УДК 517.968

© **А. И. Булгаков, А. И. Полянский**
aib@tsu.tmb.ru, a_poljanskij@mail.ru

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННО ОВЫПУКЛЕННОГО ВОЗМУЩЕННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ[1]

Ключевые слова: выпуклое по переключению множество, выпуклая по переключению оболочка множества, возмущенное включение, обобщенное решение, обобщенное квазирешение.

Abstract. The concepts of the generalized solution, generalized quasi-solution, and generally convexified solution for the «disturbed» inclusion are represented. The connection between the sets of generalized quasi-solutions and generally convexified solutions is derived.

§ 1. Обозначения и некоторые определения

В работе [1] изучалось функциональное включение, правая часть которого состояла из алгебраической суммы значений «хорошего» (имеющего замкнутые образы) многозначного отображения и «плохого» (не обладающего свойством замкнутости и выпуклости значений) многозначного отображения, представляющего собой композицию линейного интегрального оператора и многозначного отображения, обладающего свойством выпуклости по переключению значений. Здесь не предполагается, что такое многозначное отображение обладает свойством выпуклости по переключению значений. В этом случае все известные методы исследования таких включений не применимы. Оказывается выход из

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 04-01-00324).

данной ситуации можно найти с помощью введения понятия обобщенного решения.

Пусть $U \subset [a,b]$ — измеримое множество, $\mu(U) > 0$ (μ — мера Лебега), обозначим $L^n(U)$ — пространство суммируемых функций $x : U \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(U)} = \int_U |x(s)|ds$.

Пусть $\Phi \subset L^n[a,b]$. Будем говорить, что множество Φ *выпукло по переключению* (разложимо), если для любых $x, y \in \Phi$ и любого измеримого множества $U \subset [a,b]$ выполнено включение $\chi(U)x+\chi([a,b]\backslash U)y \in \Phi$, где $\chi(\cdot)$ — характеристическая функция соответствующего множества. Далее, будем говорить, что множество $\Phi \subset L^n[a,b]$ ограничено суммируемой функцией, если существует такая функция $\varphi_\Phi \in L^1[a,b]$, что для всех $x \in \Phi$ и при почти всех $t \in [a,b]$ выполнено неравенство $|x(t)| \leqslant \varphi_\Phi(t)$. Обозначим $\mathcal{S}(L^n)$ — множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $L^n[a,b]$ и $\mathcal{Cl}(L^n)$ — множество непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями подмножеств пространства $L^n[a,b]$.

Для произвольного $\Phi \subset L^n[a,b]$ обозначим через $\operatorname{sw}\Phi$ совокупность всевозможных линейных комбинаций

$$y = \chi(U_1)x_1 + \chi(U_2)x_2 + \ldots + \chi(U_m)x_m$$

элементов $x_i \in \Phi,$ в которых U_i — непересекающиеся измеримые множества отрезка $[a,b]$ такие, что $[a,b] = \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i$. Пусть далее, $\overline{\operatorname{sw}}\,\Phi$ — замыкание множества $\operatorname{sw}\Phi$ в пространстве $L^n[a,b]$.

§ 2. Обобщенные квазирешения и решения обобщенно овыпукленного возмущенного включения

Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V\Phi(x), \tag{2.1}$$

где многозначный оператор $\Psi : C^n[a,b] \to \operatorname{comp}(C^n[a,b])$, отображение $\Phi : C^n[a,b] \to \mathcal{Cl}(L^n)$ удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $B \subset C^n[a,b]$ образ $\Phi(B)$ ограничен суммируемой функцией и линейный непрерывный интегральный оператор $V : L^n[a,b] \to C^n[a,b]$, определеный равенством

$$(Vz)(t) = \int_a^b V(t,s)z(s)ds, \quad t \in [a,b],$$

переводит каждое слабо предкомпактное в $L^n[a,b]$ множество в предкомпактное множество пространства $C^n[a,b]$.

По заданному многозначному отображению

$$\Phi : C^n[a,b] \to \mathcal{C}\ell(L^n)$$

определим многозначный оператор $\widetilde{\Phi} : C^n[a,b] \to \mathcal{S}(L^n)$ равенством

$$\widetilde{\Phi}(x) = \overline{\text{sw}}\,\Phi(x). \tag{2.2}$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Под *обобщенным решением* включения (2.1) будем понимать такую функцию $x \in C^n[a,b]$, для которой найдутся такие элементы $v \in \Psi(x)$ и $z \in \widetilde{\Phi}(x)$, что справедливо равенство $x = v + Vz$.

Отметим, что согласно [2], если множество $\Phi(x)$ в (2.1) выпукло по переключению, то обобщенное решение включения (2.1) совпадает с классическим.

О п р е д е л е н и е 2.2. Функция $x \in C^n[a,b]$ называется *обобщенным квазирешением* включения (2.1) если существует такой элемент $v \in \Psi(x)$ и такая последовательность $z_i \in \widetilde{\Phi}(x)$, $i = 1, 2, \dots$, что последовательность $x_i = v + Vz_i \to x$ в пространстве $C^n[a,b]$ при $i \to \infty$.

Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V\,\text{co}\,\widetilde{\Phi}(x), \tag{2.3}$$

где co — выпуклая замкнутая оболочка множества в пространстве $L^n[a,b]$, а отображение $\widetilde{\Phi}$ определено равенством (2.2).

Включение (2.3) будем называть *обобщенно овыпукленным* возмущенным включением (2.1).

О п р е д е л е н и е 2.3. Под *обобщенно овыпукленным решением* включения (2.1) будем понимать функцию $x \in C^n[a,b]$ такую, что существуют $v \in \Psi(x)$ и $z \in \mathrm{co}\,\widetilde{\Phi}(x)$, для которых справедливо равенство $x = v + Vz$.

Далее, обозначим через $\mathcal{H}$ — множество всех обобщенных квазирешений включения (2.1); H_{co} — множество всех обобщенно овыпукленных решений включения (2.1).

Связь между множеством обобщенных квазирешений включения (2.1) и множеством обобщенно овыпукленных решений включения (2.1) устанавливает следующая теорема.

Т е о р е м а 2.1. *Справедливо следующее равенство* $\mathcal{H} = H_{\mathrm{co}}$.

З а м е ч а н и е 2.1. Отметим, что теорема 2.1 верна без предположения какой-либо непрерывности отображений Ψ и Φ.

* * *

1. Булгаков А. И., Беляева О. П., Григоренко А. А. К теории возмущенных включений и о ее приложениях // Матем. сб. 2005. Т. 196, № 10. С. 21–78.
2. Булгаков А. И., Беляева О. П., Мачина А. Н. Функционально–дифференциальное включение с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестн. Удм. ун-та. 2005. № 1. С. 3–20.