
🖇 ВЫЧИСЛЕНИЕ R0 ПО НАЙДЕННЫМ avgB,avgr,ras,B0,B1(T),B2(Q),B3(U),B4(D)
2
*****
   *****
   % РЕШЕНИЕ, НЕ УЧИТЫВАЮЩЕЕ ОСОБЕННОСТЬ В "НУЛЕВОЙ" ПЛОСКОСТИ
   2
   ****
   switch (equations)
   case '0a'
         %Из матричной системы уравнений находим R0
         00
         %
             (Ba-B0)*R0 = -3*B0*ras
         8
         % Составляем матрицы уравнения
         % (Bak-B0k) *R0k = -3B0i*rasi
         % или
         % A*X = B
         clear A;
         clear B;
         s = 1;
         for a=1:N
            A(s,1) = Ba(a,1) - BO(1);
            A(s,2) = Ba(a,2)-BO(2);
            A(s,3) = Ba(a,3)-BO(3);
            B(s,1) = -3*(BO(1)*ras(a,1) + BO(2)*ras(a,2) + BO(3)*ras(a,3));
            s = s + 1;
         end;
         % Решаем систему
```

```
tol = TOLERANCE;
           maxit = MAX ITER;
           [X,fl] = LSQR(A,B,tol,maxit);
           R0 = X';
   case '01a'
           %Из матричной системы уравнений находим R0
           8
               (Ba-B0)*R0 = -3*B0*ras -2*T*ras*ras
           2
           0
           % Составляем матрицы уравнения
           % (Bak-B0k) *R0k = - 3*B0i*rasi - 2*Tij*rasi*rasj
           % или
           % A*X = B
           clear A;
           clear B;
           s = 1;
           for a=1:N
              A(s,1) = Ba(a,1)-BO(1);
              A(s,2) = Ba(a,2) - BO(2);
              A(s,3) = Ba(a,3)-BO(3);
              B(s,1) = -3*(B0(1)*ras(a,1) + B0(2)*ras(a,2) + B0(3)*ras(a,3)) - ...
                        2*( T(1,1)*ras(a,1)*ras(a,1) + T(1,2)*ras(a,1)*ras(a,2) +
T(1,3)*ras(a,1)*ras(a,3) + ...
                           T(2,1)*ras(a,2)*ras(a,1) + T(2,2)*ras(a,2)*ras(a,2) +
T(2,3)*ras(a,2)*ras(a,3) + ...
                           T(3,1) *ras(a,3) *ras(a,1) + T(3,2) *ras(a,3) *ras(a,2) +
T(3,3) *ras(a,3) *ras(a,3)
                       );
              s = s + 1;
           end;
           % Решаем систему
           tol = TOLERANCE;
           maxit = MAX ITER;
           [X,fl] = LSQR(A,B,tol,maxit);
           R0 = X';
   case '012a'
           %Из матричной системы уравнений находим R0
           8
           8
               (Ba-B0)*R0 = -3*B0*ras -2*T*ras*ras -(5/3)*Q*ras*ras*ras
           %
           % Составляем матрицы уравнения
           % (Bak-BOk) *ROk = - 3*BOi*rasi - 2*Tij*rasi*rasj - (5/3)*Qijk*rasi*rasj*rask
           % или
           % A*X = B
           clear A;
           clear B;
           s = 1;
           for a=1:N
              A(s,1) = Ba(a,1)-BO(1);
              A(s,2) = Ba(a,2) - BO(2);
              A(s,3) = Ba(a,3) - BO(3);
              B(s,1) = -3*(B0(1)*ras(a,1) + B0(2)*ras(a,2) + B0(3)*ras(a,3)) - \dots
                        2*( T(1,1)*ras(a,1)*ras(a,1) + T(1,2)*ras(a,1)*ras(a,2) +
T(1,3)*ras(a,1)*ras(a,3) + ...
                           T(2,1)*ras(a,2)*ras(a,1) + T(2,2)*ras(a,2)*ras(a,2) +
T(2,3)*ras(a,2)*ras(a,3) + ...
                           T(3,1) *ras(a,3) *ras(a,1) + T(3,2) *ras(a,3) *ras(a,2) +
T(3,3) *ras(a,3) *ras(a,3)
                       ) – ...
                        (5/3)*( Q(1,1,1)*ras(a,1)*ras(a,1)*ras(a,1) +
Q(1,1,2) *ras(a,1) *ras(a,1) *ras(a,2) + Q(1,1,3) *ras(a,1) *ras(a,1) *ras(a,3) + ...
                               Q(1,2,1) *ras(a,1) *ras(a,2) *ras(a,1) +
Q(1,2,2)*ras(a,1)*ras(a,2)*ras(a,2) + Q(1,2,3)*ras(a,1)*ras(a,2)*ras(a,3) + ...
```

```
Q(1,3,1) *ras(a,1) *ras(a,3) *ras(a,1) +
Q(1,3,2)*ras(a,1)*ras(a,3)*ras(a,2) + Q(1,3,3)*ras(a,1)*ras(a,3)*ras(a,3) + ...
                               Q(2,1,1)*ras(a,2)*ras(a,1)*ras(a,1) +
Q(2,1,2)*ras(a,2)*ras(a,1)*ras(a,2) + Q(2,1,3)*ras(a,2)*ras(a,1)*ras(a,3) + ...
                               Q(2,2,1)*ras(a,2)*ras(a,2)*ras(a,1) +
Q(2,2,2)*ras(a,2)*ras(a,2)*ras(a,2) + Q(2,2,3)*ras(a,2)*ras(a,2)*ras(a,3) + ...
                               Q(2,3,1)*ras(a,2)*ras(a,3)*ras(a,1) +
Q(2,3,2)*ras(a,2)*ras(a,3)*ras(a,2) + Q(2,3,3)*ras(a,2)*ras(a,3)*ras(a,3) + ...
                               Q(3,1,1) *ras(a,3) *ras(a,1) *ras(a,1) +
Q(3,1,2)*ras(a,3)*ras(a,1)*ras(a,2) + Q(3,1,3)*ras(a,3)*ras(a,1)*ras(a,3) + ...
                               Q(3,2,1)*ras(a,3)*ras(a,2)*ras(a,1) +
Q(3,2,2)*ras(a,3)*ras(a,2)*ras(a,2) + Q(3,2,3)*ras(a,3)*ras(a,2)*ras(a,3) + ...
                               Q(3,3,1) *ras(a,3) *ras(a,3) *ras(a,1) +
Q(3,3,2)*ras(a,3)*ras(a,3)*ras(a,2) + Q(3,3,3)*ras(a,3)*ras(a,3)*ras(a,3));
              s = s + 1;
           end:
           % Решаем систему
           tol = TOLERANCE;
          maxit = MAX ITER;
           [X,fl] = LSQR(A,B,tol,maxit);
           R0 = X';
   case '01'
           %Из матричной системы уравнений находим R0
           00
           8
              T * R0 = (-3 * avgB)
              R0 = T \setminus (-3 * avgB)
           8
           %
           %Не забываем, что у нас вектора лежачие, а при записи уравнения
           %предполагается, что они стоячие
           R0 = T' \setminus ((-3) * (avgB'));
          R0 = R0';
   case '01-12'
           %Формируем матрицу А и вектор В для нахождения R0
           %из системы уравнений:
           % Qkij * Rj = −2*Tki
                                   / A*X=B
              Tki * Ri = -3 <Bk>
           8
           A=[];
           for k=1:3
              subA=[];
              for i=1:3
              for j=1:3
                  subA(i,j)=Q(k,i,j);
              end
              end
              A=[A; subA];
           end
           A=[A; T];
           B=[];
           for k=1:3
           for i=1:3
                  B=[B; -2*T(k,i)];
           end
           end
           B=[B; -3*B0'];
           %Решаем систему методом наименьших квадратов
           tol = TOLERANCE;
          maxit = MAX ITER;
           X = LSQR(A, B, tol, maxit);
           R0 = X';
```

```
case '12'
           %Формируем матрицу А и вектор В для нахождения R0
           %из системы уравнений:
           % Qkij * Rj = −2*Tki
                                  / A*X=B
          A=[];
           for k=1:3
              subA=[];
              for i=1:3
                  for j=1:3
                     subA(i,j)=Q(k,i,j);
                  end
              end
              A=[A; subA];
           end
          B=[];
           for k=1:3
              for i=1:3
                  B=[B; -2*T(k,i)];
              end
          end
           %Решаем систему методом наименьших квадратов
          tol = TOLERANCE;
          maxit = MAX ITER;
          X = LSQR(A, \overline{B}, tol, maxit);
          R0 = X';
   otherwise
          error('finddipole2d: error: unknown equations');
          return;
   end
   8ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИПОЛЯ dipoleX И ЕГО МАГНИТНОГО МОМЕНТА dipoleM
   «Вычисляем положение диполя
   dipoleX = avgr - R0;
   «Вычисляем магнитный момент диполя
   %mu0 = 4*pi*1e-7;
   modR0 = (R0(1).*R0(1) + R0(2).*R0(2) + R0(3).*R0(3))^{0.5};
   modR03 = modR0^3;
   avgBdipRmodR32 = 1.5.*( avgB(1).*R0(1) + avgB(2).*R0(2) + avgB(3).*R0(3) ).*modR0;
   dipoleM(1) = 1e7 .* ( avgBdipRmodR32.*R0(1) - modR03.*avgB(1) );
dipoleM(2) = 1e7 .* ( avgBdipRmodR32.*R0(2) - modR03.*avgB(2) );
   dipoleM(3) = 1e7 .* ( avgBdipRmodR32.*R0(3) - modR03.*avgB(3) );
   dipoleM nz = dipoleM;
   dipoleX nz = dipoleX;
if (~strcmp(zpmethod,'none')) %в случае, когда можно пропустить - пропускаем
   *****
   % СПЕЦИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ "НУЛЕВОЙ" ПЛОСКОСТИ
   %
   «ПЕРЕХОДИМ В СИСТЕМУ КООРДИНАТ, ПЛОСКОСТЬ XY КОТОРОЙ СОВПАДАЕТ С "ПРОБЛЕМНОЙ ПЛОСКО-
стью"
   «Записываем ортонормированную исходную систему координат I
   IeI = eye(3);
   «Строим новую ортонормированную "нулевую" систему координат К
   IeK(3,:) = -B0/norm(B0,2);
```

```
174
```

```
IeK31 = abs(IeK(3,1));
IeK32 = abs(IeK(3,2));
IeK33 = abs(IeK(3,3));
if (IeK31 >= IeK32) & (IeK31 >= IeK33)
    %IeK31
    IeK(1,2) = 0;
    IeK(1,3) = 1 / sqrt( 1 + (IeK(3,3)/IeK(3,1))^2 );
    IeK(1,1) = - (IeK(3,3)/IeK(3,1)) * IeK(1,3);
elseif (IeK32 >= IeK31) & (IeK32 >= IeK33)
    %TeK32
    IeK(1,1) = 0;
    IeK(1,3) = 1 / sqrt( 1 + (IeK(3,3)/IeK(3,2))^2 );
    IeK(1,2) = - (IeK(3,3)/IeK(3,2)) * IeK(1,3);
else
    %IeK33
    IeK(1,1) = 0;
    IeK(1,2) = 1 / sqrt( 1 + (IeK(3,2)/IeK(3,3))^2 );
    IeK(1,3) = - (IeK(3,2)/IeK(3,3)) * IeK(1,2);
end
IeK(2,:) = cross(IeK(3,:),IeK(1,:));
«Получаем матрицу преобразования координат K->I
for i = 1:3
    for j = 1:3
        %GKI(i,j) = dot(IeI(i,:),IeK(j,:));
        GKI(i,j) = sum(IeI(i,:).*IeK(j,:));
    end
end
%Получаем матрицу преобразования координат I->К
GIK = GKI';
%Вычислить тензор Т
%KT = KA * inv(KG);
for k=1:3
    for i=1:3
        ss=0;
        for 1=1:3
            for m=1:3
                ss=ss+GIK(k,1)*GIK(i,m)*T(l,m);
            end
        end
        KT(k,i)=ss;
    end
end
KB0 = (GIK*(B0'))';
%В "нулевой" системе координат решаем обратную задачу для диполя
% mu0 = 4*pi*1e-7;
% alpha = -1e-7; % - mu0/(4*pi);
% beta = 3e-7; % 3*mu0/(4*pi);
KmodR = abs(3*KB0(3)) / sqrt( (KT(3,1)*KT(3,1)) + (KT(3,2)*KT(3,2)) );
R23B3 = - (KmodR*KmodR) / (3*KB0(3));
KR(1) = R23B3*KT(3,1);
KR(2) = R23B3*KT(3,2);
KR(3) = 0;
Km(1) = 0;
Km(2) = 0;
Km(3) = -KBO(3) * (KmodR^3) * 1e7;
%ПЕРЕХОДИМ ОБРАТНО В НОРМАЛЬНУЮ СИСТЕМУ КООРДИНАТ
«Переводим значения полученных векторов в систему координат I
dipoleM = (GKI * (Km'))';
R0 = (GKI * (KR'))';
```

```
%Вычисляем положение диполя
       dipoleX = avgr - R0;
       dipoleX_z = dipoleX;
       dipoleM z = dipoleM;
end
% BUBOP PEILEHUS
2
****
switch (zpmethod)
case 'none'
               % ОСОБЕННОСТЬ В "НУЛЕВОЙ" ПЛОСКОСТИ НЕ УЧИТЫВАЕТСЯ
               %
              dipoleX = dipoleX_nz;
              dipoleM = dipoleM nz;
case 'omega'
              % РЕШЕНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИТЕРИЯ ОМЕДА
               % (ВЫБОР СПЕЦ-РЕШЕНИЯ В СООТВЕТСТВИИ СО ЗНАЧЕНИЕМ ОМЕДА)
              *Вычисляем критерий OMEGA (для определения того, находимся ли мы в плоскости ди-
поля)
               summodT =
abs(T(1,1))+abs(T(1,2))+abs(T(1,3))+abs(T(2,1))+abs(T(2,2))+abs(T(2,3))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(3,1))+abs(T(
(3,2) + abs (T(3,3));
              if summodT==0
                     krit=0;
              else
                     krit=abs(det(T))/(summodT^3);
              end
              %Эта постоянная задаётся снаружи
              global MIN OMEGA;
              %Вылавливаем ситуацию, когда det(T)->0
              if (krit <= MIN OMEGA)
                      %случай нулевой плоскости
                     dipoleX = dipoleX_z;
                     dipoleM = dipoleM z;
              else
                      %обычный случай
                     dipoleX = dipoleX nz;
                     dipoleM = dipoleM nz;
              end
case 'g'
              % РЕШЕНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИТЕРИЯ G
               % (РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ОБЫЧНОМ И СПЕЦ-СЛУЧАЕ И ВЫБОР ЛУЧШЕГО РЕШЕНИЯ)
               %Для каждого случая вычисляем g - критерий соответствия полей
               %решение прямой задачи
              Ba nz = field dipole B(dipoleX nz, dipoleM nz, ra);
               %вычисление критерия доверия
              g_nz = find_g(Ba,Ba_nz);
               %решение прямой задачи
              Ba z = field dipole B(dipoleX z, dipoleM z, ra);
```

```
176
```

```
%вычисление критерия доверия
      g z = find g(Ba, Ba z);
      %Выбираем решение с большим д
      if (g_nz \ge g_z)
         «Выбираем решение не для нулевой плоскости
         zeroIS = 0;
         dipoleM = dipoleM nz;
         dipoleX = dipoleX_nz;
      else
         %Выбираем решение для нулевой плоскости
         zeroIS = 1;
         dipoleM = dipoleM z;
         dipoleX = dipoleX z;
      end
otherwise
      error('finddipole3d: error: unknown zpmethod');
      return;
end
%Заполняем выходные аргументы
tmpout{1} = avgB;
tmpout{2} = avgr;
tmpout{3} = ras;
tmpout{4} = B0;
tmpout{5} = T;
tmpout{6} = Q;
tmpout{7} = U;
tmpout{8} = D;
if nargout<3
   %do nothing
elseif nargout>3+7
  error('finddipole3d: error: Invalid number of output arguments');
else
   for i=1:nargout
      varargout{i} = tmpout{i};
   end:
end;
return;
****
function [g] = find g(M0, M1)
%Функция вычисляет значение д-критерия, показывающего "степень похожести"
%исходного набора данных на "эталонный". Данные являются D-мерными.
%M0 = S x D матрица - "эталонный" набор данных
%M1 = S x D матрица - набор данных, сравниваемый с "эталонным"
%д = 1 х 1 число - значение д-критерия
N = size(M0, 1);
D = size(M0, 2);
g = 0;
for a=1:N
   g = g + (norm(MO(a,:)-M1(a,:),2)/norm(MO(a,:),2));
end
g = 1 - g;
return;
***
function [A,B] = form3d AB1(ras,Ba)
```

```
% [A,B] = form3d AB1(ras,Ba)
% Формирование матриц для применения метода наименьших квадратов
% ВХОД:
% ras = матрица N x 3 - матрица относительных (относительно центра области измерения)
координат точек измерения
   Ва = матрица N х 3 - матрица компонент поля в точках измерения
8
% ВЫХОД:
% A = матрица 3*N x 12
   В = матрица 3*N x 1
8
N=size(ras,1);
N_{3}=3*N:
A=zeros(N3, 12);
B=zeros(N3,1);
s=1;
for a=1:N
   %формируем столбец В (первая строка)
   B(s,1)=Ba(a,1);
    %формируем матрицу А (первая строка)
   A(s, 1) = 1;
   %A(s,2)=0;
   %A(s,3)=0;
   A(s, 4) = ras(a, 1);
   A(s, 5) = ras(a, 2);
   A(s, 6) = ras(a, 3);
   %for t=7:12
   00
       A(s,t)=0;
   %end
   s=s+1;
   %формируем столбец В (вторая строка)
   B(s,1)=Ba(a,2);
   %формируем матрицу А (вторая строка)
    %A(s,1)=0;
   A(s, 2) = 1;
    %A(s,3)=0;
    %for t=4:6
   00
        A(s,t)=0;
   %end
   A(s,7) = ras(a,1);
   A(s, 8) = ras(a, 2);
   A(s, 9) = ras(a, 3);
   %for t=10:12
    90
        A(s,t) = 0;
   %end
   s=s+1;
   %формируем столбец В (третья строка)
   B(s,1)=Ba(a,3);
    %формируем матрицу А (третья строка)
    %A(s,1)=0;
   %A(s,2)=0;
   A(s, 3) = 1;
   %for t=4:9
    8
        A(s,t) = 0;
   %end
   A(s, 10) = ras(a, 1);
   A(s, 11) = ras(a, 2);
   A(s, 12) = ras(a, 3);
    s=s+1;
   end;
return;
```

```
******
function [A,B] = form3d AB1s(ras,Ba)
% [A,B] = form3d AB1s(ras,Ba)
% Формирование матриц для применения метода наименьших квадратов
% с учётом симметричности некоторых матриц
% BXOЛ:
% ras = матрица N x 3 - матрица относительных (относительно центра области измерения)
координат точек измерения
  Ва = матрица N х 3 - матрица компонент поля в точках измерения
2
% ВЫХОД:
% A = матрица 3*N x 9
% B = матрица 3*N x 1
N=size(ras,1);
N3=3*N;
A=zeros(N3,9);
B=zeros(N3,1);
s=1;
for a=1:N
   %формируем столбец В (первая строка)
   B(s,1)=Ba(a,1);
   %формируем матрицу А (первая строка)
   A(s, 1) = 1;
   %A(s,2)=0;
   %A(s,3)=0;
   A(s, 4) = ras(a, 1);
   A(s, 5) = ras(a, 2);
   A(s,6)=ras(a,3);
   %A(s,7)=0;
   %A(s,8)=0;
   %A(s,9)=0;
   s=s+1;
   %формируем столбец В (вторая строка)
   B(s,1)=Ba(a,2);
   %формируем матрицу А (вторая строка)
   %A(s,1)=0;
   A(s, 2) = 1;
   %A(s,3)=0;
   %A(s, 4) = 0;
   A(s, 5) = ras(a, 1);
   %A(s,6)=0;
   A(s,7) = ras(a,2);
   A(s, 8) = ras(a, 3);
   %A(s,9)=0;
   s=s+1;
   %формируем столбец В (третья строка)
   B(s,1)=Ba(a,3);
   %формируем матрицу А (третья строка)
   %A(s,1)=0;
   %A(s, 2) = 0;
   A(s, 3) = 1;
   %A(s,4)=0;
   A(s, 5) = 0;
   A(s, 6) = ras(a, 1);
   %A(s,7)=0;
   A(s, 8) = ras(a, 2);
   A(s,9)=ras(a,3);
   s=s+1;
```

```
179
```

```
return;
function [A,B] = form3d AB2(ras,Ba)
% [A,B] = form3d_AB2(ras,Ba)
8
% Формирование матриц для применения метода наименьших квадратов
8
% ВХОД:
  ras = матрица N x 3 - матрица относительных (относительно центра области измерения)
8
координат точек измерения
8
  Ва = матрица N х 3 - матрица компонент поля в точках измерения
% ВЫХОД:
% А = матрица 3*N x 39
% В = матрица 3*N x 1
N=size(ras,1);
N3=3*N;
A=zeros(N3,39);
B=zeros(N3,1);
s=1;
for a=1:N
   %формируем столбец В (первая строка)
   B(s,1)=Ba(a,1);
   %формируем матрицу А (первая строка)
   A(s, 1) = 1;
   %A(s,2)=0;
   %A(s,3)=0;
   A(s, 4) = ras(a, 1);
   A(s, 5) = ras(a, 2);
   A(s, 6) = ras(a, 3);
   %for t=7:12
   00
       A(s,t)=0;
   %end
   t=13;
   for i=1:3
   for j=1:3
       A(s,t) = ras(a,i) \cdot ras(a,j);
       t=t+1;
   end
   end
   %for t=22:39
   % A(s,t)=0;
   %end
   s=s+1;
   %формируем столбец В (вторая строка)
   B(s,1) = Ba(a,2);
   %формируем матрицу А (вторая строка)
   %A(s,1)=0;
   A(s, 2) = 1;
   %A(s,3)=0;
   %for t=4:6
   00
       A(s,t) = 0;
   %end
   A(s,7)=ras(a,1);
   A(s, 8) = ras(a, 2);
   A(s, 9) = ras(a, 3);
   %for t=10:12
   90
       A(s,t) = 0;
   %end
   %for t=13:21
   00
       A(s,t)=0;
```

end;

%end
```
t=22;
   for i=1:3
   for j=1:3
      A(s,t)=ras(a,i).*ras(a,j);
      t=t+1;
   end
   end
   %for t=31:39
   % A(s,t)=0;
   %end
   s=s+1;
   %формируем столбец В (третья строка)
   B(s,1)=Ba(a,3);
   %формируем матрицу А (третья строка)
   %A(s,1)=0;
   %A(s,2)=0;
   A(s,3)=1;
   %for t=4:9
   8
      A(s,t) = 0;
   %end
   A(s, 10) = ras(a, 1);
   A(s, 11) = ras(a, 2);
   A(s, 12) = ras(a, 3);
   %for t=13:30
   8
      A(s,t)=0;
   %end
   t=31;
   for i=1:3
   for j=1:3
      A(s,t)=ras(a,i).*ras(a,j);
      t=t+1;
   end
   end
   s=s+1;
   end;
return;
function [A,B] = form3d AB2s(ras,Ba)
% [A,B] = form3d AB2s(ras,Ba)
%
% Формирование матриц для применения метода наименьших квадратов
% с учётом симметричности некоторых матриц
2
% ВХОД:
% ras = матрица N x 3 - матрица относительных (относительно центра области измерения)
координат точек измерения
8 Ва = матрица N х 3 - матрица компонент поля в точках измерения
% выход:
  А = матрица 3*N x 19
8
  В = матрица 3*N x 1
2
N=size(ras,1);
N3=3*N;
A=zeros(N3,19);
B=zeros(N3,1);
s=1;
for a=1:N
   %формируем столбец В (первая строка)
   B(s,1)=Ba(a,1);
   %формируем матрицу А (первая строка)
   A(s, 1) = 1;
```

```
181
```

```
%A(s,2)=0;
A(s, 3) = 0;
A(s, 4) = ras(a, 1);
A(s, 5) = ras(a, 2);
A(s, 6) = ras(a, 3);
%A(s,7)=0;
%A(s,8)=0;
%A(s,9)=0;
A(s, 10) = ras(a, 1) \cdot ras(a, 1);
A(s,11)=2.*ras(a,1).*ras(a,2);
A(s, 12) = 2 \cdot ras(a, 1) \cdot ras(a, 3);
A(s, 13) = ras(a, 2) \cdot ras(a, 2);
A(s,14)=2.*ras(a,2).*ras(a,3);
A(s, 15) = ras(a, 3) \cdot ras(a, 3);
%A(s,16)=0;
%A(s,17)=0;
%A(s,18)=0;
%A(s,19)=0;
s=s+1;
%формируем столбец В (вторая строка)
B(s,1)=Ba(a,2);
%формируем матрицу А (вторая строка)
%A(s,1)=0;
A(s, 2) = 1;
A(s, 3) = 0;
%A(s,4)=0;
A(s, 5) = ras(a, 1);
%A(s,6)=0;
A(s,7) = ras(a,2);
A(s, 8) = ras(a, 3);
%A(s,9)=0;
%A(s,10)=0;
A(s, 11) = ras(a, 1) \cdot ras(a, 1);
%A(s,12)=0;
A(s, 13) = 2 \cdot ras(a, 1) \cdot ras(a, 2);
A(s, 14) = 2 \cdot ras(a, 1) \cdot ras(a, 3);
%A(s,15)=0;
A(s, 16) = ras(a, 2) \cdot ras(a, 2);
A(s, 17) = 2 \cdot ras(a, 2) \cdot ras(a, 3);
A(s, 18) = ras(a, 3) \cdot ras(a, 3);
%A(s,19)=0;
s=s+1;
%формируем столбец В (третья строка)
B(s,1)=Ba(a,3);
%формируем матрицу А (третья строка)
%A(s,1)=0;
A(s, 2) = 0;
A(s,3)=1;
%A(s,4)=0;
A(s, 5) = 0;
A(s, 6) = ras(a, 1);
A(s, 7) = 0;
A(s, 8) = ras(a, 2);
A(s, 9) = ras(a, 3);
%A(s,10)=0;
%A(s,11)=0;
A(s,12) = ras(a,1).*ras(a,1);
%A(s,13)=0;
A(s, 14) = 2 \cdot ras(a, 1) \cdot ras(a, 2);
A(s, 15) = 2 \cdot ras(a, 1) \cdot ras(a, 3);
%A(s,16)=0;
A(s, 17) = ras(a, 2) \cdot ras(a, 2);
A(s, 18) = 2 \cdot ras(a, 2) \cdot ras(a, 3);
A(s, 19) = ras(a, 3) \cdot ras(a, 3);
```

```
s=s+1;
```

```
end;
return;
function [A,B] = form3d AB3(ras,Ba)
% [A,B] = form3d AB3(ras,Ba)
2
% Формирование матриц для применения метода наименьших квадратов
2
% ВХОЛ:
8
  ras = матрица N x 3 - матрица относительных (относительно центра области измерения)
координат точек измерения
  Ва = матрица N х 3 - матрица компонент поля в точках измерения
8
% ВЫХОД:
  А = матрица 3*N x 120
8
  В = матрица 3*N x 1
8
N=size(ras,1);
s=1;
for a=1:N
   %формируем столбец В (первая строка)
   B(s,1)=Ba(a,1);
   %формируем матрицу А (первая строка)
   A(s, 1) = 1;
   %A(s,2)=0;
   %A(s,3)=0;
   A(s, 4) = ras(a, 1);
   A(s, 5) = ras(a, 2);
   A(s, 6) = ras(a, 3);
   %for t=7:12
   00
       A(s,t) = 0;
   %end
   t=13;
   for i=1:3
   for j=1:3
      A(s,t) = ras(a,i) \cdot ras(a,j);
      t=t+1;
   end
   end
   %for t=22:39
   % A(s,t)=0;
   %end
   t=40;
   for i=1:3
   for j=1:3
   for k=1:3
      A(s,t) = ras(a,i) \cdot ras(a,j) \cdot ras(a,k);
      t=t+1;
   end
   end
   end
   %for t=67:120
   % A(s,t)=0;
   %end
   s=s+1;
   %формируем столбец В (вторая строка)
   B(s,1)=Ba(a,2);
   %формируем матрицу А (вторая строка)
   %A(s,1)=0;
   A(s, 2) = 1;
   %A(s,3)=0;
   %for t=4:6
   90
      A(s,t)=0;
   %end
```

```
A(s,7) = ras(a,1);
A(s, 8) = ras(a, 2);
A(s, 9) = ras(a, 3);
%for t=10:12
00
    A(s,t) = 0;
%end
%for t=13:21
00
    A(s,t)=0;
%end
t=22;
for i=1:3
for j=1:3
    A(s,t) = ras(a,i) \cdot ras(a,j);
    t=t+1;
end
end
%for t=31:39
% A(s,t)=0;
%end
%for t=40:66
00
    A(s,t) = 0;
%end
t=67;
for i=1:3
for j=1:3
for k=1:3
   A(s,t) = ras(a,i) . * ras(a,j) . * ras(a,k);
    t=t+1;
end
end
end
%for t=94:120
% A(s,t)=0;
%end
s=s+1;
%формируем столбец В (третья строка)
B(s,1)=Ba(a,3);
%формируем матрицу А (третья строка)
%A(s,1)=0;
%A(s,2)=0;
A(s,3)=1;
%for t=4:9
90
     A(s,t)=0;
%end
A(s, 10) = ras(a, 1);
A(s, 11) = ras(a, 2);
A(s, 12) = ras(a, 3);
%for t=13:30
% A(s,t)=0;
%end
t=31;
for i=1:3
for j=1:3
    A(s,t) = ras(a,i) \cdot ras(a,j);
    t=t+1;
end
end
%for t=40:93
00
    A(s,t) = 0;
%end
t=94;
for i=1:3
for j=1:3
for k=1:3
    A(s,t) = ras(a,i) . * ras(a,j) . * ras(a,k);
    t=t+1;
end
end
end
```

```
s=s+1;
   end;
return;
******
function [A,B] = form3d AB3s(ras,Ba)
% [A,B] = form3d AB3s(ras,Ba)
🖇 Формирование матриц для применения метода наименьших квадратов
% с учётом симметричности некоторых матриц
2
% ВХОД:
8
  ras = матрица N x 3 - матрица относительных (относительно центра области измерения)
координат точек измерения
  Ва = матрица N х 3 - матрица компонент поля в точках измерения
00
% ВЫХОД:
% A = матрица 3*N x 34
8
   В = матрица 3*N x 1
N=size(ras,1);
N3=3*N;
A=zeros(N3,34);
B=zeros(N3,1);
s=1;
for a=1:N
   %формируем столбец В (первая строка)
   B(s,1)=Ba(a,1);
   %формируем матрицу А (первая строка)
   A(s, 1) = 1;
   %A(s,2)=0;
   %A(s,3)=0;
   A(s, 4) = ras(a, 1);
   A(s, 5) = ras(a, 2);
   A(s, 6) = ras(a, 3);
   %A(s,7)=0;
   %A(s,8)=0;
   %A(s,9)=0;
   A(s, 10) = ras(a, 1) \cdot ras(a, 1);
   A(s,11)=2.*ras(a,1).*ras(a,2);
   A(s,12)=2.*ras(a,1).*ras(a,3);
   A(s, 13) = ras(a, 2) \cdot ras(a, 2);
   A(s, 14) = 2 \cdot ras(a, 2) \cdot ras(a, 3);
   A(s,15)=
            ras(a,3).*ras(a,3);
   %A(s,16)=0;
   %A(s,17)=0;
   %A(s,18)=0;
   %A(s,19)=0;
   A(s, 20) =
            ras(a,1).*ras(a,1).*ras(a,1);
   A(s,21)=3.*ras(a,1).*ras(a,1).*ras(a,2);
   A(s, 22) = 3 \cdot ras(a, 1) \cdot ras(a, 1) \cdot ras(a, 3);
   A(s,23)=3.*ras(a,1).*ras(a,2).*ras(a,2);
   A(s,24)=6.*ras(a,1).*ras(a,2).*ras(a,3);
   A(s,25)=3.*ras(a,1).*ras(a,3).*ras(a,3);
   A(s,26) = ras(a,2).*ras(a,2).*ras(a,2);
   A(s,27)=3.*ras(a,2).*ras(a,2).*ras(a,3);
   A(s,28)=3.*ras(a,2).*ras(a,3).*ras(a,3);
   A(s,29) = ras(a,3).*ras(a,3).*ras(a,3);
   %A(s,30)=0;
   %A(s,31)=0;
   %A(s,32)=0;
   %A(s,33)=0;
   %A(s,34)=0;
```

```
s=s+1;
```

```
%формируем столбец В (вторая строка)
B(s,1)=Ba(a,2);
%формируем матрицу А (вторая строка)
%A(s,1)=0;
A(s, 2) = 1;
%A(s,3)=0;
%A(s,4)=0;
A(s, 5) = ras(a, 1);
A(s, 6) = 0;
A(s,7) = ras(a,2);
A(s, 8) = ras(a, 3);
%A(s,9)=0;
%A(s,10)=0;
A(s,11) = ras(a,1) \cdot ras(a,1);
%A(s,12)=0;
A(s, 13) = 2 \cdot ras(a, 1) \cdot ras(a, 2);
A(s, 14) = 2 \cdot ras(a, 1) \cdot ras(a, 3);
%A(s,15)=0;
A(s, 16) = ras(a, 2) \cdot ras(a, 2);
A(s, 17) = 2 \cdot ras(a, 2) \cdot ras(a, 3);
A(s, 18) = ras(a, 3) \cdot ras(a, 3);
%A(s,19)=0;
%A(s,20)=0;
A(s,21) = ras(a,1) \cdot ras(a,1) \cdot ras(a,1);
%A(s,22)=0;
A(s, 23) = 3.*ras(a, 1).*ras(a, 1).*ras(a, 2);
A(s,24)=3.*ras(a,1).*ras(a,1).*ras(a,3);
%A(s,25)=0;
A(s,26)=3.*ras(a,1).*ras(a,2).*ras(a,2);
A(s,27)=6.*ras(a,1).*ras(a,2).*ras(a,3);
A(s,28)=3.*ras(a,1).*ras(a,3).*ras(a,3);
%A(s,29)=0;
A(s, 30) = ras(a, 2) \cdot ras(a, 2) \cdot ras(a, 2);
A(s,31)=3.*ras(a,2).*ras(a,2).*ras(a,3);
A(s, 32) = 3.*ras(a, 2).*ras(a, 3).*ras(a, 3);
A(s, 33) = ras(a, 3) \cdot ras(a, 3) \cdot ras(a, 3);
%A(s,34)=0;
s=s+1;
%формируем столбец В (третья строка)
B(s,1)=Ba(a,3);
%формируем матрицу А (третья строка)
%A(s,1)=0;
%A(s,2)=0;
A(s, 3) = 1;
%A(s,4)=0;
A(s, 5) = 0;
A(s, 6) = ras(a, 1);
%A(s,7)=0;
A(s, 8) = ras(a, 2);
A(s, 9) = ras(a, 3);
%A(s,10)=0;
%A(s,11)=0;
A(s, 12) = ras(a, 1) \cdot ras(a, 1);
%A(s,13)=0;
A(s, 14) = 2 \cdot ras(a, 1) \cdot ras(a, 2);
A(s,15)=2.*ras(a,1).*ras(a,3);
%A(s,16)=0;
A(s, 17) = ras(a, 2) \cdot ras(a, 2);
A(s, 18) = 2 \cdot ras(a, 2) \cdot ras(a, 3);
A(s, 19) = ras(a, 3) \cdot ras(a, 3);
A(s, 20) = 0;
%A(s,21)=0;
A(s,22) = ras(a,1).*ras(a,1).*ras(a,1);
A(s, 23) = 0;
A(s, 24) = 3 \cdot ras(a, 1) \cdot ras(a, 1) \cdot ras(a, 2);
```

```
A(s, 25) = 3 \cdot ras(a, 1) \cdot ras(a, 1) \cdot ras(a, 3);
   %A(s,26)=0;
   A(s,27)=3.*ras(a,1).*ras(a,2).*ras(a,2);
   A(s,28)=6.*ras(a,1).*ras(a,2).*ras(a,3);
   A(s,29)=3.*ras(a,1).*ras(a,3).*ras(a,3);
   %A(s,30)=0;
   A(s,31)=
            ras(a,2).*ras(a,2).*ras(a,2);
   A(s,32)=3.*ras(a,2).*ras(a,2).*ras(a,3);
   A(s, 33) = 3 \cdot ras(a, 2) \cdot ras(a, 3) \cdot ras(a, 3);
   A(s, 34) = ras(a, 3) \cdot ras(a, 3) \cdot ras(a, 3);
   s=s+1;
   end;
return;
******
function [A,B] = form3d AB4(ras,Ba)
% [A,B] = form3d AB4(ras,Ba)
% Формирование матриц для применения метода наименьших квадратов
8
% ВХОД:
  ras = матрица N x 3 - матрица относительных (относительно центра области измерения)
2
координат точек измерения
%
   Ва = матрица N х 3 - матрица компонент поля в точках измерения
% ВЫХОД:
% A = матрица 3*N x 363
8
  В = матрица 3*N x 1
N=size(ras,1);
N_{3}=3*N:
A=zeros(N3,363);
B=zeros(N3,1);
s=1;
for a=1:N
   %формируем столбец В (первая строка)
   B(s,1) = Ba(a,1);
   %формируем матрицу А (первая строка)
   A(s, 1) = 1;
   %A(s,2)=0;
   %A(s,3)=0;
   A(s, 4) = ras(a, 1);
   A(s, 5) = ras(a, 2);
   A(s, 6) = ras(a, 3);
   %for t=7:12
   olo
       A(s,t) = 0;
   %end
   t=13;
   for i=1:3
   for j=1:3
       A(s,t) = ras(a,i) \cdot ras(a,j);
       t=t+1;
   end
   end
   %for t=22:39
   % A(s,t)=0;
   %end
   t=40;
   for i=1:3
   for j=1:3
   for k=1:3
       A(s,t) = ras(a,i) \cdot ras(a,j) \cdot ras(a,k);
       t=t+1;
   end
```

```
end
end
%for t=67:120
00
    A(s,t)=0;
%end
t=121;
for i=1:3
for j=1:3
for k=1:3
for 1=1:3
    A(s,t)=ras(a,i).*ras(a,j).*ras(a,k).*ras(a,l);
    t=t+1;
end
end
end
end
%for t=202:363
% A(s,t)=0;
%end
s=s+1;
%формируем столбец В (вторая строка)
B(s,1) = Ba(a,2);
%формируем матрицу А (вторая строка)
%A(s,1)=0;
A(s,2)=1;
%A(s,3)=0;
%for t=4:6
% A(s,t)=0;
%end
A(s,7)=ras(a,1);
A(s, 8) = ras(a, 2);
A(s, 9) = ras(a, 3);
%for t=10:12
00
    A(s,t)=0;
%end
%for t=13:21
00
    A(s,t)=0;
%end
t=22;
for i=1:3
for j=1:3
    A(s,t) = ras(a,i) \cdot ras(a,j);
    t=t+1;
end
end
%for t=31:39
% A(s,t)=0;
%end
%for t=40:66
% A(s,t)=0;
%end
t=67;
for i=1:3
for j=1:3
for k=1:3
   A(s,t) = ras(a,i) \cdot ras(a,j) \cdot ras(a,k);
    t=t+1;
end
end
end
%for t=94:120
% A(s,t)=0;
%end
%for t=121:201
00
     A(s,t) = 0;
%end
t=202;
for i=1:3
for j=1:3
```

```
for k=1:3
    for 1=1:3
       A(s,t) = ras(a,i) . * ras(a,j) . * ras(a,k) . * ras(a,l);
        t=t+1;
   end
   end
   end
   end
    %for t=283:363
   9
        A(s,t) = 0;
   %end
   s=s+1;
   %формируем столбец В (третья строка)
   B(s,1)=Ba(a,3);
   %формируем матрицу А (третья строка)
   %A(s, 1) = 0;
   %A(s,2)=0;
   A(s, 3) = 1;
   %for t=4:9
   90
        A(s,t)=0;
   %end
   A(s,10)=ras(a,1);
   A(s,11)=ras(a,2);
   A(s, 12) = ras(a, 3);
   %for t=13:30
   010
        A(s,t)=0;
   %end
   t=31;
   for i=1:3
    for j=1:3
       A(s,t) = ras(a,i) \cdot ras(a,j);
        t=t+1;
   end
   end
   %for t=40:93
   % A(s,t)=0;
   %end
   t=94;
   for i=1:3
   for j=1:3
    for k=1:3
       A(s,t) = ras(a,i) \cdot ras(a,j) \cdot ras(a,k);
        t=t+1;
   end
   end
   end
   %for t=121:282
   00
        A(s,t) = 0;
   %end
   t=283;
   for i=1:3
   for j=1:3
   for k=1:3
    for 1=1:3
       A(s,t) = ras(a,i) . * ras(a,j) . * ras(a,k) . * ras(a,l);
        t=t+1;
   end
   end
   end
   end
   s=s+1;
   end;
return;
```

ПЗ. Исходный код функции для решения ОЗД-N (MATLAB)

Листинг ПЗ.1

```
function [dipoleX,dipoleM,iters] =
find dipole N(ra,Ba,approx,equations,zpmethod,iters max)
2
% Функция решает обратную задачу для N слабовзаимодействующих диполей в 3D слу-
чае
% Число областей измерения должно совпадать с числом диполей N
00
% ВХОД:
% ra
             = Nx{Sx3} массив матриц - координаты точек измерения
%
                       (S - число точек измерения в каждой области)
8
  Ba
            = Nx{Sx3} массив матриц - значение поля в точках измерения
00
                       (S - число точек измерения в каждой области)
  approx
00
            = строка - метод или порядок аппроксимации поля,
8
           используемый при вычислении производных поля по данным измерений.
00
               Возможные значения:
00
               'matrix'- решение матричной системы уравнений, линейное
%
                        приближение поля
%
               'mnk1' - MHK1
               'mnk2' - MHK2
00
               'mnk3' - MHK3
8
               'mnk4' - MHK4
%
               'mnk1s' - МНК1 с учётом симметричности некоторых тензоров
%
               'mnk2s' - МНК2 с учётом симметричности некоторых тензоров
%
               'mnk3s' - МНК3 с учётом симметричности некоторых тензоров
9
  equations = строка - система уравнений, используемая при нахождении R0.
9
8
               Возможные значения:
8
               '0a' - B0<->Ba
               '01a' - B0<->Ba,T (только для 'mnk2', 'mnk3'...)
'012a' - B0<->Ba,T,Q (только для 'mnk3', 'mnk4'...)
8
2
               '01'
                     - B0<->T
2
               '01-12' - B0<->T,T<->Q
2
               '12'
                      - T<->0
9
  zpmethod = строка - способ учета особенности в "нулевой" плоскости
8
8
               Возможные значения:
               'none' - не учитывается
8
               'omega' - используется критерий оmega (определение
8
                         попадания в "нулевую" плоскость
8
               'g' - используется критерий g (выбор лучшего решения из двух)
8
   iters max = 1x1 - максимальное число итераций, должно быть > 1
00
% ВЫХОД:
8
   dipoleX
             = Nx{1x3} массив векторов - найденные положения диполей
90
   dipoleM
             = Nx{1x3} массив векторов - найденные магнитные моменты диполей
90
   iters
             = число
                                - количество потребовавшихся итераций
   dipoleXs = iters x {Nx{1x3}} - значения dipoleX, найденные на шагах
%
                                  итерации
9
90
   dipoleMs = iters x {Nx{1x3}} - значения dipoleM, найденные на шагах
00
                                  итерации
8
% ПРИМЕЧАНИЕ: {XXX} - массивы ячеек
N = size(ra, 1);
S = size(ra{1}, 2);
N2 = size(Ba, 1);
S2 = size(Ba{1}, 2);
if iters max <= 0
```

```
error('invalid value of iters max');
end;
if N < 1
    error('ra and Ba must have N>=1 rows');
end:
if N~=N2
    error('ra and Ba must have equal sizes');
end;
if S~=3 || S2~=3
    error('ra and Ba must have 3 columns');
end:
Ba i
       = Ba;
dipoleX i = cell(N,1); % (i)
dipoleM i = cell(N,1);
dipoleXs = cell(iters max,1); %берём с запасом - потом обрежем
dipoleMs = cell(iters max,1); %берём с запасом - потом обрежем
iters = 1; %счетчик итераций
while (iters <= iters max)</pre>
    %находим параметры диполей
    for i=1:N
       [dipoleX i{i},dipoleM i{i}] = find dipole(
ra{i},Ba i{i},approx,equations,zpmethod );
    end;
    %Заполняем массивы dipoleXs, dipoleMs
    dipoleXs{iters} = dipoleX i;
    dipoleMs{iters} = dipoleM_i;
    %уточняем поля, создаваемые диполями по-отдельности
   Ba i = Ba;
    for i=1:N
    for j=1:N
        8для і-ой области измерения (і-го диполя) вычисляем вклады полей (всех
прочих ј-ых диполей)
        8и вычитаем их из измеренных значений, полученных в физическом экспери-
менте
       «В итоге должны остаться только 'индивидуальные' поля диполей
       if i~=j
           Ba i{i} = Ba i{i} - field dipole B( dipoleX i{j}, dipoleM i{j}, ra{i}
);
        end;
    end;
    end;
    %инкремент счётчика итераций
    iters = iters + 1;
end;
%Получили какой-то результат
dipoleX = dipoleX i;
dipoleM = dipoleM i;
iters = iters - 1_{i}
%Обрезаем массивы
%dipoleXs = dipoleXs{1:iters};
%dipoleMs = dipoleMs{1:iters};
return;
```

П4. Метод решения обратной задачи для точечного магнитного диполя по данным измерения одной компоненты индукции магнитного поля

Поле точечного магнитного диполя:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3R(mR) - R^2m}{R^5} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3R_k(m_jR_j) - R^2m_k}{R^5}$$
(II4.1)

Разложение (П4.1) для точки измерения с номером *а* в ряд Тейлора возле точки **R**₀ имеет вид:

$$B_{ak} \equiv B_k \left(\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{r}_a' \right) = B_k \left(\boldsymbol{R}_0 \right) + \frac{\partial B_k \left(\boldsymbol{R}_a \right)}{\partial R_{ai}} \bigg|_{\boldsymbol{R}_a = \boldsymbol{R}_0} \cdot r_{ai}' + \frac{\partial^2 B_k \left(\boldsymbol{R}_a \right)}{\partial R_{ai} \partial R_{aj}} \bigg|_{\boldsymbol{R}_a = \boldsymbol{R}_0} \cdot r_{ai}' r_{aj}' + \dots$$
(II4.2)

Здесь:

$$B_{k}\left(\boldsymbol{R}\right) = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \cdot \frac{3R_{k}\left(m_{j}R_{j}\right) - R^{2}m_{k}}{R^{5}}$$

$$\frac{\partial B_{k}\left(\boldsymbol{R}\right)}{\partial R_{i}} = \frac{\partial}{\partial R_{i}} \left[\frac{\mu_{0}}{4\pi} \cdot \frac{3R_{k}\left(m_{j}R_{j}\right) - R^{2}m_{k}}{R^{5}}\right] =$$

$$(\Pi 4.3)$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{3}{R^5}\left[\left(m_jR_j\right)\delta_{ik}+R_km_i+R_im_k-5\left(m_jR_j\right)R_kR_i\frac{1}{R^2}\right]$$
(II4.4)

$$\frac{\partial B_{k}(\mathbf{R})}{\partial R_{i}\partial R_{j}} = \frac{\partial}{\partial R_{j}} \left[\frac{\partial B_{k}(\mathbf{R})}{\partial R_{i}} \right] =$$

$$= \frac{3\mu_{0}}{4\pi} \left[\frac{1}{R^{5}} \left\{ m_{j}\delta_{ik} + m_{i}\delta_{kj} + m_{k}\delta_{ij} \right\} - \frac{5}{R^{7}} \left\{ R_{j}R_{k}m_{i} + R_{i}R_{j}m_{k} + R_{i}R_{k}m_{j} \right\} - \frac{5(m_{i}R_{i})}{R^{7}} \left\{ R_{j}\delta_{ik} + R_{i}\delta_{kj} + R_{k}\delta_{ij} \right\} + \frac{35(m_{i}R_{i})}{R^{9}} R_{i}R_{j}R_{k} \right]$$
(II4.5)

Предположим, что для поля диполя справедливо следующее квадратичное приближение:

$$B_{ak} = B_k + T_{ki} \cdot r'_{ai} + Q_{kij} \cdot r'_{ai}r'_{aj} \tag{\Pi4.6}$$

где B_k , T_{ki} и Q_{kij} не зависят от номера точки измерения a.

Сравнивая (П4.2) и (П4.6) получим:

$$B_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3R_k \left(m_j R_j\right) - R^2 m_k}{R^5} \tag{II4.7}$$

$$T_{ki} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3}{R^5} \left[\left(m_j R_j \right) \delta_{ik} + R_k m_i + R_i m_k - 5 \left(m_j R_j \right) R_k R_i \frac{1}{R^2} \right]$$
(II4.8)
$$Q_{kij} = \frac{3\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{R^5} \left\{ m_j \delta_{ik} + m_i \delta_{kj} + m_k \delta_{ij} \right\} - \frac{5}{R^7} \left\{ R_j R_k m_i + R_i R_j m_k + R_i R_k m_j \right\} - \frac{5 \left(m_i R_i \right)}{R^7} \left\{ R_j \delta_{ik} + R_i \delta_{kj} + R_k \delta_{ij} \right\} + \frac{35 \left(m_i R_i \right)}{R^9} R_i R_j R_k \right]$$
(II4.9)

Зафиксируем индекс k = z. Это соответствует тому, что мы измеряем только одну компоненту поля B_z . Выражения (П4.6) - (П4.9) примут вид:

$$B_{az} = B_z + T_{zi} \cdot r'_{ai} + Q_{zij} \cdot r'_{ai} r'_{aj}$$
(II4.10)

$$B_{z} = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \cdot \frac{3R_{z} \left(m_{j} R_{j}\right) - R^{2} m_{z}}{R^{5}}$$
(II4.11)

$$T_{zi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3}{R^5} \left[\left(m_j R_j \right) \delta_{iz} + R_z m_i + R_i m_z - 5 \left(m_j R_j \right) R_z R_i \frac{1}{R^2} \right]$$
(II4.12)

$$Q_{zij} = \frac{3\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{R^5} \left\{ m_j \delta_{iz} + m_i \delta_{zj} + m_z \delta_{ij} \right\} - \frac{5}{R^7} \left\{ R_j R_z m_i + R_i R_j m_z + R_i R_z m_j \right\} - \frac{5(m_l R_l)}{R^7} \left\{ R_j \delta_{iz} + R_i \delta_{zj} + R_z \delta_{ij} \right\} + \frac{35(m_l R_l)}{R^9} R_i R_j R_z \right]$$
(II4.13)

Умножим Q_{zij} на R_j :

$$Q_{zij}R_{j} = \frac{3\mu_{0}}{4\pi} \left[\frac{1}{R^{5}} \left\{ \left(m_{j}R_{j} \right) \delta_{iz} + m_{i}R_{z} + m_{z}R_{i} \right\} - \frac{5}{R^{7}} \left\{ R^{2}m_{i}R_{z} + R^{2}m_{z}R_{i} + \left(m_{j}R_{j} \right) R_{i}R_{z} \right\} - \frac{5\left(m_{i}R_{i}\right)}{R^{7}} \left\{ R^{2}\delta_{iz} + R_{i}R_{z} + R_{i}R_{z} \right\} + \frac{35\left(m_{i}R_{i}\right)}{R^{9}} R^{2}R_{i}R_{z} \right] =$$

$$= -4\frac{\mu_{0}}{4\pi} \cdot \frac{3}{R^{5}} \left[\left(m_{i}R_{i} \right) \delta_{iz} + m_{z}R_{i} + m_{i}R_{z} - 5\left(m_{i}R_{i}\right) R_{i}R_{z} \frac{1}{R^{2}} \right]$$
(II4.14)

Сравнивая (П4.14) и (П4.12), получаем:

$$Q_{zij}R_j = -4T_{zi} \tag{\Pi4.15}$$

Отсюда можно найти **R**. Для этого умножим (П4.15) слева на Q_{zli}^{-1} :

$$Q_{zli}^{-1}Q_{zlj}R_{j} = -4Q_{zli}^{-1}T_{zi}$$

$$R_{l} = -4Q_{zli}^{-1}T_{zi}$$
(II4.16)

Таким образом, мы нашли положение диполя:

$$X_{0i} = \left\langle r \right\rangle_i - R_{0i} \tag{II4.17}$$

Здесь $\langle r \rangle_i$ - положение центра области измерения:

$$r_{ai} = \langle r \rangle_i + r'_{ai} \tag{II4.18}$$

Умножим (П4.12) на *R*_i:

$$T_{zi}R_{i} = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \cdot \frac{3}{R^{5}} \left[\left(m_{j}R_{j} \right) R_{z} + \left(m_{i}R_{i} \right) R_{z} + R^{2}m_{z} - 5\left(m_{j}R_{j} \right) R_{z}R^{2} \frac{1}{R^{2}} \right] = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \cdot \frac{-3}{R^{5}} \left[3\left(m_{j}R_{j} \right) R_{z} - R^{2}m_{z} \right]$$
(II4.19)

Сравнивая (П4.19) и (П4.11), получаем:

$$T_{zi}R_i = -3B_z \tag{\Pi4.20}$$

Считая известными R_i , B_z , T_{zi} и Q_{zli} , найдем магнитный момент m_i диполя.

Согласно (П4.12):

$$T_{zz} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3}{R^5} \left[\left(m_j R_j \right) \delta_{zz} + R_z m_z + R_z m_z - 5 \left(m_j R_j \right) R_z R_z \frac{1}{R^2} \right] =$$

= $\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3}{R^5} \left[\left(m_j R_j \right) + 2R_z m_z - 5 \left(m_j R_j \right) R_z^2 \frac{1}{R^2} \right]$ (II4.21)

Из (П4.11):

$$\frac{4\pi R^5 B_z}{\mu_0} = 3R_z \left(m_j R_j\right) - R^2 m_z$$

откуда

$$m_{z} = \frac{3R_{z}(m_{j}R_{j})}{R^{2}} - \frac{4\pi R^{3}B_{z}}{\mu_{0}}$$
(II4.22)

Подставим (П4.22) в (П4.21):

$$T_{zz} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3}{R^5} \left[\left(m_j R_j \right) + 2R_z \left\{ \frac{3R_z \left(m_j R_j \right)}{R^2} - \frac{4\pi R^3 B_z}{\mu_0} \right\} - 5 \left(m_j R_j \right) R_z^2 \frac{1}{R^2} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3}{R^5} \left[\left(m_j R_j \right) + \left(m_j R_j \right) R_z^2 \frac{1}{R^2} - \frac{8\pi}{\mu_0} R^3 B_z R_z \right]$$
(II4.23)

Выразим (*m_jR_j*) из (П4.23):

$$\frac{4\pi R^{5}T_{zz}}{3\mu_{0}} = \left(m_{j}R_{j}\right) \cdot \left(1 + \frac{R_{z}^{2}}{R^{2}}\right) - \frac{8\pi R^{3}B_{z}R_{z}}{\mu_{0}}$$

$$\left(m_{j}R_{j}\right) = \frac{4\pi}{3\mu_{0}} \cdot \frac{R^{5}}{R^{2} + R_{z}^{2}} \cdot \left[R^{2}T_{zz} + 6B_{z}R_{z}\right]$$
(II4.24)

Подставим (П4.24) в (П4.22):

$$m_{z} = \frac{3R_{z}}{R^{2}} \cdot \frac{4\pi}{3\mu_{0}} \cdot \frac{R^{5}}{R^{2} + R_{z}^{2}} \cdot \left[R^{2}T_{zz} + 6B_{z}R_{z}\right] - \frac{4\pi R^{3}B_{z}}{\mu_{0}} =$$

$$= \frac{4\pi}{\mu_{0}}R^{3} \cdot \left\{\frac{R_{z}}{R^{2} + R_{z}^{2}} \cdot \left[R^{2}T_{zz} + 6B_{z}R_{z}\right] - B_{z}\right\}$$
(II4.25)

Из (П4.12) выразим *m*_i:

$$\frac{4\pi R^{5}T_{zi}}{3\mu_{0}} = R_{z}m_{i} + R_{i}m_{z} + (m_{j}R_{j})\delta_{iz} - 5(m_{j}R_{j})R_{z}R_{i}\frac{1}{R^{2}}$$

откуда

$$m_{i} = \frac{1}{R_{z}} \cdot \left\{ \frac{4\pi R^{5} T_{zi}}{3\mu_{0}} - \left(m_{j} R_{j}\right) \left[\delta_{zi} - 5 \frac{R_{i} R_{z}}{R^{2}} \right] - R_{i} m_{z} \right\}$$
(II4.26)

Подставим (П4.24) и (П4.25) в (П4.26):

$$m_{i} = \frac{1}{R_{z}} \cdot \left\{ \frac{4\pi R^{5} T_{zi}}{3\mu_{0}} - \frac{4\pi}{3\mu_{0}} \cdot \frac{R^{5}}{R^{2} + R_{z}^{2}} \cdot \left[R^{2} T_{zz} + 6B_{z} R_{z} \right] \cdot \left[\delta_{zi} - 5 \frac{R_{i} R_{z}}{R^{2}} \right] - R_{i} \frac{4\pi}{\mu_{0}} R^{3} \cdot \left(\frac{R_{z}}{R^{2} + R_{z}^{2}} \cdot \left[R^{2} T_{zz} + 6B_{z} R_{z} \right] - B_{z} \right) \right\}$$

раскрывая скобки и объединяя слагаемые, получим

$$m_{i} = \frac{4\pi}{3\mu_{0}} \cdot \frac{R^{5}}{R_{z}} \left\{ T_{zi} + \frac{1}{R^{2} \left(R^{2} + R_{z}^{2}\right)} \cdot \left[2R_{i}R_{z}R^{2}T_{zz} + 15R_{i}R_{z}^{2}B_{z} + 3R_{i}B_{z}R^{2} - R^{2}\delta_{zi} \left(R^{2}T_{zz} + 6B_{z}R_{z}\right) \right] \right\}$$
(II4.27)

Несколько слов о том, как найти B_k , T_{ki} и Q_{kij} . Запишем (П4.6) ещё раз:

$$B_{ak} = B_k + T_{ki} \cdot r'_{ai} + Q_{kij} \cdot r'_{ai} r'_{aj}$$
(II4.6)

Здесь:

$$r'_{ai} = r_{ai} - \langle r \rangle_i, \ a = 1, 2, \dots, N$$
 (II4.28)

r_{ai} - координаты точек измерения в лабораторной системе координат,

N - количество точек измерения.

$$\left\langle r\right\rangle_{i} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{a=1}^{N} r_{ai} \tag{\Pi4.29}$$

Найти *B_k*, *T_{ki}* и *Q_{kij}* можно по данным измерения поля в достаточном количестве точек с помощью метода наименьших квадратов.

П5. Метод решения ОЗД по данным измерения скалярного потенциала магнитного поля

Скалярный потенциал точечного магнитного диполя:

$$\psi = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{(\boldsymbol{m}\boldsymbol{R})}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{(\boldsymbol{m}_k \boldsymbol{R}_k)}{R^3} \tag{H5.1}$$

Разложение (П5.1) для точки измерения с номером *а* в ряд Тейлора возле точки **R**₀ имеет вид:

$$\psi_{a} \equiv \psi(\boldsymbol{R}_{0} + \boldsymbol{r}_{a}') = \psi(\boldsymbol{R}_{0}) + \frac{\partial \psi(\boldsymbol{R}_{a})}{\partial R_{ai}} \bigg|_{\boldsymbol{R}_{a} = \boldsymbol{R}_{0}} \cdot \boldsymbol{r}_{ai}' + \frac{\partial^{2} \psi(\boldsymbol{R}_{a})}{\partial R_{ai} \partial R_{aj}} \bigg|_{\boldsymbol{R}_{a} = \boldsymbol{R}_{0}} \cdot \boldsymbol{r}_{ai}' \boldsymbol{r}_{aj}' + \dots$$
(II5.2)

Здесь:

$$\psi(\mathbf{R}_{0}) = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \cdot \frac{(m_{k}R_{0k})}{R_{0}^{3}},$$

$$\frac{\partial\psi(\mathbf{R}_{a})}{\partial R_{ai}} = \frac{\partial}{\partial R_{ai}} \left(\frac{\mu_{0}}{4\pi} \cdot \frac{(m_{k}R_{ak})}{R_{a}^{3}}\right) = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \left\{\frac{m_{i}}{R_{a}^{3}} - 3\frac{(m_{k}R_{ak})R_{ai}}{R_{a}^{5}}\right\},$$

$$\frac{\partial^{2}\psi(\mathbf{R}_{a})}{\partial R_{ai}\partial R_{aj}} = \frac{\partial}{\partial R_{ai}} \left[\frac{\partial\psi(\mathbf{R}_{a})}{\partial R_{aj}}\right] = \frac{\partial}{\partial R_{ai}} \left[\frac{\mu_{0}}{4\pi} \left\{\frac{m_{j}}{R_{a}^{3}} - 3\frac{(m_{k}R_{ak})R_{aj}}{R_{a}^{5}}\right\}\right] =$$

$$= \frac{\mu_{0}}{4\pi} \left[-3\frac{m_{j}R_{ai}}{R_{a}^{5}} - 3\frac{m_{i}R_{aj}}{R_{a}^{5}} - 3\frac{(m_{k}R_{ak})\partial_{ij}}{R_{a}^{5}} + 15\frac{(m_{k}R_{ak})R_{ai}R_{aj}}{R_{a}^{7}}\right]$$

Предположим, что поле скалярного потенциала поля магнитного диполя представимо в виде квадратичного приближения:

$$\psi_a = \psi_0 + p_i \cdot r'_{ai} + q_{ij} \cdot r'_{ai} r'_{aj}, \qquad (\Pi 5.3)$$

где ψ_0 , p_i и q_{ij} не зависят от номера точки измерения a.

Сравнивая (П5.2) и (П5.3) получаем:

$$\psi_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{(m_k R_{0k})}{R_0^3} \tag{\Pi5.4}$$

$$p_{i} = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \left\{ \frac{m_{i}}{R_{0}^{3}} - 3 \frac{(m_{k}R_{0k})R_{0i}}{R_{0}^{5}} \right\}$$
(II5.5)

$$q_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-3\frac{m_j R_{0i}}{R_0^5} - 3\frac{m_i R_{0j}}{R_0^5} - 3\frac{(m_k R_{0k})\delta_{ij}}{R_0^5} + 15\frac{(m_k R_{0k})R_{0i}R_{0j}}{R_0^7} \right]$$
(II5.6)

Умножим (П5.6) на R_{0j} :

$$q_{ij}R_{0j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-3\frac{\left(m_jR_{0j}\right)R_{0i}}{R_0^5} - 3\frac{m_iR_0^2}{R_0^5} - 3\frac{\left(m_kR_{0k}\right)R_{0i}}{R_0^5} + 15\frac{\left(m_kR_{0k}\right)R_{0i}}{R_0^5} \right] = 9\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\left(m_kR_{0k}\right)R_{0i}}{R_0^5} - 3\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m_i}{R_0^3} = -3\left\{\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m_i}{R_0^3} - 3\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\left(m_kR_{0k}\right)R_{0i}}{R_0^5}\right\} = -3p_i$$

Запишем ещё раз:

$$q_{ij}R_{oj} = -3p_i \tag{\Pi5.7}$$

Умножив (П5.7) слева на q_{li}^{-1} , получим:

$$R_{ol} = -3q_{li}^{-1}p_i \tag{\Pi5.8}$$

Таким образом, мы нашли положение диполя:

$$X_{0i} = \langle r \rangle_i - R_{0i} \tag{\Pi5.9}$$

Здесь $\langle r \rangle_i$ - положение центра области измерения:

$$r_{ai} = \left\langle r \right\rangle_i + r'_{ai} \tag{\Pi5.10}$$

Из (П5.5) определяем магнитный момент *m*_i диполя:

$$m_i = \frac{4\pi}{\mu_0} R_0^3 p_i + 3 \frac{(m_k R_{0k}) R_{0i}}{R_0^2} \tag{\Pi5.11}$$

Несколько слов о том, как найти ψ_0 , p_i и q_{ij} . Запишем (П5.3) ещё раз:

$$\psi_a = \psi_0 + p_i \cdot r'_{ai} + q_{ij} \cdot r'_{ai} r'_{aj} \tag{\Pi5.12}$$

Здесь:

$$r'_{ai} = r_{ai} - \langle r \rangle_i, \ a = 1, 2, \dots, N$$
 (II5.13)

r_{ai} - координаты точек измерения в лабораторной системе координат,

N - количество точек измерения.

$$\left\langle r\right\rangle_{i} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{a=1}^{N} r_{ai} \tag{\Pi5.14}$$

Найти ψ_0 , p_i и q_{ij} можно по данным измерения поля ψ в достаточном количестве точек с помощью метода наименьших квадратов.

П6. Результаты численного эксперимента (раздел 4.4.2)

Таблица П6.1. Максимальные значения относительных погрешностей решения ОЗД

Метод	0°	Max	Max	Max	90°
		0÷5°	5÷10°	10÷90°	
Matrix/Mnk1 01 g	0.3225	9.1456	3.7258	1.8672	0.5484
Matrix/Mnk1 01 none	>100	>100	3.7258	1.8672	0.5484
Matrix/Mnk1 01 omega 1	0.3225	17.9153	37.9655	>100	>100
Matrix/Mnk1 01 omega 10 ⁻¹	0.3225	17.9153	37.9655	>100	>100
Matrix/Mnk1 01 omega 10 ⁻²	0.3225	17.9153	37.9655	>100	>100
Matrix/Mnk1 01 omega 10 ⁻³	0.3225	10.6094	3.7258	1.8672	0.5484
Matrix/Mnk1 01 omega 10 ⁻⁴	0.3225	85.3762	3.7258	1.8672	0.5484
Matrix/Mnk1 01 omega 10 ⁻⁵	>100	>100	3.7258	1.8672	0.5484
Mnk1 0a none	89.0891	89.0891	3.7026	1.8915	0.5559
Mnk1 01a none	1.1110	1.1110	0.0324	0.0172	0.0062
Mnk1s 01 g	0.1790	4.7191	1.3615	0.7144	0.3233
Mnk1s 01 none	>100	>100	1.3615	0.7144	0.3233
Mnk1s 0a none	89.0891	89.0891	3.7026	1.8915	0.5559
Mnk1s 01a none	1.1276	1.1276	0.0324	0.0172	0.0062
Mnk2 01 g	0.0059	0.9411	0.0391	0.0199	0.0069
Mnk2 01 none	>100	>100	0.0391	0.0199	0.0069
Mnk2 01 omega 1	0.0059	17.8268	37.7893	>100	>100
Mnk2 01 omega 10 ⁻¹	0.0059	17.8268	37.7893	>100	>100
Mnk2 01 omega 10 ⁻²	0.0059	17.8268	37.7893	>100	>100
Mnk2 01 omega 10 ⁻³	0.0059	10.5537	0.0391	0.0199	0.0069
Mnk2 01 omega 10 ⁻⁴	0.0059	1.4331	0.0391	0.0199	0.0069
Mnk2 01 omega 10 ⁻⁵	0.0059	14.8066	0.0391	0.0199	0.0069
Mnk2 01-12 none	0.7217	0.7217	0.6572	0.5974	0.4680
Mnk2 0a none	88.7027	88.7027	3.7026	1.8877	0.5562
Mnk2 01a none	1.7024	1.7024	0.0355	0.0185	0.0081
Mnk2s 01 g	0.0034	0.4634	0.0115	0.0065	0.0047
Mnk2s 01-12 none	0.7170	0.7171	0.6328	0.5242	0.4307
Mnk2s 0a none	88.6171	88.6171	3.7026	1.8879	0.5563
Mnk2s 01a none	1.6859	1.6859	0.0352	0.0186	0.0081
Mnk3 01 g	0.000232	0.3715	0.0083	0.0046	0.0026
Mnk3 01 omega 1	0.000232	17.8255	37.7863	>100	>100
Mnk3 01 omega 10 ⁻¹	0.000232	17.8255	37.7863	>100	>100
Mnk3 01 omega 10 ⁻²	0.000232	17.8255	37.7863	>100	>100
Mnk3 01 omega 10 ⁻³	0.000232	10.5530	0.0083	0.0046	0.0026
Mnk3 01 omega 10 ⁻⁴	0.000232	1.0473	0.0083	0.0046	0.0026
Mnk3 01 omega 10 ⁻⁵	0.000232	3.7010	0.0083	0.0046	0.0026
Mnk3 01-12 none	0.0136	0.0138	0.0133	0.0114	0.0074
Mnk3 0a none	88.5900	88.5900	3.7025	1.8879	0.5563
Mnk3 01a none	1.7156	1.7156	0.0354	0.0186	0.0080
Mnk3 012a none	0.0192	0.0192	0.000516	0.000247	0.00009
Mnk3s 01 g	0.0067	0.9274	0.0435	0.0238	0.0134
Mnk3s 01-12 none	0.2401	0.2793	0.2781	0.2781	0.2180
Mnk3s 0a none	88.6130	88.6130	3.7025	1.8878	0.5563
Mnk3s 01a none	1.7318	1.7331	0.0353	0.0186	0.0080
Mnk3s 012a none	0.0624	0.0655	0.000506	0.000288	0.000106

для области cartrndball. Приведены значения Max(relX), %

Таблица П6.2. Максимальные значения относительных погрешностей решения ОЗД для области cartrndball. Приведены значения Max(relM), %

P					
Метод	0°	Max	Max	Max	90°
		0÷5°	5÷10°	10÷90°	
Matrix/Mnk1 01 g	0.9589	5.4302	1.1266	1.6490	1.6466
Matrix/Mnk1 01 none	>100	>100	1.1266	1.6490	1.6466
Matrix/Mnk1 01 omega 1	0.9589	29.8734	79.1573	>100	>100
Matrix/Mnk1 01 omega 10 ⁻¹	0.9589	29.8734	79.1573	>100	>100
Matrix/Mnk1 01 omega 10 ⁻²	0.9589	29.8734	79.1573	>100	>100
Matrix/Mnk1 01 omega 10 ⁻³	0.9589	16.7225	1.1266	1.6490	1.6466
Matrix/Mnk1 01 omega 10 ⁻⁴	0.9589	128.0245	1.1266	1.6490	1.6466
Matrix/Mnk1 01 omega 10 ⁻⁵	>100	>100	1.1266	1.6490	1.6466
Mnk1 0a none	>100	>100	1.1623	1.6676	1.6674
Mnk1 01a none	0.0193	0.0193	0.0118	0.0176	0.0173
Mnk1s 01 g	0.4240	5.3006	0.5651	0.9744	0.9744
Mnk1s 01 none	>100	>100	0.5651	0.9744	0.9744
Mnk1s 0a none	>100	>100	1.1623	1.6676	1.6674
Mnk1s 01a none	0.0195	0.0195	0.0118	0.0176	0.0174
Mnk2 01 g	0.0173	1.0476	0.0135	0.0204	0.0203
Mnk2 01 none	>100	>100	0.0135	0.0204	0.0203
Mnk2 01 omega 1	0.0173	29.3442	78.0100	>100	>100
Mnk2 01 omega 10 ⁻¹	0.0173	29.3442	78.0100	>100	>100
Mnk2 01 omega 10 ⁻²	0.0173	29.3442	78.0100	>100	>100
Mnk2 01 omega 10 ⁻³	0.0173	16.3941	0.0135	0.0204	0.0203
Mnk2 01 omega 10 ⁻⁴	0.0173	1.5720	0.0135	0.0204	0.0203
Mnk2 01 omega 10 ⁻⁵	0.0173	3.3136	0.0135	0.0204	0.0203
Mnk2 01-12 none	1.1622	1.1622	1.1527	1.4325	1.4121
Mnk2 0a none	>100	>100	1.1655	1.6683	1.6683
Mnk2 01a none	0.0426	0.0426	0.0174	0.0230	0.0222
Mnk2s 01 g	0.0102	0.5238	0.0077	0.0130	0.0130
Mnk2s 01-12 none	0.9440	0.9562	1.0516	1.3140	1.2996
Mnk2s 0a none	>100	>100	1.1654	1.6684	1.6684
Mnk2s 01a none	0.0417	0.0417	0.0173	0.0230	0.0221
Mnk3 01 g	0.00067	0.3665	0.0091	0.0102	0.0102
Mnk3 01 omega 1	0.00067	29.3366	77.9902	>100	>100
Mnk3 01 omega 10 ⁻¹	0.00067	29.3366	77.9902	>100	>100
Mnk3 01 omega 10 ⁻²	0.00067	29.3366	77.9902	>100	>100
Mnk3 01 omega 10 ⁻³	0.00067	16.3897	0.0091	0.0102	0.0102
Mnk3 01 omega 10 ⁻⁴	0.00067	1.5715	0.0091	0.0102	0.0102
Mnk3 01 omega 10 ⁻⁵	0.00067	0.1999	0.0091	0.0102	0.0102
Mnk3 01-12 none	0.0143	0.0147	0.0149	0.0208	0.0202
Mnk3 0a none	>100	>100	1.1654	1.6684	1.6684
Mnk3 01a none	0.0431	0.0431	0.0172	0.0228	0.0221
Mnk3 012a none	0.0023	0.0023	0.0022	0.0026	0.0026
Mnk3s 01 g	0.0118	1.0475	0.0268	0.0447	0.0419
Mnk3s 01-12 none	0.2979	0.3176	0.2941	0.6518	0.6518
Mnk3s 0a none	>100	>100	1.1654	1.6684	1.6684
Mnk3s 01a none	0.0439	0.0440	0.0172	0.0228	0.0220
Mnk3s 012a none	0.0023	0.0023	0.0023	0.0026	0.0026

П7. Результаты численного эксперимента (раздел 4.4.2)

	rX ₁₀ , %			$[\ln(rX_{1000})-\ln(rX_{10})] /$		
				[In(1000)-In(10)]		
Метод	0°	45°	90°	00	45°	90°
Mnk1 01 g	3.9866	6.7856	6.0414	-1.0210	-1.0117	-1.0131
Mnk1s 01 g	1.6858	3.6862	3.4224	-0.9991	-1.0130	-1.0119
Mnk1 01a none	11.6095	0.7217	0.7115	-1.0057	-2.0011	-2.0308
Mnk1s 01a none	11.7209	0.7180	0.7128	-1.0053	-2.0000	-2.0311
Mnk2 01 g	0.5560	0.7458	0.6947	-2.0484	-1.9960	-2.0085
Mnk2 01-12 none	8.4005	5.8124	5.4097	-1.0102	-1.0416	-1.0378
Mnk2 01a none	15.8346	0.9157	0.9188	-0.9948	-1.9988	-2.0236
Mnk2s 01 g	0.3070	0.4394	0.3861	-2.0105	-2.0010	-2.0009
Mnk2s 01-12 none	8.3800	5.8224	5.5507	-1.0057	-1.0348	-1.0347
Mnk2s 01a none	17.4351	0.9320	0.9551	-1.0027	-2.0028	-2.0318
Mnk3 01 g	0.1872	0.5659	0.5230	-2.9893	-2.1966	-2.1882
Mnk3 01-12 none	1.2817	0.9407	0.8990	-2.0197	-2.0651	-2.0636
Mnk3 01a none	16.5440	0.9025	0.9198	-0.9951	-1.9957	-2.0237
Mnk3 012a none	2.3463	0.1529	0.1409	-2.0049	-3.0077	-3.0038
Mnk3s 01 g	0.6627	0.9188	1.2960	-1.9982	-1.9996	-1.9997
Mnk3s 01-12 none	3.7535	2.2769	1.9519	-1.1279	-1.0226	-1.0036
Mnk3s 01a none	15.6391	0.9188	0.9392	-0.9818	-1.9996	-2.0282
Mnk3s 012a none	4.0885	0.1748	0.1437	-1.4881	-3.0294	-3.0131

Таблица П7.1. Зависимость относительной погрешности решения ОЗД для области cartrndball. max(relX)

Таблица П7.2. Зависимость относительной погрешности решения ОЗД для области cartrndball. max(relM)

	rM ₁₀ , %			$\frac{[\ln(rM_{1000})-\ln(rM_{10})]}{[\ln(1000)-\ln(10)]}$		
Метод	0°	45°	90°	0°	45°	90°
Mnk1 01 g	11.9599	15.4256	18.3357	-1.0252	-1.0178	-1.0156
Mnk1s 01 g	4.0538	8.7259	10.4949	-1.0124	-1.0172	-1.0167
Mnk1 01a none	1.8290	1.7427	2.0045	-1.9831	-2.0208	-2.0207
Mnk1s 01a none	1.7494	1.7385	2.0081	-1.9727	-2.0215	-2.0228
Mnk2 01 g	1.7653	1.6678	2.0342	-2.0608	-2.0081	-2.0057
Mnk2 01-12 none	14.3687	16.8929	16.9840	-1.0491	-1.0529	-1.0477
Mnk2 01a none	3.7841	2.0823	2.5395	-1.9931	-2.0225	-2.0235
Mnk2s 01 g	0.8792	0.9160	1.1492	-2.0519	-1.9960	-2.0048
Mnk2s 01-12 none	12.1026	16.3243	17.4337	-1.0397	-1.0493	-1.0448
Mnk2s 01a none	4.4627	2.0962	2.6703	-2.0036	-2.0241	-2.0342
Mnk3 01 g	0.5515	1.4899	1.7609	-2.9899	-2.1181	-2.1509
Mnk3 01-12 none	2.2834	2.2640	2.5107	-2.0578	-2.0533	-2.0632
Mnk3 01a none	4.0604	2.0047	2.5525	-1.9906	-2.0144	-2.0245
Mnk3 012a none	0.3344	0.3926	0.4020	-2.1102	-2.1290	-2.1304
Mnk3s 01 g	1.3136	2.0345	3.9667	-2.0032	-2.0176	-1.9979
Mnk3s 01-12 none	3.3909	5.1964	5.8369	-1.0306	-1.0377	-1.0029
Mnk3s 01a none	3.9680	2.0345	2.6132	-1.9834	-2.0176	-2.0296
Mnk3s 012a none	0.3891	0.4088	0.4598	-2.1432	-2.1383	-2.1596