Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. №2(36)

УДК 517.911

© **Д. М. Кинзебулатов**
damir@math.ucalgary.ca

ОДНОСТОРОННИЕ МЕРЫ ДИРАКА И ИГРА С РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИЕЙ ВЫИГРЫША

Ключевые слова: мера Дирака, разрывная плотность, смешанные стратегии.

Abstract. We construct a space of measures where the consideration of the measures with discontinuous densities is possible. As is shown, consideration of certain games with discontinuous payoff functions in the constructed space of measures allows us to provide an existence of Nash equilibria.

§ 1. Односторонние меры Дирака

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – открытый интервал, в общем случае неограниченный. Обозначим как $R(I)$ алгебру конечных объединений промежутков в I. Множества S_1, $S_2 \in R(I)$ полагаем эквивалентыми, если $S_1 \setminus S_2$, $S_2 \setminus S_1$ конечны. Полученную алгебру классов эквивалентности обозначим как $\mathcal{R}(I)$. Элементы $\mathcal{R}(I)$ назовем *измеримыми множествами.*

О п р е д е л е н и е 1.1. Мерой называется аддитивное отображение $\mathcal{R}(I) \mapsto \mathbb{R}$.

П р и м е р 1.1. Пусть $f \in \mathbb{L}_{\text{loc}}(I)$ – локально-суммируемая функция. Определим *регулярную меру* с помощью равенства

$$\mu_f(S) \doteq \int_S f(t)dt \quad \big(S \in \mathcal{R}(I)\big).$$

П р и м е р 1.2. Пусть $\tau \in I$. Определим меры

$$\delta_\tau^+(S) \doteq \chi_S(\tau+), \quad \delta_\tau^-(S) \doteq \chi_S(\tau-) \quad \bigl(S \in \mathcal{R}(I)\bigr),$$

где χ_S – характеристическая функция S (определяемая с точностью до конечного множества), которые назовем *правой и левой мерами Дирака* соответственно. В общем случае определим

$$\delta_\tau^\alpha(S) \doteq \alpha\chi_S(\tau+) + (1-\alpha)\chi_S(\tau-) \quad \bigl(\alpha \in \mathbb{R},\ S \in \mathcal{R}(I)\bigr).$$

В множестве мер $\mathfrak{M}(I)$ вводятся линейные операции и операция предельного перехода: $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathfrak{M}(I)$ сходится к $\mu \in \mathfrak{M}(I)$, если $\mu_k(S) \to \mu(S)$ для всех $S \in \mathcal{R}(I)$.

П р и м е р 1.3. Пусть $f_k = k\bigl(\alpha\chi_{(\tau,\tau+\frac{1}{2k})} + (1-\alpha)\chi_{(\tau-\frac{1}{2k},\tau)}\bigr)$. Тогда имеет место сходимость $\mu_{f_k} \to \delta_\tau^\alpha$ в $\mathfrak{M}(I)$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Функция $g : I \mapsto \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если

$$\{t \in I \ : \ g(t) < c\} \in \mathcal{R}(I) \text{ для всех } c \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

П р и м е р 1.4. Монотонная функция $g : I \mapsto \mathbb{R}$ измерима, так как для всех $c \in \mathbb{R}$ множество (1.1) – промежуток в I .

Определим интеграл Лебега в $\mathfrak{M}(I)$. Пусть g ограничена и измерима, $\mu \in \mathfrak{M}(I)$. Пусть сначала интервал I ограничен, задано $d = \{s_k\}_{k=0}^n : s_0 < \cdots < s_n$, $g(t) \in (s_0, s_n)$ ($t \in I$). Множество $\Lambda_K = \{t \in I \ : \ g(t) \in [s_{k-1}, s_k)\}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ измеримо, так как Λ_k представимо в виде разности множеств (1.1). Определим

$$\int_I g d\mu \doteq \inf_d \left(\sum_{k=1}^n s_k \mu(\Lambda_k)\right) = \sup_d \left(\sum_{k=1}^n s_{k-1}\mu(\Lambda_k)\right),$$

при условии, что имеет место последнее равенство. Аналогично определяется значение интеграла по произвольному $S \in \mathcal{R}(I)$. Пусть интервал $I = (a,b)$ не ограничен. Найдется последовательность ограниченных интервалов $\{I_k\}_{k=1}^\infty$, $I_k = (a_k, b_k)$, $a_k \to a+$, $b_k \to b-$ ($k \to \infty$). Определим $\int_I g d\mu \doteq \lim_{k\to\infty} \int_{I_k} g d\mu$.

П р и м е р 1.5. Пусть $f \in \mathbb{L}_{\rm loc}(I)$, $g : I \mapsto \mathbb{R}$ – ограничена и измерима. Тогда

$$\int_I g d\mu_f = \int_I g(t) f(t) dt,$$

где μ_f – регулярная мера (пример 1.1).

П р и м е р 1.6. Пусть $g : I \mapsto \mathbb{R}$ ограничена и монотонна. Тогда

$$\int_I g d\delta_\tau^\alpha = \alpha g(\tau+) + (1-\alpha) g(\tau-). \tag{1.2}$$

Равенство (1.6) получается также при замене δ_τ^α на элементы $\{\mu_{f_k}\}_{k=1}^\infty$, где μ_{f_k} – регулярная мера, $\mu_{f_k} \to \delta_\tau^\alpha$ в $\mathfrak{M}(I)$ (пример 1.3). Сравнивая полученное равенство с [2] находим, что зачение интеграла Лебега в $\mathfrak{M}(I)$ совпадает со зачением альфа-интеграла типа Стилтьеса, введенного в связи с построением пространства обобщенных функций с разрывными основными функциями [1]. Отметим, что из (1.6) следует существование меры Дирака с разрывной плотностью.

Пусть $P : I \times I \to \mathbb{R}$ такова, что $P(\cdot, s)$, $P(t, \cdot)$ ограничены и измеримы для почти всех $t, s \in I$. Определим для $\mu, \nu \in \mathfrak{M}(I)$

$$\int_{T \times S} P d\mu d\nu \doteq \int_T \left(\int_S P(\cdot, s) d\mu \right) d\nu = \int_S \left(\int_T P(t, \cdot) d\nu \right) d\mu \tag{1.3}$$

где $T, S \in \mathcal{R}(I)$, если имеет место последнее равенство.

§ 2. Пример игры с разрывной функцией выигрыша

Наряду с $\mathfrak{M}(I)$ будем рассматривать пространство $\mathfrak{B}(I)$ мер Лебега-Стилтьеса на I. Пусть $I = (-1, 1)$. Рассмотрим антагонистическую игру $G = \langle T, S, P \rangle$, где $T = S = (-1, 1) \setminus \{0\}$ – множества стратегий, с разрывной функцией выигрыша

$$P(t, s) = \begin{cases} \alpha, & t > 0,\ s > 0,\ t + s < 1, \\ \beta & t < 0,\ s < 0,\ t + s > -1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\alpha, \beta > 0$. Можно показать отсутствие в G положения равновесия по Нэшу. Рассмотрим игру $\bar{G} = \langle \bar{T}, \bar{S}, \bar{P} \rangle$,

$$\bar{T} = \bar{S} = \left\{ \mu \in \mathfrak{B}(I) : \mu \text{ регулярная}, \ \mu \geqslant 0, \ \int_I d\mu = 1 \right\},$$

$$\bar{P}(\mu, \nu) = \int_{T \times S} P d\mu d\nu$$

(классический интеграл Лебега), где $\mu \in \bar{T}$, $\nu \in \bar{S}$. Можно показать, что $\bar{G}$ не имеет положения равновесия. Будем рассматривать игру $\hat{G} = \langle \hat{T}, \hat{S}, \hat{P} \rangle$,

$$\hat{T} = \hat{S} = \left\{ \mu \in \mathfrak{M}(I) : \mu \geqslant 0, \ \int_I d\mu = 1 \right\}, \quad \hat{P}(\mu, \nu) = \int_{T \times S} P d\mu d\nu$$

(интеграл Лебега в $\mathfrak{M}(I)$, см. (1.3)), где $\mu \in \hat{T}$, $\nu \in \hat{S}$.

Т е о р е м а 2.1. *Пара мер Дирака* $(\delta_0^\gamma, \delta_0^\gamma) \in \hat{T} \times \hat{S}$, *где*

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

образует положение равновесия в $\hat{G}$ (*см. примеры 1.2 и 1.6*).

* * *

1. Дерр В. Я., Кинзебулатов Д. М. Обобщенные функции с разрывными основными функциями и линейные дифференциальные уравнения // Вестн. Удм. ун-та. 2005. № 1. С. 35–58.
2. Дерр В. Я., Кинзебулатов Д. М. Альфа-интеграл типа Стилтьеса // Вестн. Удм. ун-та. 2006. № 1. С. 41–62.