Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. №2(36)

УДК 517.9

© **Т. В. Жуковская**
zukovskys@mail.ru

МАКСИМАЛЬНЫЙ ПРОМЕЖУТОК СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, задача Коши, максимальный промежуток существования решения.

Abstract. We received conditions of solveness and found evaluations for maximum interval of existing a solution of functional-differential equation.

Введение

Большое значение в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, нелинейных интегральных уравнений Вольтерра, теории управления, численных методах имеют оценки максимального промежутка существования решения. Например, область определения непрерывного решения уравнения Рикатти является промежутком неосцилляции решений соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка [1, с. 42]. При численном решении дифференциальных уравнений, как правило, предварительно оценивается промежуток существования решений, иначе будет построено лишенное смысла решение за границами этого промежутка.

Здесь исследуется разрешимость и предлагаются оценки промежутка существования решения функционально-дифференциального уравнения.

§ 1. Основные понятия

Пусть L — пространство суммируемых функций $y:[a,b] \to \mathbb{R}^m$ с нормой $\|y\|_L = \int_a^b |y(s)|\,ds$; AC — пространство абсолютно непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $\|x\|_{AC} = \|x'\|_L + |x(a)|$; $AC_\alpha = \{ x \in AC : x(a) = \alpha \}$. Пусть оператор $F : AC \to L$ является вольтерровым (по А. Н. Тихонову). Рассмотрим задачу Коши для функционально-дифференциального уравнения

$$x' = Fx, \quad x(a) = \alpha. \tag{1.1}$$

О п р е д е л е н и е 1.1. *Глобальным решением* функционально-дифференциального уравнения называем абсолютно непрерывную функцию $z : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющую этому уравнению почти всюду на $[a,b]$. *Локальным решением* называем абсолютно непрерывную функцию $z_\mu(\cdot)$, определенную на $[a, a+\mu]$, $\mu \in (0, b-a)$, и удовлетворяющую почти всюду на этом отрезке функционально-дифференциальному уравнению. *Предельно продолженным решением* называем функцию $z_\eta : [a, a+\eta) \to \mathbb{R}^m$, сужение которой на любой отрезок $[a, a+\mu]$, $\mu \in (0,\eta)$, является локальным решением и $\lim\limits_{\mu \to \eta - 0} \int_a^{a+\mu} |z'_\eta(s)|\,ds = \infty$.

§ 2. Максимальный промежуток существования решения

В случае, когда задача Коши (1.1) имеет бесконечное множество $\{z_\eta\}$ предельно продолженных решений, интерес представляют оценки нижней грани η_0 длин η интервалов $[a, a+\eta)$, на которых определены предельно продолженные решения. Для уравнений и включений в пространстве непрерывных функций такую задачу поставил А.И. Булгаков. В [2] он доказал, что $\eta_0 > 0$. Здесь рассматриваются оценки длины максимального промежутка существования решения задачи Коши (1.1).

Т е о р е м а 2.1. *Пусть существуют такие числа* $q < 1$, $\tau > 0$, *что:*

1) *для всех* $\gamma \in (0,\, \tau)$ *и всех* $x, \widehat{x} \in AC_\alpha$

$$\int_a^{a+\gamma} |(Fx)(s) - (F\widehat{x})(s)|\, ds \leqslant q \cdot \int_a^{a+\gamma} |x'(s) - \widehat{x}'(s)|\, ds;$$

2) *для всех* $\xi, \gamma \in (0,\, b-a]$, $\xi < \gamma < \xi + \tau$ *и всех* $x, \widehat{x} \in AC_\alpha$ *таких, что* $x(t) = \widehat{x}(t)$, $t \in [a, a{+}\xi]$ *выполнено неравенство*

$$\int_{a+\xi}^{a+\gamma} |(Fx)(s) - (F\widehat{x})(s)|\, ds \leqslant q \cdot \int_{a+\xi}^{a+\gamma} |x'(s) - \widehat{x}'(s)|\, ds\,.$$

Тогда существует единственное глобальное решение z_α *задачи* (1.1), *а всякое локальное решение является его частью.*

Т е о р е м а 2.2. *Пусть для всех* $\varrho > 0$, $\varepsilon > 0$ *найдётся такое* $\tau > 0$, *что для любого* $x \in AC_\alpha$, *удовлетворяющего неравенству* $\|x\| \leqslant \varrho$, *и всех* $\xi, \gamma \in [0, b-a]$ *таких, что* $\xi < \gamma < \xi + \tau$, *выполнено неравенство*

$$\int_{a+\xi}^{a+\gamma} |(Fx)(s)|\, ds < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Тогда для любого ϱ_0 *существует такое* $\sigma > 0$, *что если на отрезке* $[a, a+\mu]$ *определено некоторое локальное решение* $z_{\alpha\,\mu}$ *задачи* (1.1), *удовлетворяющее неравенству*

$$\int_a^{a+\mu} |z_{\alpha\,\mu}(s)|\, ds \geqslant \varrho_0,$$

то $\mu \geqslant \sigma$. *В частном случае, существует такое положительное* β, *что для области определения* $[a, a{+}\eta)$ *любого предельно продолженного решения* $z_{\alpha\,\eta}$ *задачи* (1.1) *выполнено* $\eta > \beta$.

Отметим, что если оператор $F : AC \to L$ является вполне непрерывным, то условие (2.1) выполнено.

Пусть $\overline{\tau}(\varepsilon, \varrho)$ — точная верхняя грань всевозможных чисел $\tau > 0$, удовлетворяющих условию (2.1).

Т е о р е м а 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Тогда утверждение теоремы имеет место при любом* $\beta > 0$, *таком что*

$$\beta < \lim_{\varepsilon \to 0} \int_2^\infty \overline{\tau}_A(\varepsilon, t\varepsilon) dt.$$

В частном случае, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_2^\infty \overline{\tau}_A(\varepsilon, t\varepsilon) dt > b - a,$$

то задача Коши (1.1) *не имеет предельно продолженных решений, то есть каждое локальное решение продолжаемо до глобального.*

* * *

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
2. Булгаков А.И. Элементы теории краевых задач для функционально-дифференциальных включений: Дис. д-ра физ.-мат. наук. Тамбов: Тамбов. ин-т хим. машиностроения, 1993. 300 с.