УДК 519.653

© **А. Ю. Вдовин, С. С. Рублева**
vdovin@mx2.usfeu.ru, rublevas@mail.ru

О ДИНАМИЧЕСКОМ АЛГОРИТМЕ НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ПО КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ИНФОРМАЦИИ О НЕЙ

Ключевые слова: численное дифференцирование, динамический регуляризирующий алгоритм, управление с моделью

Abstract. The stable algorithm of numerical differentiation approximately assigned function not used difference quotient is proposed.

Рассматривается задача численного дифференцирования

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad t \in [0, T], \quad x(t) \in R, \quad v(t) \in [a,\, b] \tag{1}$$

Пусть в моменты t_i $i \in \overline{0, n-1}$ ($t_{i+1} - t_i = \Delta > 0,\ t_0 = 0,$ $t_n = T$) поступает неточная информация $\xi(t_i)$ о $x(t_i)$: $|x(t_i) - -\xi(t_i)| \leqslant h$. Требуется построить алгоритм нахождения приближения производной $u(\cdot)$ в режиме реального времени (по мере поступления информации о $\xi(\cdot)$). Эта некорректно поставленная задача [1] является частным случаем проблемы восстановления неизвестного возмущения $v(\cdot)$ в динамической системе

$$x'(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))v(t), \quad x(0) = x_0,$$

поставленной в [2]. Предложенный в этой работе алгоритм состоял в выборе $u(t) = u_{i+1}$, постоянной на промежутке $[t_i, t_{i+1})$, из условия удерживания вблизи нуля функционала

$$(w(t_i) - \xi(t_i))\, f_2(t, x(t))v(t) + \alpha(h)\frac{\|v\|^2}{2} \tag{2}$$

Здесь $w(t)$ – траектория системы-модели

$$w(t) = w(t_i) + u_{i+1}(t - t_i) \quad t \in [t_i,\, t_{i+1}),$$

используемой в теории дифференциальных игр [3]. Доказано для:

$$u(t) = u_{i+1} = \frac{\xi(t_i) - w(t_i)}{\alpha} f_2(t_i, \xi(t_i)), \quad t \in [t_i,\, t_{i+1}) \tag{3}$$

и согласованных параметров h, α и Δ:

$$\alpha(h) \to 0,\, \Delta(h) \to 0, \frac{h}{\alpha(h)} \to 0, h \to 0, \tag{4}$$

$$\|u(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2[0,\,T]} \to 0$$

Использование (3) для задачи (1) с заменой $\xi(\cdot)$ на $x(\cdot)$ дает формулу

$$u(t) = \frac{x(t) - w(t)}{\alpha}, \tag{5}$$

и отличие в точности порядка - $\frac{h}{\alpha}$. Удерживание около нуля функционала (2) может осуществляться по правилу

$$u(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\alpha}} v(\tau) d\tau. \tag{6}$$

Отметим, что $\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\alpha}} v(\tau) d\tau = e^{-\frac{t-\tau}{\alpha}}\Big|_0^t = 1 - e^{-\frac{t}{\alpha}} \to 1$ при $h \to 0$, то есть интеграл, стоящий в правой части, относится к разряду сингулярных, часто встречающихся в задачах восстановления. Действуя по аналогии, построим метод нахождения производной с помощью сингулярного интеграла следующего вида

$$u(t) = \frac{2}{\pi\,\alpha} \int\limits_0^t \frac{v(\tau)}{1 + \left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^2} d\tau. \tag{7}$$

Заметим, что формулы (6, 7) непосредственно неприменимы, так как $v(\cdot)$ неизвестна. Поэтому требуется осуществить действия аналогичные обратному переходу от (6) к (5). Для этого проинтегрируем уравнение (7) и затем, сменив порядок интегрирования, получаем: $w(t) = \frac{2}{\pi\,\alpha}\int\limits_0^t\int\limits_0^s \frac{v(\tau)}{1+\left(\frac{s-\tau}{\alpha}\right)^2}d\tau ds = \frac{2}{\pi\,\alpha}\int\limits_0^t\int\limits_\tau^t \frac{v(\tau)}{1+\left(\frac{s-\tau}{\alpha}\right)^2}ds\,d\tau.$

Так как $\int\limits_\tau^t \frac{1}{1+\left(\frac{s-\tau}{\alpha}\right)^2}\,ds = \alpha\left(\frac{\pi}{2} - arcctg\frac{t-\tau}{\alpha}\right)$, то $w(t) = \frac{2}{\pi\,\alpha}\int\limits_0^t \alpha\left(\frac{\pi}{2}-\right.$ $\left.-arcctg\frac{t-\tau}{\alpha}\right) v(\tau)d\tau = \int\limits_0^t v(\tau)d\tau - \frac{\pi}{2}\int\limits_0^t arcctg\frac{t-\tau}{\alpha}v(\tau)d\tau = x(t)-$

$$-\alpha\int\limits_0^t arcctg\frac{t-\tau}{\alpha}d\tau \qquad \text{и} \qquad x(t)-w(t) = \alpha\int\limits_0^t arcctg\,\frac{t-\tau}{\alpha}\,(1+$$

$+\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^2\Big)\,\frac{2}{\pi\,\alpha}\frac{v(\tau)}{1+\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^2}d\tau = \alpha\left(arcctg\frac{t-\tau}{\alpha}\,\left(1+\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^2\right)\,\frac{2}{\pi\,\alpha}\times\right.$

$\left.\times\int\limits_0^\tau\frac{v(s)}{1+\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)^2}\,ds\,\right|_0^t - \frac{2}{\pi\,\alpha}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \frac{v(s)}{1+\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)^2}\,ds\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{2}{\alpha}\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)\,arcctg\frac{t-\tau}{\alpha}\right)\Bigg)d\tau =$

$$= \frac{\alpha\,\pi}{2}\,u(t) - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^t\left(\frac{x(\tau)}{1+\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^2} - \frac{x(0)}{1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2} - \frac{2}{\alpha^2}\int\limits_0^\tau\frac{(t-s)x(s)}{\left(1+\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)^2\right)^2}ds\right)\left(\frac{1}{\alpha}-\right.$$

$\left.-\frac{2}{\alpha}\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)arcctg\frac{t-\tau}{\alpha}\right)d\tau.$

Окончательно:

$$u(t) = \frac{2}{\alpha\,\pi}\left(x(t)-w(t)+\frac{2}{\alpha\,\pi}\int_0^t\frac{x(\tau)}{1+\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^2}\left(1-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\pi\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^2}\right)d\tau - \frac{x(0)}{1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2} + \frac{2}{\pi}x(0)arcctg\frac{t}{\alpha}\right).$$

Т е о р е м а 1. Пусть $v(\cdot)$ - функция ограниченной вариации, поэтому непрерывна слева почти всюду при $t \in (0,T]$, выполнены условия (4) и $u(t) = \frac{2}{\alpha\pi}\left(\xi(t) - w(t) + \frac{2}{\alpha\pi}\int\limits_0^t\frac{\xi(\tau)}{1+\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^2}\left(1-\right.\right.$ $\left.\left.\pi\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)^2}\right)d\tau - \frac{x(0)}{1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2} + \frac{2}{\pi}x(0)arcctg\frac{t}{\alpha}\right).$

Тогда $\lim_{h\to 0} u(t) \overset{\text{п.в.}}{=} v(t)$ на $(0,T]$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть t - точка непрерывности слева $v(\cdot)$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $t-\tau < \delta$ влечет $|v(\tau)-v(t)| < \varepsilon$. Рассмотрим разность:

$$|u(t) - v(t)| \leqslant \left| \frac{2}{\pi\,\alpha} \int\limits_0^t \frac{v(\tau)}{1+\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^2} d\tau - v(t) \frac{2}{\pi\alpha} \int\limits_0^t \frac{1}{1+\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^2} d\tau \right| =$$

$$= \left| \frac{2}{\pi\alpha} \int\limits_0^t \frac{v(\tau)-v(t)}{1+\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^2} d\tau \right| = |r_\alpha|$$ Разобьем интеграл на два :

1) $\left| \frac{2}{\pi\,\alpha} \int_0^{t-\delta} \frac{v(\tau)-v(t)}{1+\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^2} d\tau \right| \leqslant \frac{2}{\pi\,\alpha} \frac{1}{1+\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^2} V_0^{t-\delta} v(t)$,

2) $\left| \frac{2}{\pi\,\alpha} \int\limits_{t-\delta}^t \frac{v(\tau)-v(t)}{1+\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^2} d\tau \right| \leqslant \frac{2}{\pi}\varepsilon \int\limits_{t-\delta}^t \frac{d\tau}{1+\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^2} = \frac{2}{\pi}\varepsilon \int\limits_0^{\frac{\delta}{\alpha}} \frac{dz}{1+z^2} \leqslant \frac{2}{\pi}\varepsilon \int\limits_0^{\infty} \frac{d\tau}{1+z^2} =$ $= \varepsilon$.

Тогда $|r_\alpha| \leqslant \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+\delta^2)} V_0^{t-\delta} v(t) + \varepsilon$. Легко видеть, что выбирая $\delta = \alpha^p$, где $0 < p < \frac{1}{2}$, оба слагаемых стремятся к нулю при $h \to 0$ Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Результаты работы описанного метода по сравнению с алгоритмом из [2], при предложенном там согласовании параметров, оказались по крайне мере не хуже.

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г., Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М: Наука, 1983. 198 с.
2. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 20. С. 51–60.
3. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М: Наука, 1985. 518 с.