УДК 517.917

© **Т. С. Быкова, Е. Л. Тонков**
tsbkv@udm.net, eltonkov@udm.ru

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

Ключевые слова: линейные системы с последействием, равномерная экспоненциальная устойчивость, показатели Ляпунова, ляпуновская приводимость, асимптотическое подобие.

Abstract. It is shown that linear system with aftereffect on each finite-dimensional subspace of solutions with finite Lyapunov index is asimptotically homothetic under natral assumptions to a system of ordinary differential equations. The problem of the uniform exponential stability of a system with aftereffect is studied.

Основной целью работы является выяснение условий, при которых сужение системы

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x_t(s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty) \tag{0.1}$$

на любое конечномерное подпространство существенных (то есть имеющих конечные показатели Ляпунова) решений асимптотически подобно некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений с ограниченной матрицей коэффициентов. Здесь запись x_t означает функцию $s \to x_t(s) \doteq x(t+s)$ переменного $s \in [-r, 0]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06–01–00258) программы «Университеты России» (грант № 34125).

Кроме того, исследуется вопрос о грубости свойства равномерной экспоненциальной устойчивости системы (0.1).

Относительно системы (0.1) будем предполагать, что интеграл Стилтьеса рассматривается по переменной s при каждом фиксированном t, $r > 0$ и функция $A\colon \mathbb{R}\times[-r,0] \to \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ удовлетворяет *естественным условиям*: функция $(t,s) \to A(t,s)$ ограничена в полосе $\mathbb{R}\times[-r,0]$, имеет ограниченную вариацию по s, функция $t \to A(t,0)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, $A(t,-r) \equiv 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $|\tau| \leqslant \delta$ и всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\displaystyle\int_{-r}^{0} |A(t+\tau,s)-A(t,s)|\,d\,s \leqslant \varepsilon$.

В дальнейшем систему (0.1) будем отождествлять с задающей ее функцией A, а пространство всех систем A, удовлетворяющих естественным условиям, обозначать $\mathfrak{A}$.

В качестве пространства начальных функций рассматривается пространство $\mathfrak{S}$ всех непрерывных функций $u : [-r,0] \to \mathbb{R}^n$ либо с L_2-нормой $\|u(\cdot)\|_2 = \Big(\displaystyle\int_{-r}^{0} |u(s)|^2 ds\Big)^{1/2}$, либо с равномерной нормой $\|u\|_0 = \max\limits_{t\in[-r,0]} |u(t)|$ (в последнем случае $\mathfrak{S}$ становится банаховым пространством и совпадает с пространством $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$).

Всякое решение $t \to x(t,t_0,u)$ системы (0.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t) = u(t-t_0)$ при $t \in [t_0-r,t_0]$, порождает *движение* $t \to x_t(\cdot,t_0,u) \doteq x_t(t_0,u)$ в пространстве $\mathfrak{S}$, $t \geqslant t_0$ (при $t_0 = 0$ вместо $x_t(\cdot,0,u)$ пишем $x_t(u)$). Таким образом, при всех $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ имеет место равенство $x_t = X(t,\tau)x_\tau$, где $X(t,\tau)\colon \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ — оператор Коши системы (0.1).

§ 1. Теорема о приводимости [1]

Для $x_t(u)$ определим $\mathbb{L}_2$-показатель Ляпунова

$$\varkappa(u) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln\|x_t(u)\|_2}{t}, \quad \varkappa(0) \doteq -\infty.$$

Тогда множество $\mathfrak{S}^- \doteq \{u \in \mathfrak{S} : \varkappa(u) = -\infty\}$ образует линейное подпространство в $\mathfrak{S}$. Пусть $\mathfrak{S}^+$ — прямое дополнение подпространства $\mathfrak{S}^-$ до пространства $\mathfrak{S}$, то есть $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^+ \oplus \mathfrak{S}^-$. Тогда если $u \in \mathfrak{S}^+$ и $u \neq 0$, то $\varkappa(u) > -\infty$.

Зафиксируем в $\mathfrak{S}^+$ линейное подпространство $\mathbb{S}_0^p$ размерности p и построим движение $t \to x_t(\mathbb{S}_0^p) \doteq \mathbb{S}_t^p$ пространства $\mathbb{S}_0^p$. Будем говорить, что это движение порождено *сужением* системы A на подпространство $\mathbb{S}_0^p$. Такое сужение обозначим $(A, \mathbb{S}_0^p)$.

Наряду с системой $(A, \mathbb{S}_0^p)$ рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = B(t)y, \quad t \geqslant 0, \quad y \in \mathbb{R}^p \tag{1.1}$$

с непрерывной на полуоси $\mathbb{R}_+$ матричной функцией $t \to B(t)$. Будем далее отождествлять систему (1.1) с задающей ее матрицей B и называть системой B. По аналогии с подпространством $\mathbb{S}_t^p$, введем в рассмотрение линейное пространство $\mathbb{R}_t^p$ размерности p с базисом $y^1(t), \ldots, y^p(t)$, образующем столбцы матрицы Коши $Y(t, \tau)$ системы B при $\tau = 0$.

Пусть $\mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$ — пространство линейных операторов, действующих из $\mathbb{S}_t^p$ в $\mathbb{R}_t^p$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^p}$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Функцию $t \to L(t) \in \mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$ будем называть *обобщенным ляпуновским преобразованием* систем $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B, если: 1) функция $t \to L(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$; 2) при $t \geqslant 0$ оператор $L(t)$ является гомеоморфизмом пространств $\mathbb{S}_t^p$ и $\mathbb{R}_t^p$ и 3) выполнено неравенство

$$\sup_{t \geqslant 0} \bigl(\|L(t)\|_{\mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^p} + \|L^{-1}(t)\|_{\mathbb{R}^p \to \mathbb{L}_2}\bigr) < \infty.$$

Будем говорить также, что система $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *приводима* обобщенным ляпуновским преобразованием L к системе B, или что системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B *асимптотически подобны*.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть* $\mathbb{S}_0^p \subset \mathfrak{S}^+$. *Тогда* а) *найдется ортогональное* $(L^*(t)L(t) = I_p)$ *обобщенное ляпуновское преобразование, приводящее систему* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *к системе* B *с непрерывной на* $\mathbb{R}_+$, *верхней треугольной матрицей* $B(t)$;

б) *если, в дополнение к сказанному, всякое решение системы* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *«продолжаемо влево», то есть найдется константа* $\alpha > 0$ *такая, что для каждого* $u \in \mathbb{S}_0^p$, *любого* $\tau \in [-r, 0]$ *и всех* $t \in \mathbb{R}_+$ *выполнено неравенство* $\|x_{t+\tau}(\cdot, u)\|_2 \leqslant \alpha \|x_t(\cdot, u)\|_2$, *то в множестве* $\{B\}$ *всех систем, асимптотически подобных системе* $(A, \mathbb{S}_0^p)$, *найдется система* B *с ограниченной на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *верхней треугольной матрицей* $B(t)$).

§ 2. Рекуррентные системы с последействием [1;2]

О п р е д е л е н и е 2.1. Функцию $(t, s) \to A(t, s)$ (или, что эквивалентно, систему $A \in \mathfrak{A}$), будем называть *рекуррентной* (по переменной t), если для любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ множество

$$\Theta_A(\varepsilon, T) \doteq \{\vartheta \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leqslant T} \Big(|A(t+\vartheta, 0) - A(t, 0)| + \\ + \int_{-r}^{0} |A(t+\vartheta, s) - A(t, s)| \, ds \Big) \leqslant \varepsilon\}$$

относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$.

При каждом $s \in [-r, 0]$ сдвиг функции $t \to A(t, s)$ на константу τ обозначим $A_\tau(t, s) \doteq A(t+\tau, s)$. Пусть далее, $\mathcal{R}(A)$ — замыкание множества $\{A_\tau(t, s) : \tau \in \mathbb{R}\}$ сдвигов функции A, понимаемое в следующем смысле: $\widehat{A} \in \mathcal{R}(A)$ в том и только в том случае, если для некоторой последовательности $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ и любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ найдется такой номер i_0, что для всех $i \geqslant i_0$ выполнено неравенство

$$\max_{|t| \leqslant T} \Big(|A_{\tau_i}(t, 0) - \widehat{A}(t, 0)| + \int_{-r}^{0} |A_{\tau_i}(t, s) - \widehat{A}(t, s)| \, ds \Big) \leqslant \varepsilon.$$

Для каждой системы $\widehat{A} \in \mathcal{R}(A)$ полный набор $\mathbb{L}_2$-показатель

Ляпунова системы $(\widehat{A}, \mathbb{S}_0^p)$ обозначим $\lambda_1(\widehat{A}), \ldots, \lambda_p(\widehat{A})$. Будем считать, что $\lambda_1(\widehat{A}) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_p(\widehat{A})$.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть* $\mathbb{S}_0^p \subseteq \mathfrak{S}^+$, *система* $A \in \mathfrak{A}$ *рекуррентна и для всех* $\widehat{A} \in \mathcal{R}(A)$ *и некоторой константы* $\varkappa > -\infty$ *выполнено неравенство* $\lambda_1(\widehat{A}) \geqslant \varkappa$. *Тогда найдутся система* B *с непрерывной и ограниченной на* $\mathbb{R}$ *верхней треугольной матрицей* $B(t)$ *и обобщенное ляпуновское преобразование* L, *приводящее систему* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *к системе* B.

§ 3. Равномерная экспоненциальная устойчивость [2]

О п р е д е л е н и е 3.1. Будем говорить, что система $A \in \mathfrak{A}$ C*-равномерно экспоненциально устойчива*, если найдутся такие константы $\lambda > 0$ и $M > 0$, что для всякого движения $t \to x_t(\cdot)$, порожденного системой A, для любого $t_0 \geqslant 0$ и всех $t \geqslant t_0$ выполнено неравенство

$$\|x_t(\cdot)\|_0 \leqslant M \|x_{t_0}(\cdot)\|_0 \exp\bigl[-\lambda(t - t_0)\bigr].$$

Т е о р е м а 3.1. *Система* $A \in \mathfrak{A}$ C*-равномерно экспоненциально устойчива в том и только том случае, если показатель Боля*

$$\mathfrak{B}_0(A) \doteq \varlimsup_{t-\tau \to \infty} \frac{\ln \|X(t,\tau)\|_{\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}}}{t - \tau}, \quad \mathfrak{S} = C([-r, 0], \mathbb{R}^n),$$

системы A *удовлетворяет неравенству* $\mathfrak{B}_0(A) < 0$.

Далее, пусть $\mathfrak{A}_0$ — подпространство всех систем из $\mathfrak{A}$, для которых всякое решение с конечным показателем обладает свойством «*продолжаемости влево*».

Т е о р е м а 3.2. *Свойство* C*-равномерной экспоненциальной устойчивости на пространстве* $\mathfrak{A}_0$ *с метрикой*

$$\varrho(A, B) \doteq \sup_{t \in \mathbb{R}} \Bigl(|A(t, 0) - B(t, 0)| + \int_{-r}^{0} |A(t, s) - B(t, s)| \, ds \Bigr)$$

является грубым свойством.

Доказательство этой теоремы опирается на формулируемую ниже лемму, представляющую самостоятельный интерес.

Л е м м а 3.1. *Показатель Боля системы* $A \in \mathfrak{A}_0$ *устойчив вверх: каждому* $\varepsilon > 0$ *отвечает* $\delta > 0$, *что для любой системы* $A + B \in \mathfrak{A}_0$, *где* B *удовлетворяет естественным условиям и неравенству* $\sup\limits_{t \geqslant 0}\big(|B(t,0)| + \displaystyle\int_{-r}^{0} |B(t,s)|ds\big) \leqslant \delta$, *имеет место неравенство* $\mathfrak{B}_0(A+B) \leqslant \mathfrak{B}_0(A) + \varepsilon$.

Если на пространстве $\mathfrak{A}$ всех систем вида (0.1) определить метрику ρ равенством

$$\rho(A,B) \doteq \sup_{t \in \mathbb{R}}\Big(|A(t,0) - B(t,0)| + \operatorname*{var}_{s \in [-r,0]} |A(t,s) - B(t,s)|\Big), \quad (3.1)$$

то утверждения аналогичные выше сформулированным, останутся справедливыми без условия «продолжаемости влево», то есть на всем пространстве $\mathfrak{A}$.

Л е м м а 3.2. *Показатель Боля системы* $A \in \mathfrak{A}$ *устойчив вверх, то есть каждому* $\varepsilon > 0$ *отвечает такое* $\delta > 0$, *что для любого возмущения* $B(t,s)$, *удовлетворяющего естественным условиям и неравенству* $\sup\limits_{t \geqslant 0} \operatorname*{var}\limits_{s \in [-r,0]} |B(t,s)| \leqslant \delta$, *имеет место неравенство* $\mathfrak{B}_0(A+B) \leqslant \mathfrak{B}_0(A) + \varepsilon$.

Т е о р е м а 3.3. *В пространстве* $\mathfrak{A}$ *с метрикой* ρ, *определенной равенством* (3.1), *свойство* C*-равномерной экспоненциальной устойчивости, является грубым свойством.*

Список литературы

1. Быкова Т. С., Тонков Е. Л. Ляпуновская приводимость линейной системы с последействием // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 6. С. 731–737.
2. Быкова Т. С., Тонков Е. Л. Приводимость линейной системы с последействием // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2005. Т. 11, № 1. С. 53–64.