УДК 517.5

© **А. С. Демышев, В. И. Родионов**
rodionov@uni.udm.ru

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

Ключевые слова: непрерывно дифференцируемая функция, предел по множеству, репер, симплекс.

Abstract. Concept of S-differentiable function of some variables are defined. Necessary and sufficient conditions of S-differentiability are proved.

Пусть $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое открытое множество, а множество Ω таково, что $\Omega_0 \subseteq \Omega \subseteq \overline{\Omega}_0$. Произвольной функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$ поставим в соответствие векторную функцию $F : \Omega_*^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, действующую по следующему правилу:

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \Delta x_{11} & \ldots & \Delta x_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta x_{n1} & \ldots & \Delta x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \ldots \\ \Delta f_n \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Множество Ω_*^{n+1} состоит из тех наборов $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ из прямого произведения Ω^{n+1}, что векторы $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ (где $\Delta x_i \doteq x_i - x_0$) образуют ортогональный репер с началом в точке x_0 и выпуклая оболочка точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принадлежит Ω. Невырожденная матрица $\Delta x \doteq \operatorname{col}(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ приращений аргументов состоит из элементов $\Delta x_{ij} \doteq x_{ij} - x_{0j}$, а столбец Δf приращений функции состоит из чисел $\Delta f_i \doteq f(x_i) - f(x_0)$. Таким образом, $F = (\Delta x)^{-1} \Delta f$ и легко показать, что непрерывность функции f влечет непрерывность функции F. Элементы $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \in \Omega_*^{n+1}$ будем называть *симплексами.*

В силу ортогональности векторов $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ справедливо $\Delta x \cdot \Delta x^\top = \operatorname{diag}(\|\Delta x_1\|^2, \ldots, \|\Delta x_n\|^2)$ и $\bigl|\det \Delta x\bigr| = \prod\limits_{i=1}^{n} \|\Delta x_i\|$, где $\Delta x^\top$ — транспонированная к Δx матрица. Действительно, элементы произведения имеют вид $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_{ik} \Delta x_{jk} = (\Delta x_i, \Delta x_j) = \|\Delta x_i\|^2 \delta_{ij}$. В частности, для обратной матрицы справедливо

$$\bigl(\Delta x\bigr)^{-1} = \Delta x^\top \cdot \operatorname{diag}\bigl(\tfrac{1}{\|\Delta x_1\|^2}, \ldots, \tfrac{1}{\|\Delta x_n\|^2}\bigr). \tag{2}$$

О п р е д е л е н и е 1. Функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ называется S-*дифференцируемой* (или *дифференцируемой в себе*), если для любого $x \in \Omega$ существует конечный предел

$$\lim\nolimits_{*} F(x_0, x_1, \ldots, x_n), \tag{3}$$

где символ «$*$» означает, что предел вычисляется по всем таким симплексам $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \in \Omega_*^{n+1}$, что $x_0 \to x$, $x_1 \to x$, $\ldots$, $x_n \to x$. Другими словами, число $g(x)$ есть предел (3), если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U_x такая, что $\|F(x_0, x_1, \ldots, x_n) - g(x)\| < \varepsilon$ для любых $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \Omega \cap U_x$ таких, что $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \in \Omega_*^{n+1}$. Заметим еще, что (3) — это предел по множеству Ω_*^{n+1}, а точка $(x, x, \ldots, x) \in \Omega^{n+1}$ — точка прикосновения этого множества.

Л е м м а 1. *Если* $f : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ *есть функция* S*-дифференцируемая, то для любого* $x \in \Omega_0$ *существует* $\operatorname{grad} f(x)$ *и*

$$\lim\nolimits_{*} F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{grad} f(x). \tag{4}$$

Существование предела (3) влечет существование предела $\lim_{**} F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ (и их равенство), вычисленного по подмножеству $\Omega_{0\,**}^{n+1} \doteq \bigl\{ \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \in (\Omega_0)_*^{n+1} : \ \Delta x_{ij} = 0 \text{ п } i \neq j \bigr\}$, когда $x_0 \to x$, $x_1 \to x$, $\ldots$, $x_n \to x$. В этом случае необходимо $\Delta x_{ii} \neq 0$ при всех $i = 1, \ldots, n$, а для функции (1) справедливо $F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{col}\bigl(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x_{11}}, \ \ldots, \ \frac{f(x_n) - f(x_0)}{\Delta x_{nn}}\bigr)$. Поэтому

$$\lim\nolimits_{*} F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lim\nolimits_{***} \operatorname{col}\bigl(\tfrac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x_{11}}, \ \ldots, \ \tfrac{f(x_n) - f(x_0)}{\Delta x_{nn}}\bigr),$$

где последний предел вычисляется по подмножеству $\Omega^{n+1}_{0\,***} \doteq$ $\doteq \big\{ \langle x_0, x_1, \dots, x_n\rangle \in \Omega^{n+1}_{0\,**} : \ x_0 = x \big\}$ при $x_1 \to x, \dots, x_n \to x$. Но это и означает, что существует $\operatorname{grad} f(x)$ и справедливо (4).

Функция $f : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ называется *непрерывно дифференцируемой*, если для любого $x \in \Omega_0$ существует $\operatorname{grad} f(x)$ и функция $\operatorname{grad} f(\cdot) : \Omega_0 \to \mathbb{R}^n$ непрерывна. Непрерывная функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *гладкой*, если сужение $f : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемо и существует непрерывная функция $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ такая, что $\operatorname{grad} f(x) = g(x)$ для всех $x \in \Omega_0$.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы непрерывная функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ была S-дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы она была гладкой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Предел (3) порождает функцию $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $g(x) \doteq \lim_* F(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Пусть $x \in \Omega$ и $\varepsilon > 0$. Существует окрестность U_x такая, что $\|F(x_0, x_1, \dots, x_n) - g(x)\| < \varepsilon$ для любых $x_0, x_1, \dots, x_n \in \Omega \cap U_x$ таких, что $\langle x_0, x_1, \dots, x_n\rangle \in \Omega^{n+1}_*$. Для любого $y \in \Omega \cap U_x$ существует окрестность U_y такая, что $\|F(y_0, y_1, \dots, y_n) - g(y)\| < \varepsilon$ для любых $y_0, y_1, \dots, y_n \in \Omega \cap U_x \cap U_y$, что $\langle y_0, y_1, \dots, y_n\rangle \in \Omega^{n+1}_*$. Но для этих симплексов выполнено $\|F(y_0, y_1, \dots, y_n) - g(x)\| < \varepsilon$, поэтому $\|g(y) - g(x)\| < 2\varepsilon$ для любого $y \in \Omega \cap U_x$, следовательно, g — непрерывная функция. Согласно лемме 1 $g(x) = \operatorname{grad} f(x)$ для всех $x \in \Omega_0$, поэтому f — гладкая функция.

Достаточность. Зафиксируем $x \in \Omega$ и последовательность $\{ \langle x^k_0, x^k_1, \dots, x^k_n\rangle \}_{k=1}^{\infty}$ симплексов из Ω^{n+1}_* такую, что $\lim\limits_k x^k_i = x$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как f непрерывна, то F тоже непрерывна, поэтому существует последовательность $\{ \langle y^k_0, y^k_1, \dots, y^k_n\rangle \}_{k=1}^{\infty}$ симплексов такая, что

$$\operatorname{conv} \langle y^k_0, y^k_1, \dots, y^k_n\rangle \subset \operatorname{Int} \operatorname{conv} \langle x^k_0, x^k_1, \dots, x^k_n\rangle \subset \Omega_0$$

и $\|F(y^k_0, y^k_1, \dots, y^k_n) - F(x^k_0, x^k_1, \dots, x^k_n)\| < \varepsilon$. Очевидно, $y^k_i \underset{k}{\to} x$ при любом i, а множество $A \doteq \{x, y^1_0, y^2_0, \dots, y^k_0, \dots\}$ компактно.

Пусть $\Delta y_i^k \doteq y_i^k - y_0^k$ и $\Delta f_i^k \doteq f(y_i^k) - f(y_0^k)$. Поскольку f — гладкая, то $f : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Следовательно, существует функция $\lambda = \lambda(\xi, \eta)$, $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, такая, что $\lambda \to 0$ при $\|\eta\| \to 0$ равномерно по всем $\xi \in A$ и

$$\Delta f_i^k = \big(\operatorname{grad} f(y_0^k),\, \Delta y_i^k\big) + \lambda(y_0^k, \Delta y_i^k)\,\|\Delta y_i^k\|$$

для всех допустимых i и k. Согласно (2) справедлива цепочка

$$F(y_0^k, y_1^k, \ldots, y_n^k) = \big(\Delta y^k\big)^{-1} \cdot \operatorname{col}\big(\Delta f_1^k, \ldots, \Delta f_n^k\big) = \operatorname{grad} f(y_0^k) +$$

$$+ \big(\Delta y^k\big)^{-1} \cdot \operatorname{col}\big(\lambda(y_0^k, \Delta y_1^k)\,\|\Delta y_1^k\|,\ \ldots,\ \lambda(y_0^k, \Delta y_n^k)\,\|\Delta y_n^k\|\big) =$$

$$= g(y_0^k) + (\Delta y^k)^{\top} \cdot \operatorname{col}\Big(\frac{\lambda(y_0^k, \Delta y_1^k)}{\|\Delta y_1^k\|},\ \ldots,\ \frac{\lambda(y_0^k, \Delta y_n^k)}{\|\Delta y_n^k\|}\Big)$$

(заметим, что в силу гладкости f существует непрерывная функция $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ такая, что $\operatorname{grad} f(y) = g(y)$ для всех $y \in \Omega_0$). Следовательно, если $\sigma^k \doteq \big\|F(y_0^k, y_1^k, \ldots, y_n^n) - g(y_0^k)\big\|$, то

$$\sigma^k = \Big\|\operatorname{col}\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda(y_0^k, \Delta y_i^k)\,\frac{\Delta y_{i1}^k}{\|\Delta y_i^k\|},\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda(y_0^k, \Delta y_i^k)\,\frac{\Delta y_{in}^k}{\|\Delta y_i^k\|}\Big)\Big\|.$$

Поскольку $\lambda \rightrightarrows 0$, то существует шар $B_\delta(0)$ радиуса $\delta > 0$ такой, что $|\lambda(\xi, \eta)| < \varepsilon$ для любых $(\xi, \eta) \in A \times B_\delta(0)$.

Существует N_1 такое, что $\|y_i^k - x\| < \frac{\delta}{2}$ для любых $k > N_1$ и $i = 0, 1, \ldots, n$. В частности, $\|\Delta y_i^k\| < \delta$, то есть $\Delta y_i^k \in B_\delta(0)$, поэтому $|\lambda(y_0^k, \Delta y_i^k)| < \varepsilon$, а $\sigma^k < n^{3/2}\,\varepsilon$ для любого $k > N_1$.

В силу непрерывности функции g существует N_2 такое, что $\|g(y_0^k) - g(x)\| < \varepsilon$, следовательно, для всех $k > \max\{N_1, N_2\}$ имеет место оценка $\|F(x_0^k, x_1^k, \ldots, x_n^k) - g(x)\| < (2 + n^{3/2})\,\varepsilon$.

С л е д с т в и е 1. *Для того чтобы функция* $f\colon \Omega_0 \to \mathbb{R}$ *была* S*-дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывно дифференцируемой.*