УДК 517.927.2

© **М. Ю. Ватолкин**
pmi@istu.ru

К ИССЛЕДОВАНИЮ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА ДЛЯ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Ключевые слова: собственные значения (функции) обобщенной задачи Валле Пуссена, левые (правые) индексы точек, неосцилляция.

Abstract. Theorems related with the connection of spectra of generalised and classical boundary value problems of Valle Poussin are obtained. Representation of generalised problem eigenfunctions by means of classical problem eigenfunctions are found. Examples are given.

§ 1. Случай обобщенных условий Валле Пуссена специального вида для уравнения второго порядка

Пусть $t \in J = [a,b]; a,b \in \mathbb{R}; a < b$. Рассмотрим обобщенную задачу Валле Пуссена (ОЗВП, см. [1], [2]) на собственные значения

$$\prod_{i=1}^{\nu} \sigma(t-a_i)\, {}_{\mathcal{P}}^{2}x(t) = -\lambda p_{22}(t)\, {}_{\mathcal{P}}^{0}x(t) \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{P}}^{0}x(a_0) = {}_{\mathcal{P}}^{0}x(a_2) = \ldots = {}_{\mathcal{P}}^{0}x(a_{2\xi}) = {}_{\mathcal{P}}^{0}x(a_{2\xi+1}) = \\ = \ldots = {}_{\mathcal{P}}^{0}x(a_{\nu-1}) = {}_{\mathcal{P}}^{0}x(a_{\nu+1}) = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

$\left(a = a_0 < a_1 < \ldots < a_\nu < a_{\nu+1} = b;\ \nu -\text{ четное};\ 0 \leqslant \xi \leqslant \frac{\nu}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} &\rho_i \leqslant 1,\ i = 1, 3, \ldots, 2\xi-1, 2\xi+2, \ldots, \nu-2, \nu, \\ &\rho_i = 0,\ i = 2, 4, \ldots, 2\xi, 2\xi+1, \ldots, \nu-3, \nu-1, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\overset{k}{_\mathcal{P}}x\,(k = 0,\, 1,\, 2)$ означает квазипроизводную порядка k, построенную по нижней треугольной матрице $\mathcal{P} = (p_{ik})^2_{i,k=0}$ [1], ρ_i — дефект решения в точке a_i, $\rho_i = \delta\,(0 \leqslant \delta \leqslant 2)$, если $\overset{2-\delta}{_\mathcal{P}}x$ имеет разрыв в точке a_i, а все квазипроизводные меньшего порядка непрерывны в этой точке, функция $\sigma(\cdot)$ совпадает с $\mathrm{sign}(\cdot)$ в открытых интервалах $(a_k,\, a_{k+1})$ и односторонне непрерывна в точках a_k.

Скажем, что функция $x(\cdot)$ имеет в точке $a_i \in J$ $\mathcal{P}$- нуль кратности $\mu_i\,(1 \leqslant \mu_i \leqslant 2)$, если квазипроизводная $\overset{\mu_i}{_\mathcal{P}}x(a_i) \neq 0$, а все квазипроизводные меньшего порядка обращаются в нуль в этой точке. Через $\varphi_\mathcal{P}(\cdot,\, a_i)$ обозначим кратность $\mathcal{P}$- нуля функции $x(\cdot)$ в точке a_i. Введем [1] левые (l_k) и правые (r_k) индексы точек $a_k\,(k = 1,\, \ldots\,,\nu)$:

$$l_k = 2 + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i - \sum_{i=0}^{k} \mu_i, \quad r_k = 2 + \sum_{i=k+1}^{\nu} \rho_i - \sum_{i=k}^{\nu+1} \mu_i \quad (k = 1,\, \ldots\,,\nu)$$

(если верхний индекс суммирования меньше нижнего, то полагаем сумму равной нулю).

Следуя работе [1], назовем условиями *ОР* (однозначной разрешимости) следующие неравенства: $l_k \geqslant 0,\ \ r_k \geqslant 0\ (k = 1,\, \ldots\,,\nu)$. Заметим, что в случае краевых условий типа (1.2), (1.3) для уравнения (1.1) левые и правые индексы точек $a_k\,(k = 1,\, \ldots\,,\nu)$ неотрицательны и условия *ОР* всегда выполнены. Однородное квазидифференциальное уравнение второго порядка

$$\overset{2}{_\mathcal{P}}x(t) = 0, t \in J, \tag{1.4}$$

называется неосцилляционным на J, если число $\mathcal{P}$-нулей любого его нетривиального решения [1] на J не превосходит единицы.

Т е о р е м а 1.1 (ср. [3]). *Пусть уравнение* (1.4) *неосцилляционно на* J, *известны собственные значения* λ *двухточечной классической задачи Валле Пуссена* (*КЗВП*) *для уравнеия* (1.1), *рассматриваемой на отрезке* $[a_{2\xi}, a_{2\xi+1}]$, *и отвечающие им собственные функции* $u_{2\xi,2\xi+1}(\cdot,\lambda)$, *а также известны нетривиальные решения* $u_{k,k+1}(t,\lambda)$ *уравнения* (1.1) *на остальных отрезках* $[a_k, a_{k+1}]$, *обращающиеся в нуль на том конце отрезка,* *который участвует в условиях* (1.2). *Тогда спектр ОЗВП совпадает со спектром КЗВП и равенство*

$$
{}^{0}_{\mathcal{P}}u(t,\lambda)=\begin{cases} {}^{0}_{\mathcal{P}}u_{01}(t,\lambda) & {\scriptstyle (a_0\leqslant t\leqslant a_1),} \\[2ex] \displaystyle\prod_{i=1}^{m-1}\frac{{}^{1-\rho_i}_{\mathcal{P}}u_{i-1,i}(a_i,\lambda)}{{}^{1-\rho_i}_{\mathcal{P}}u_{i,i+1}(a_i,\lambda)}\,{}^{0}_{\mathcal{P}}u_{m-1,m}(t,\lambda) & {\scriptstyle (a_{m-1}<t\leqslant a_m,} \\ & {\scriptstyle m=2,3,\dots,\nu+1)} \end{cases}
$$

определяет единственную с точностью до постоянного множителя собственную функцию $u(\cdot,\lambda)$ *задачи* (1.1)–(1.3), *отвечающую собственному значению* λ .

§ 2. Случай обобщенных условий Валле Пуссена общего вида для уравнения второго порядка

Вместо краевых условий (1.2), (1.3) зададим для уравнения (1.1) другие обобщенные условия Валле Пуссена

$$
\varphi_{\mathcal{P}}(x,\,a_i)\geqslant\mu_i,\ \text{где}\ \mu_i\in\{0,\,1\}\ (i=1,\,\dots,\nu),\ \mu_0=\mu_{\nu+1}=1, \tag{2.1}
$$

$$
\rho_i\leqslant 1\,(i=1,\,\dots,\nu),\qquad \sum_{i=0}^{\nu+1}\mu_i=2+\sum_{i=1}^{\nu}\rho_i. \tag{2.2}
$$

Краевые условия (1.2), (1.3) — частный случай условий (2.1), (2.2). Краевые условия (2.1), (2.2) позволяют одновременно задавать во внутренних точках отрезка J и нуль кратности единица и дефект, равный единице. Пусть $a_{k_1}<\,\dots\,<a_{k_p}$ все такие точки.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть уравнение* (1.4) *неосцилляционно на* J *и выполнены условия ОР. Тогда*

а) спектр ОЗВП (1.1), (2.1), (2.2) *представляет собой объединение спектров* $p+1$ *ОЗВП вида* (1.1)–(1.3), *рассматриваемых на отрезках* $[a_0,a_{k_1}]$, $[a_{k_1},a_{k_2}]$, $\dots$, $[a_{k_p},a_{\nu+1}]$ *или* (*что то же самое в силу теоремы* 1.1) *объединение спектров* $p+1$ *КЗВП;*

б) если собственное значение λ задачи (1.1), (2.1), (2.2) *входит в спектр только одной ОЗВП вида* (1.1)–(1.3), *то ему отвечает единственная с точностью до постоянного множителя собственная функция, если же λ одновременно входит в спектры N $(1 < N \leqslant p+1)$ ОЗВП вида* (1.1)–(1.3), *то этому собственному значению отвечает $2^N - 1$ линейно независимых собственных функций. В случае $1 \leqslant N < p+1$ любая собственная функция ОЗВП* (1.1), (2.1), (2.2), *отвечающая собственному значению λ, равна нулю на тех отрезках из J, на которых заданы ОЗВП вида* (1.1)–(1.3) *и в спектры которых λ не входит.*

П р и м е р 2.1.

$$\overset{0}{\mathcal{P}}x(a_0) = \overset{0}{\mathcal{P}}x(a_1) = \overset{0}{\mathcal{P}}x(a_2) = \overset{0}{\mathcal{P}}x(a_4) = 0, \ \rho_1 = \rho_3 = 1.$$

В примере 2.1 условия OP выполнены, поэтому исходная задача распадается на две: первая из них — двухточечная КЗВП на отрезке $[a, a_1]$, а вторая — ОЗВП вида (1.1)–(1.3) на отрезке $[a_1, b]$.

П р и м е р 2.2.

$$\overset{0}{\mathcal{P}}x(a_0) = \overset{0}{\mathcal{P}}x(a_1) = \overset{0}{\mathcal{P}}x(a_2) = \overset{0}{\mathcal{P}}x(a_4) = 0, \ \rho_2 = \rho_3 = 1.$$

В этом примере левый индекс точки a_2 принимает отрицательное значение, теорема 2.1 здесь неприменима.

Список литературы

1. Дерр В. Я. К обобщенной задаче Валле Пуссена // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, № 11. С. 1861–1872.
2. Дерр В. Я. О применении квазидифференциальных уравнений в теории линейных многоточечных краевых задач: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Свердловск, 1990.
3. Ватолкин М. Ю. О собственных функциях обобщенной задачи Валле Пуссена для уравнения второго порядка // XXXI науч–техн. конф. ИжГТУ. Тез. докл.: В 2 ч. Ч. 2. Ижевск, 1998. С. 109–110.