УДК 517.911

© **В. Я. Дерр, Д. М. Кинзебулатов**
derr@uni.udm.ru, knzbltv@udm.net

# ОБ УМНОЖЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

**Ключевые слова:** обобщенные функции, умножение на правильные функции.

**Abstract.** We construct a new space of generalized functions where correct operation of multiplication of generalized function on a regulated (in general discontinuous) function is defined. An ordinary differential equation with new generalized functions as coefficients is considered.

Здесь вводится пространство обобщенных функций, допускающих умножение на правильные (в общем случае разрывные) функции. Это пространство, отличное от построенного в [1], позволяет корректно поставить задачу Коши для линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка, содержащих в качестве коэффициентов обобщенные функции.

Пусть $I = (a,b)$ — открытый интервал, возможно бесконечный. Через $\mathbb{G}$ обозначим банахову алгебру классов эквивалентных правильных функций, отличающихся лишь значениями в точках разрыва, с нормой $\|f\| = \sup\limits_{t\in I} \max\{|f(t+)|, |f(t-)|\}$ [1], через $\mathbb{C} \subset \mathbb{G}$ — подпространство непрерывных на $I$ функций.

Назовем полной вариацией $f \in \mathbb{G}$ величину (или символ $+\infty$) $\bigvee\limits_a^b(f) \doteq \sup\limits_{\tau} \sum_{k=1}^n |f(t_k-) - f(t_{k-1}+)|$, где $\tau = \{t_i\}_{i=0}^n$, $a < t_o < t_1 < ..., t_n < b$. Банахову алгебру элементов $f \in \mathbb{G}$, для которых $\bigvee\limits_a^b(f) < +\infty$ с нормой $\|f\| = |f(a+)| + \bigvee\limits_a^b(f)$ обозначим $\mathbb{BV}$.

Множество функций, имеющих конечную вариацию на каждом $[a',b'] \subset I$ обозначим $\mathbb{B}Vl$. Полагаем также $\mathbb{C}BV \doteq \mathbb{C} \cap \mathbb{B}V$; Через $\mathbb{H}$ обозначим множество элементов $f \in \mathbb{B}V$, принимающих не более чем счетное множество значений с $f(a+) = 0$.

Пусть $\mathbb{H}C \doteq \mathbb{C} \oplus \mathbb{H}$, $\mathbb{H}l = \mathbb{H} \cap \mathbb{B}Vl$, $\mathbb{H}Cl \doteq \mathbb{C} \oplus \mathbb{H}l$.

## § 1. Основные и обобщенные функции

**1.1.** Пусть $\mathbb{X}$ — одно из пространств $\mathbb{G}$, или $\mathbb{H}Cl$, или $\mathbb{B}Vl$; в первом и втором случаях $\mathbb{Y} = \mathbb{B}Vl$, $\mathbb{Z} = \mathbb{C}$, в третьем — $\mathbb{Y} = \mathbb{H}Cl$, $\mathbb{Z} = \mathbb{C}BV$.

Через $\mathcal{X}$ обозначим множество финитных элементов из $\mathbb{X}$, то есть таких $\varphi \in \mathbb{X}$, что существует отрезок $[a',b'] \subset I$, содержащий носитель $supp\,\varphi$; следующим образом введем в $\mathcal{X}$ сходимость: скажем, что последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}$ сходится к $\varphi \in \mathcal{X}$, если существует такой отрезок $[a',b'] \subset I$, что $supp\,\varphi_n \subset [a',b']$ $(n = 1, 2, \dots)$ и $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathbb{X}$ $(n \to \infty)$. Эта сходимость влечет равномерную сходимость односторонних пределов $\varphi_n(t\pm) \to \varphi(t\pm)$ $(n \to \infty)$ на любом $[a',b'] \subset I$.

Пусть $\mathcal{D}$ — пространство финитных на $I$ функций из $\mathbb{Z}$ в котором сходимость вводится так же, как выше в $\mathcal{X}$. Сходимость в $\mathcal{D}$ влечет равномерную сходимость на любом $[a',b'] \subset I$.

Пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{D}$, наделенные такой сходимостью, являются топологическими векторными пространствами. Очевидно, что $\mathcal{D}$ — подпространство $\mathcal{X}$ и сходимость в $\mathcal{X}$ индуцирует сходимость в $\mathcal{D}$. Кроме того, $\mathcal{D}$ $(\mathcal{X})$ — идеал в алгебре $\mathbb{Z}$ $(\mathbb{X})$. Если $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{X}$, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}$, $g_n \to g$ в $\mathbb{X}$, $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{X}$, то $g_n\varphi_n \to g\varphi$ в $\mathcal{X}$ $(n \to \infty)$.

Элементы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{D}$ называются *основными* функциями.

**1.2.**Рассмотрим сначала пространство $\mathcal{D}'$ линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}$ (обобщенных функций). В $\mathcal{D}'$ обычным путем вводятся операции сложения и умножения на вещественные числа, а также сходимость, которые превращают $\mathcal{D}'$ в топологическое векторное пространство, полное относительно введенной сходимости в следующем смысле: если для любой

$\varphi \in \mathcal{D}$ числовая последовательность $\{(f_n, \varphi)\}$ $(\{f_n\} \subset \mathcal{D}')$ сходится к некоторому числу, зависящему от $\varphi$, то определяемый этим числом функционал $f \in \mathcal{D}'$.

П р и м е р 1.1. *Дельта-функция Дирака* $\delta_s$, *сосредоточенная в точке* $s \in I$ *и определяемая равенством* $(\delta_s, \varphi) = \varphi(s)$ $(\varphi \in \mathcal{D})$ *представляет собой элемент* $\mathcal{D}'$.

Элементы $\mathcal{D}'$ допускают умножение на функции из $\mathbb{Z}$ по правилу: $(gf, \varphi) = (fg, \varphi) \doteq (f, g\varphi)$, где $f \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$, а $g \in \mathbb{Z}$, причем это умножение непрерывно.

Производную на $\mathcal{D}'$ определим только для регулярных функционалов, порожденных элементами $\mathbb{Y}$. Полагаем:

$$(f', \varphi) = \int_a^b \varphi(t)\, df(t) \quad \big(\varphi(\cdot) \in \mathcal{D},\ f(\cdot) \in \mathbb{Y}\big) \tag{1.1}$$

(интеграл в (1.1) — модификация интеграла $RS$ [2]).

П р и м е р 1.2. *Пусть* $\theta_s(t) = 0$ *при* $t < s$, $\theta_s(t) = 1$ *при* $t > s$ $(s \in I)$. *Согласно (1.1)*

$$(\theta_s', \varphi) = \int_a^b \varphi(t)\, d\theta_s(t) = \varphi(s) \quad (\varphi \in \mathcal{D}), \quad \textit{то есть} \quad \theta_s' = \delta_s.$$

**1.3** Множество $\mathcal{X}'$ линейных непрерывных функционалов на $\mathbb{X}$ представляет собой линейное пространство относительно сложения линейных функционалов и умножения их на вещественные числа. Сходимость в $\mathcal{X}'$ вводится как обычно: скажем, что последовательность $\{f_n\} \subset \mathcal{X}'$ сходится к $f \in \mathcal{X}'$, если для любого элемента $\varphi \in \mathcal{X}$ имеет место сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} (f, \varphi) = (f, \varphi)$.

Элементы $\mathcal{X}'$ называтся обобщенными функциями.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть последовательность* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такова, что для* $\varphi \in \mathcal{X}$ *последовательность* $\{(f_n, \varphi)\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится при* $n \to \infty$ . *Тогда функционал* $f$ *на* $\mathcal{X}$ , *определенный равенством* $(f, \varphi) = \lim\limits_{n\to\infty}(f_n, \varphi)$ , *является линейным непрерывным, то есть* $f \in \mathcal{X}'$ (*теорема о полноте* $\mathcal{X}'$) .

П р и м е р 1.3. *Регулярные функционалы. Пусть* $f(\cdot) \in \mathbb{Y}$, $\varphi \in \mathcal{X}$ ; *полагаем* $(f, \varphi) = \int\limits_a^b \varphi(t)f(t)\,dt$ .

П р и м е р 1.4. *Правую* $\delta_s^+$ *и левую* $\delta_s^-$ *дельта-функции определим равенствами*

$$(\delta_s^+, \varphi) = \varphi(s+), \quad (\delta_s^-, \varphi) = \varphi(s-) \quad (\varphi \in \mathcal{X},\ s \in I).$$

Функционалы $\delta_s^+$ , $\delta_s^-$ линейны, непрерывны и представляют собой продолжения дельта-функции $\delta_s$ с $\mathcal{D}$ на $\mathcal{X}$ , так как для $\varphi \in \mathcal{D}$ $(\delta_s^+, \varphi) = (\delta_s^-, \varphi) = (\delta_s, \varphi)$ .

Положим $\delta_s^\alpha = \alpha\delta_s^+ + (1-\alpha)\delta_s^-$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ .Согласно определению, $(\delta_s^\alpha, \varphi) = \alpha\varphi(s+) + (1-\alpha)\varphi(s-)$ . Дельта-функция $\delta_s^\alpha$ тоже является продолжением $\delta_s$ с $\mathcal{D}$ на $\mathcal{X}$ .

П р и м е р 1.5. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathbb{Y}$, $\varphi \in \mathcal{X}$ . *Определим* $f$ *равенством* $(f, \varphi) = (\alpha)\int \varphi(t)dg(t)$ .

Линейность функционала $f$ и его непрерывность следуют из свойств альфа-интеграла [2]. Положим $g(t) = \theta_s(t)$ . Тогда $(f, \varphi) = (\delta_s^{\alpha(s)}, \varphi)$ , то есть $f = \delta_s^{\alpha(s)}$ .

## § 2. Умножение на правильные функции

**2.1.** Введем в $\mathcal{X}'$ операцию умножения на функции из $\mathbb{X}$ (которые могут быть разрывными). Так как для $g \in \mathbb{X}$ и $\varphi \in \mathcal{X}$ $g\varphi \in \mathcal{X}$ , то полагаем $(gf, \varphi) = (fg, \varphi) \doteq (f, g\varphi)$ $(f \in \mathcal{X}')$ .

Т е о р е м а 2.1. *Пусть* $f_n \to f$ *в* $\mathcal{X}'$ , $g_n \to g$ *в* $\mathbb{X}$ $(n \to \infty)$ . *Тогда* $g_nf_n \to gf$ *в* $\mathcal{X}'$ $(n \to \infty)$ (*непрерывность умножения*).

П р и м е р 2.1. *Произведение* $\theta_s\delta_s^\alpha$ .

Для $\varphi \in \mathcal{X}$ $(\theta_s\delta_s^\alpha, \varphi) = (\delta_s^\alpha, \theta_s\varphi) = \alpha(s)\varphi(s+) = (\alpha\delta_s^+, \varphi)$ ; в частности $(\theta_s\delta_s^+, \varphi) = \varphi(s+)$, $(\theta_s\delta_s^-, \varphi) = 0$ . Это значит, $\theta_s\delta_s^\alpha = \alpha(s)\delta_s^+$, $\theta_s\delta_s^+ = \delta_s^+$, $\theta_s\delta_s^- = 0$ . На основных функциях из $\mathcal{D}$ получаем "привычное" равенство $\theta_s\delta_s = \alpha(s)\delta_s$ .

**2.2.** Обобщенные функции из $\mathcal{X}'$ можно рассматривать как некоторое множество продолжений линейных непрерывных функционалов с $\mathcal{D}$ на $\mathcal{X}$ .

Пусть $\Gamma : \mathcal{X}' \to \mathcal{D}'$ — оператор сужения, который каждому функционалу $f \in \mathcal{X}'$ ставит в соответствие его сужение $f|_{\mathcal{D}}$ на $\mathcal{D}$. Оператор $\Gamma$ линеен, непрерывен и сюръективен; его ядро $\operatorname{Ker}\Gamma \neq \{0\}$ — линейное (замкнутое) подпространство $\mathcal{X}'$ .

Т е о р е м а 2.2. *Для каждого* $f \in ker\ \Gamma$ *найдется функция* $\beta(\cdot,\cdot) : I^2 \to \mathbb{R}$ , *обладающая свойствами:*

*1)* $\beta(\cdot, s) \in \mathbb{C}$ *при каждом* $s \in I$ *;*

*2)* $\beta(t, \cdot) \in \mathbb{X}$ *при каждом* $t \in I$ *;*

*3)* $\int\limits_a^b \mid \beta(s, s \mid ds < +\infty$ , *что*

$$f(t) = \int\limits_a^b \beta(t,s)\left(\delta_s^+(t) - \delta_s^-(t)\right)\, ds. \tag{2.1}$$

Обозначим через $\mathcal{P} : \mathcal{D}' \to \mathcal{X}'$ (многозначный) оператор продолжения линейных непрерывных функционалов с $\mathcal{D}$ на $\mathcal{X}$ : для $f \in \mathcal{D}'$ $\mathcal{P}(f)$ представляет собой множество всех продолжений $f$ с $\mathcal{D}$ на $\mathcal{X}$ .

Т е о р е м а 2.3. *Для любого* $f \in \mathcal{D}'$ $\mathcal{P}(f) \in \mathcal{X}'/\operatorname{Ker}\Gamma$ .

**2.3.** На регулярных элементах $\mathcal{X}'$ , порожденных элементами $\mathbb{Y}$ определим операцию дифференцирования аналогично (1.1).

Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}$ и $f$ — регулярная обобщенная функция, порожденная функцией $f(\cdot) \in \mathbb{Y}$. Полагаем

$$(f', \varphi) = (\alpha)\int \varphi(t)\, df(t) \quad (\varphi \in \mathcal{X}). \tag{2.2}$$

Равенство (2.2) определяет линейный непрерывный функционал на $\mathcal{X}$, то есть $f' \in \mathcal{X}'$.

**2.4** Рассмотрим $n \times n$-матричное дифференциальное уравнение с начальным условием в точке $t_0 \in I$.

$$X' = M'(t)X + F'(t), \qquad X(t_0-) = X_0, \tag{2.3}$$

где элементы $F$ и $M$ принадлежат $\mathbb{Y}$. Решение $X \in \mathbb{B}V^n$ понимается в смысле операций и равенства в пространстве $\mathcal{X}'$: для любой $\varphi \in \mathcal{X}$ выполняется равенство

$$(X', \varphi) = (M'X, \varphi) + (F', \varphi). \tag{2.4}$$

($\mathbb{B}V^n$ – пространство вектор-функций с компонентами из $\mathbb{B}V$.)

Т е о р е м а 2.4. *Всякое решение задачи Коши* (*2.3*) *удовлетворяет уравнению*

$$X(t-) = (\alpha)\int_{(t_0,t)} (dM(s))X(s) + X_0 + F(t-) - F(t_0-) \quad (t \in I).$$

* * *


1. Дерр В. Я., Кинзебулатов Д. М.Дифференциальные уравнения с обобщенными функциями, допускающими умножение на разрывные функции // Вестн. Удм. ун-та. 2005. №1. С. 35-58.
2. Дерр В. Я., Кинзебулатов Д. М. Альфа-интеграл типа Стилтьеса // Вестн. Удм. ун-та. 2006. №1. С. 41-65.