Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. №2(36)

УДК 517.9

© **Е. С. Жуковский**
zukovskys@mail.ru

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ [1]

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, задача Коши, вольтерровый по А. Н. Тихонову оператор, непрерывная зависимость решений от начальных условий.

Abstract. We offer confirmations about solveness and persistent dependentness from initial conditions of functional-differential equations with operator of volterra according to A. N. Tihonov, which acts in arbitrary Banah spaces. With proper chose of spaces those results can be used to investigate not only classical functional-differential equations, but singular, impulsive, hybrid systems and so on.

Введение

Функционально-дифференциальное уравнение — очень широкий объект. Свойства внешне похожих уравнений могут оказаться диаметрально противоположными, и наоборот, уравнения, принадлежащие различным классам могут иметь глубокое внутреннее родство. В книге [1] предлагается рассматривать приводимые функционально-дифференциальные уравнения, то есть равносильные уравнениям с вполне непрерывными операторами. Мы считаем, что, наряду с компактностью оператора, порождаемого функционально-дифференциальным уравнением, важнейшей

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 04-01-00324.

характеристикой является вольтерровость. Уравнения с вольтерровыми операторами наиболее близки обыкновенному дифференциальному уравнению. При описании динамики любых явлений уравнения с вольтерровыми операторами моделируют зависимость настоящего состояния объекта от его развития, его прошлого.

Ниже предлагаются утверждения о разрешимости и непрерывной зависимости от начальных условий функционально-дифференциальных уравнений с вольтерровыми по А. Н. Тихонову операторами, действующими в произвольных банаховых пространствах. При соответствующем выборе пространств полученные результаты можно применить к исследованию не только классических функционально-дифференциальных уравнений, но и сингулярных, импульсных, гибридных систем. Отметим, что рассматриваемые факты являются следствием утверждений [2] об обобщенно вольтерровых операторах.

§ 1. Обозначения. Объект исследования

Пусть B — банахово пространство функций $y:[a,b]\to\mathbb{R}^m$, и пусть для любого $\gamma\in(0,b{-}a)$ и для любой сходящейся последовательности $\{y_i\}\subset B$, $\|y_i-y\|_B\to 0$, из $y_i(t)=0$, $i=1,2,\ldots$, при $t\in[a,a{+}\gamma]$ следует $y(t)=0$ при $t\in[a,a{+}\gamma]$. Будем предполагать, что банахово пространство D функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ изоморфно и изометрично прямому произведению $B\times\mathbb{R}^n$, изоморфизм $D\cong B\times\mathbb{R}^n$ задан операторами $\binom{\delta}{r}:D\to B\times\mathbb{R}^n$, $(\Lambda,Y)=\binom{\delta}{r}^{-1}:B\times\mathbb{R}^n\to D$, где $\delta:D\to B$, $\Lambda:B\to D$ вольтерровые (по А. Н. Тихонову) операторы, функционал $r:D\to\mathbb{R}^n$ обладает тем свойством, что для любых $\varepsilon>0$, $x\in D$ из $x(t)=0$ на $[a,a{+}\varepsilon]$ следует $rx=0$.

Пусть оператор $F:D\to B$ является вольтерровым. Рассмотрим задачу Коши для функционально-дифференциального уравнения

$$\delta x=Fx,\quad rx=\alpha. \tag{1.1}$$

Обозначим B_γ — пространство сужений функций из B на множество $[a, a+\gamma]$. Норму зададим формулой $\|y_\gamma\|_{B_\gamma} = \inf \|y\|_B$, где нижняя грань берется по всем продолжениям $y \in B$ функции $y_\gamma \in B_\gamma$. Определим операторы $\Pi_\gamma^B : B \to B_\gamma$, $(\Pi_\gamma^B y)(t) = y(t)$ при $t \in [a, a+\gamma]$; $Z^B : (0, b-a] \times B \to \mathbb{R}$, $Z^B(\gamma, y) = \| \Pi_\gamma^B y \|_{B_\gamma}$. Доопределим отображение Z^B значением

$$Z^B(0, y) = \lim_{\gamma \to 0+0} Z^B(\gamma, y).$$

Аналогично построим пространство D_γ и зададим операторы $\Pi_\gamma^D : D \to D_\gamma$, $Z^D : [0,\, b-a] \times D \to \mathbb{R}$.

§ 2. Корректная разрешимость задачи Коши

Т е о р е м а 2.1. *Пусть существуют такие числа* $q < 1$, $\tau > 0$, *что:* 1) *для всех* $\gamma \in (0, \tau)$ *и* $x, \widehat{x} \in D$ *выполнено неравенство*

$$Z^B(\gamma, Fx - F\widehat{x}) \leqslant q \cdot Z^D(\gamma, x - \widehat{x}); \tag{2.1}$$

2) *неравенство* (2.1) *выполнено также для всех* $\gamma \in [\tau,\, b-a]$ *и всех таких* $x, \widehat{x} \in D$, *что* $x(t) = \widehat{x}(t)$ *при* $t \in [a,\; a + \gamma - \tau]$.

Тогда задача (1.1) *корректно разрешима: при любом* $\alpha \in \mathbb{R}^n$ *существует единственное глобальное* (*то есть определенное на* $[a, b]$) *решение* z_α, *всякое локальное решение является его частью, для любой сходящейся последовательности* $\{\alpha_i\} \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha_i \to \alpha$ *последовательность решений* z_{α_i} *задач Коши*

$$\delta x_i = F x_i, \quad r x_i = \alpha_i,$$

сходится к решению z_α *задачи* (1.1), $\|z_{\alpha_i} - z_\alpha\|_D \to 0$.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть оператор* $F : D \to B$ *вполне непрерывен и имеют место условия:* 1) *существует такая константа* k, *что для всех* $x \in D$ *выполнено неравенство* $Z^B(0, Fx) \leqslant k$;
2) *для любых* $\varrho > 0$, $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\tau > 0$, *что для*

любого $x \in D$ *с нормой* $\|x\| \leqslant \rho$, *и любых* $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, b-a]$, *удовлетворяющих неравенству* $|\gamma_2 - \gamma_1| < \tau$, *выполнено*

$$|Z^B(\gamma_2, Fx) - Z^B(\gamma_1, Fx)| < \varepsilon.$$

Тогда для каждого α *задача* (1.1) *локально разрешима, всякое локальное решение продолжаемо до глобального или предельно продолженного. Далее, для любого* $A > 0$ *существует такое* $\beta > 0$, *что:*

a) для области определения $[a, a+\eta)$ *любого предельно продолженного решения задачи* (1.1) *с начальным значением* $|\alpha| \leqslant A$ *выполнено неравенство* $\eta > \beta$;

b) множество всех локальных решений задачи (1.1), *удовлетворяющих условию* $|\alpha| \leqslant A$ *и определенных на* $[a, a+\beta]$, *компактно в пространстве* D_β.

* * *

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.
2. Жуковский Е.С. Нелинейное уравнение Вольтерра в банаховом функциональном пространстве // Изв. вузов. Математика. 2005. № 10 (521). С. 17-28.