Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. №2(36)

УДК 517.977

© **В. В. Лукьянов**
imi@uni.udm.ru

ЗАДАЧИ ПОЗИЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ[1]

Ключевые слова: позиционное управление, задача быстродействия, линейные управляемые системы, чебышевские системы.

Abstract. The optimal positional control problem for a nonlinear nonstationary systems of differential equations is considered. The characteristics of certain class of systems is studied. The positional control is constructed for this class of systems.

§ 1. Докритические системы

Рассмотрим линейную управляемую нестационарную систему

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |u| \leqslant 1, \tag{1.1}$$

где матрица $A(t)$ и вектор $b(t)$ непрерывны. Допустимыми будем считать все измеримые управления, значения которых не превосходят единицы по модулю. Множество всех допустимых управлений обозначим символом $\mathcal{U}$.

Пусть $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ — произвольная фундаментальная система решений сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\psi A(t).$$

Для $i = 1, \ldots, n$ определим функции $\xi_i(t) \doteq \psi_i(t)b(t)$. Для каждого t_0 обозначим через $\sigma(t_0)$ точную верхнюю грань таких

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 06-01-00258).

$\sigma > 0$, что на полуинтервале $I_{t_0} = [t_0, t_0 + \sigma)$ совокупность функций $\xi_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ образует чебышевскую систему. Это означает, что любая нетривиальная линейная комбинация $\xi(t)$ функций $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$ имеет на I_{t_0} не более $n-1$ геометрически различных (то есть без учета кратностей) нулей. Таким образом, определена функция $\sigma\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ [1, 2]. Очевидно, что эта функция не зависит от того, какие конкретно функции $\psi_i(t)$ были выбраны. Систему (1.1) будем называть докритической, если для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\sigma(t) > 0$.

Функцией быстродействия в нуль называется функция

$$\Theta(t_0, x_0) \doteq \min_{u \in \mathcal{U}} \{\theta \geqslant 0\colon\ x(t_0 + \theta, t_0, x_0, u(\cdot)) = 0\},$$

где $x(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ — решение системы (1.1) с управлением $u(\cdot)$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$. Расширенное множество управляемости определяется следующим образом:

$$\mathfrak{D} \doteq \{(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+n}\colon\ \Theta(t_0, x_0) \leqslant \sigma(t_0)\}.$$

Кроме того, определим расширенное множество управляемости за время θ:

$$\mathfrak{D}_\theta = \{(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+n}\colon\ \Theta(t_0, x_0) \leqslant \theta\}.$$

Для каждого $k = 0, \ldots, n$ и любого $t \in \mathbb{R}$ определим многообразия

$$M^0(t) \doteq \{0\}, \quad M^k(t) \doteq \{\tau = (\tau_{n-k+1}, \ldots, \tau_{n-1}, \tau_n):\\ 0 < \tau_{n-k+1} < \cdots < \tau_{n-1} < \tau_n < \sigma(t)\},$$

$$\mathcal{M}^{1+k} = \{(t, x)\colon\ x \in M^k(t)\}.$$

Всякой точке $p = (t, \tau)$, где $\tau = (\tau_{n-k+1}, \ldots, \tau_{n-1}, \tau_n)$ поставим в соответствие точку $q = (t, x)$, где $x = 0$ при $k = 0$, а при $k \in \{1, \ldots, n\}$ точка $x(p)$ определена равенством

$$x(p) \doteq -\sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int_{t+\tau_i}^{t+\tau_{i+1}} X(t, s) b(s) ds, \tag{1.2}$$

где $\tau_{n-k} = 0$. Таким образом, для каждого k задана функция $q = F_+^{1+k}(p)$. Пусть, теперь, $\mathcal{N}_+^{1+k} \doteq F_+^{1+k}(\mathcal{M}^{1+k})$, где $1 \leqslant k \leqslant n$. При $k = 0$ пусть $\mathcal{N}_+^1 = \mathcal{N}_-^1 \doteq \{(t,0) : \ t \in \mathbb{R}\}$. Аналогично определим функции F_-^{1+k} и множества $\mathcal{N}_-^{1+k}$. Пусть $\mathcal{N}^{1+k} = \mathcal{N}_+^{1+k} \bigcup \mathcal{N}_-^{1+k}$, $\mathcal{N}^1 = \mathcal{N}_+^1 = \mathcal{N}_-^1$.

Оказывается (см. [1, 2]), что множества $\mathcal{N}_+^{1+k}$ и $\mathcal{N}_-^{1+k}$ являются многообразиями класса C^1.

§ 2. Позиционное управление

О п р е д е л е н и е 2.1. Суперпозиционно измеримую функцию $u_{\mathcal{F}} : \mathfrak{D} \to [-1,1]$ будем называть $\mathcal{F}$-позиционным управлением для системы (1.1), если для любой точки $(t_0, x_0) \in \operatorname{int}\mathfrak{D}$ решение в смысле Каратеодори $x(t,t_0,x_0)$ задачи

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_0) = x_0$$

при $u = u_{\mathcal{F}}(t,x)$ существует на полуоси $[t_0, +\infty)$ и попадает в нуль за конечное время. Если, кроме того, это решение единственно, и $x(t,t_0,x_0) \equiv 0$ для $t \geqslant t_0 + \Theta(t_0,x_0)$, то такую функцию $u_{\mathcal{F}}$ будем называть оптимальным в смысле быстродействия $\mathcal{F}$-позиционным управлением для системы (1.1) (сокращенно, оптимальным $\mathcal{F}$-управлением).

В силу определения решений Филиппова [3], для построения оптимального $\mathcal{F}$-управления нет необходимости определять $u_{\mathcal{F}}(t,x)$ в каждой точке внутренности расширенного множества управляемости $\mathfrak{D}$; достаточно построить $u_{\mathcal{F}}(t,x)$ на множестве полной меры.

Т е о р е м а 2.1 ([1]). *Пусть система* (1.1) *докритическая. Тогда функция*

$$\widehat{u}_{\mathcal{F}}(t,x) = \begin{cases} 1, & (t,x) \in \mathcal{N}_+^{1+n}, \\ -1, & (t,x) \in \mathcal{N}_-^{1+n} \end{cases} \tag{2.1}$$

доставляет оптимальное $\mathcal{F}$*-управление для системы* (1.1).

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u + w(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |u| \leqslant 1, \tag{2.2}$$

где функции $A(t)$, $b(t)$ непрерывны, существует такое $r > 0$, что для линейной системы (1.1) при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено $\sigma(t) \geqslant r$, а функция $w\colon \mathfrak{D} \to \mathbb{R}^n$ непрерывна в своей области определения и $w(t,0) \equiv 0$.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть* $n = 2$ *и выполнены следующие условия:*

1) *существует* $\theta > 0$ *такое, что* $\mathfrak{D}_\theta \subseteq \mathfrak{D}$ *;*

2) *существует* $\alpha > 0$ *такая, что* $\frac{\partial\theta(t,x)}{\partial x} w(t,x) \leqslant 1 - \alpha$ *для всех* $(t,x) \in \mathcal{N}^{1+n} \cap \mathfrak{D}_\theta$.

Тогда управление $\widehat{u}_{\mathfrak{F}}$, *определенное равенством* (2.1), *является* $\mathfrak{F}$*-позиционным управлением для системы* (2.2) *в области* $\mathrm{int}\mathfrak{D}_\theta$, *то есть для каждой точки* $(t_0, x_0) \in \mathrm{int}\mathfrak{D}_\theta$ *найдется такой момент времени* $\vartheta(t_0,x_0) < \infty$, *что* $\mathfrak{F}$*-решение* $x(t,t_0,x_0)$ *системы* (2.2) *с управлением* $\widehat{u}_{\mathfrak{F}}$ *существует, и* $x(t_0 + \vartheta(t_0,x_0), t_0, x_0) = 0$, *причем выполнено неравенство* $\vartheta(t_0,x_0) \leqslant \Theta(t_0,x_0)/\alpha$.

Список литературы

1. Николаев С. Ф., Тонков Е. Л. Дифференцируемость функции быстродействия и позиционное управление линейной нестационарной системой // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. 1996. Вып. 2(8). С. 47–68.
2. Николаев С. Ф., Тонков Е. Л. Структура множества управляемости линейной докритической системы // Дифференциальные уравнения. 1999. Т 35, № 1. С. 107–115.
3. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.