

УДК 517.926

© Э. В. Вдовина, Ю. А. Ключкин

EVdovina@mail66.ru

**ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ
ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ
III ПОРЯДКА**

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, фазовые траектории, интегральные кривые.

Abstract. A classification and a visualization of phase-plane portraits for linear homogeneous systems with constant coefficients of the third order were carried out. The classification includes 41 kind, for each of them a criteria was obtained which depends on coefficients. The computer program which allows user to obtain phase-plane portraits was elaborated.

Качественная теория дифференциальных уравнений изучает свойства решений систем дифференциальных уравнений без их интеграции, по виду самой системы. Тем не менее, существует один аспект, а именно, — вопрос классификации положений равновесия линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (далее в тексте ЛОСПК) порядка выше второго, который разработан недостаточно широко. Системы подобного вида представляют собой важный класс обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющий большое прикладное значение. При этом важнее всего знать все устойчивые решения этой системы. Для ЛОСПК III порядка некоторые фазовые

портреты рассмотрены в работе А. Тондла [1]. Авторами предлагаемой работы была проведена классификация фазовых портретов ЛОСПК III порядка (их оказалось 41 разновидность), а также разработана компьютерная программа, которая строит и показывает все из упомянутых выше 41 разновидности в зависимости от выбора пользователя: либо по номеру в разработанной классификации, либо по задаваемым коэффициентам системы. Кроме того, эта программа распознаёт также структуру фазовых портретов ЛОСПК II порядка, и не только строит фазовый портрет, но и восстанавливает по нему семейство интегральных кривых заданной системы.

§ 1. Критерии определения типа фазового портрета

Запишем ЛОСПК III порядка и его характеристическое уравнение:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + A_{1,3}x_3 \\ \dot{x}_2 = A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + A_{2,3}x_3 \\ \dot{x}_3 = A_{3,1}x_1 + A_{3,2}x_2 + A_{3,3}x_3, \end{cases}$$

$$\lambda^3 + L_1\lambda^2 + L_2\lambda + L_3 = 0. \quad (1.1)$$

При исследовании фазового портрета необходимо знать характер корней характеристического уравнения системы, их знаки, а также число собственных и присоединённых векторов матрицы системы, этим фазовый портрет системы однозначно определяется. Для определения вышеперечисленных характеристик ЛОСПК рассматривались следующие критерии.

1) Знак дискриминанта кубического уравнения (1.1). Произведём замену $\lambda = \mu - L_1/3$ и подставим в уравнение (1.1). Имеем в новых обозначениях

$$\mu^3 + \mu \left(L_2 - \frac{L_1^2}{3} \right) + \left(\frac{2}{27}L_1^3 - \frac{L_1L_2}{3} + L_3 \right) = 0$$

Пусть

$$\frac{2}{27}L_1^3 - \frac{L_1L_2}{3} + L_3 = 2q \quad \text{и} \quad L_2 - \frac{L_1^2}{3} = 3p.$$

Тогда дискриминант равен $D = p^3 + q^2$ или окончательно

$$\begin{aligned} 4 \cdot 27 D &= 4(3p)^3 + 27(2q)^2 = \\ &= 4 \left(L_2 - \frac{L_1^2}{3} \right)^3 + 27 \left(\frac{2}{27}L_1^3 - \frac{L_1L_2}{3} + L_3 \right)^2. \end{aligned}$$

2) Условие Гурвица отрицательности вещественных частей всех корней уравнения (1.1): $L_1 > 0$, $L_3 > 0$, $L_1L_2 > 0$.

3) Теорема Декарта: число положительных корней уравнения (1.1) равно или на чётное число меньше числа перемен знаков в последовательности коэффициентов 1 , L_1 , L_2 , L_3 .

4) Условие положительности вещественных частей всех корней уравнения (1.1): $L > 0$, $L_3 > 0$, $L_1(-L_2) - L_3 > 0$.

5) Число отрицательных корней уравнения равно или на чётное число меньше числа перемен знаков в последовательности коэффициентов -1 , L_1 , $-L_2$, L_3 .

6) $\text{rang}(A - \lambda E) = 0$.

Итак, перебирая различные варианты сочетаний перечисленных условий, мы рассмотрим все возможные совокупности корней характеристического уравнения, собственных и присоединенных векторов матрицы ЛОСПК. Тем самым будут исследованы фазовые портреты исходной системы.

§ 2. Примеры фазовых портретов

Для визуализации фазовых портретов используется компьютерная программа, разработанная авторами. В качестве иллюстрации работы программы приведем 2 фазовых портрета из полученной классификации.

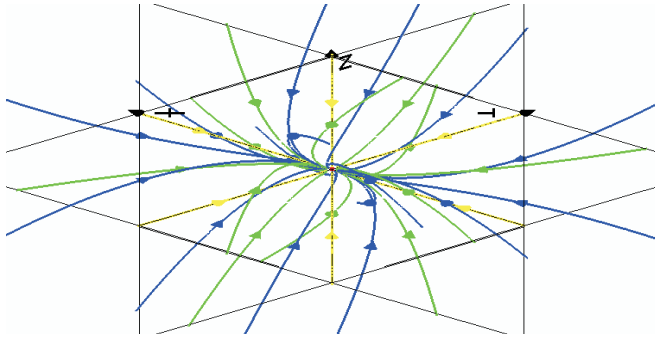


Рис. 1: Все корни действительные различные отрицательные

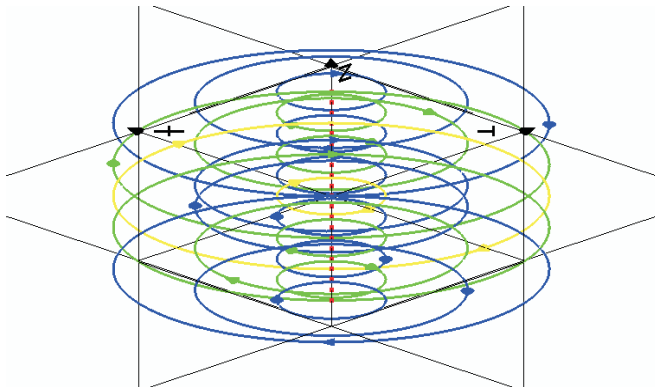


Рис. 2: Два корня комплексные сопряженные чисто мнимые и один действительный нулевой

* * *

1. Тондл А. Нелинейные колебания механических систем. М.: Мир, 1973. 336 с.