Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. №2(36)

УДК 517.929

© **В. П. Максимов**
maksimov@econ.psu.ru

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ: КОНСТРУКТИВНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ, ДОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ, ПРИЛОЖЕНИЯ[1]

Ключевые слова: функционально–дифференциальные уравнения, задачи управления, доказательный вычислительный эксперимент.

Abstract. The general control problem for linear functional differential systems is considered. A technique of the computer–assisted study in the form of the so called Reliable Computing Experiment is described.

В связи с 50-летием Ижевского математического семинара, отмечаемым в рамках настоящей конференции, уместно вспомнить, что исследуя линейные краевые задачи, Семинар довольно часто обращался (в том числе и на неформальных заседаниях) к идее создания, как тогда говорили, "оператора в чемодане", который бы давал ответ на вопрос об однозначной разрешимости краевой задачи и строил функции Грина. Современное состояние Теории доказательного вычислительного эксперимента (ДВЭ) [1, 2] и вычислительных возможностей ноутбуков позволяет считать реализованной эту идею , казавшуюся в 60-е годы прошлого века совершенно фантастической (напомним, что единственная в то время в

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и программы «Университеты России — фундаментальные исследования».

Ижевске ЭВМ Минск-1 совсем не была приспособлена для реализации доказательных вычислений и занимала большую комнату).

Принципиальная возможность установления корректной разрешимости краевой задачи или задачи управления основана на том, что для широкого класса линейных функционально– дифференциальных уравнений множество всех решений допускает конечномерную параметризацию. Сохранение изучаемого свойства при малых возмущениях параметров задачи дает возможность заменить исходную задачу достаточно близкой, но более удобной для эффективного конечномерного описания и применения вычислительных процедур. Подробное описание такой технологии на примере исследования интегрального уравнения второго рода приводится в [3].

Ниже основная идея конструктивного (computer-assisted) исследования излагается применительно к линейным задачам управления для абстрактного функционально–дифференциального уравнения(АФДУ), приводится схема ДВЭ по исследованию задачи управления на разрешимость, обсуждаются возможности применения общих результатов при исследовании прикладных задач управления.

Линейным абстрактным функционально– дифференциальным уравнением [1] называется уравнение

$$\mathcal{L}x = f \tag{0.1}$$

с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L} : D \to B$, где B — банахово пространство, D— банахово пространство изоморфное прямому произведению $B \times R^n$ ($D \simeq B \times R^n$). Пусть $J = \{\Lambda, Y\} : B \times R^n \to D$ — изоморфизм, $x = J\{z, \beta\} = \Lambda z + Y\beta, z \in B$, $\beta \in R^n$;

$$J^{-1} = [\delta, r] : D \to B \times R^n, \ \ \{z, \beta\} = J^{-1}x = \{\delta x, rx\}, \ \ x \in D.$$

Предполагается, что так называемая главная краевая задача $\mathcal{L}x = f, rx = \alpha$ однозначно разрешима для любых $f \in B$ и $\alpha \in$

R^n . В этом случае решение задачи имеет вид $x = Gf + X\alpha$, где G — оператор Грина, X — фундаментальный вектор. Рассмотрим задачу управления

$$\mathcal{L}x = Fu + f,\ rx = \alpha,\ \ell x = \beta, \tag{0.2}$$

где управление u принадлежит гильбертову пространству H , $F : H \to B$ - линейный ограниченный оператор, $\ell = [\ell_1, ..., \ell_n] : D \to R^n$ — линейный ограниченный вектор-функционал, задающий цель управления. Равенство $\lambda_i u = \ell_i GFu$ определяет линейный ограниченный функционал $\lambda_i : H \to R$. Обозначим тем же символом λ_i элемент пространства H , который порождает функционал λ_i , т.е. $\lambda_i u = \langle \lambda_i, u \rangle$, где $\langle\ ,\ \rangle$ означает скалярное произведение в H .

Т е о р е м а 0.1. *Задача* (0.2) *разрешима для любых* $f \in B$ *и* $\alpha, \beta \in R^n$ *тогда и только тогда, когда обратима матрица* $\Gamma = \{\langle \lambda_i, \lambda_j \rangle\}_{i,j=1,..,n}$.

Задача управления (0.2) охватывает широкий класс задач управления для систем дифференциальных уравнений, систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, гибридных систем дифференциальных и функциональных уравнений, сингулярных и импульсных систем. Примерами конкретных реализаций пространства D являются следующие пространства.

1. Пространство $AC = AC([0,T], R^n)$ абсолютно непрерывных функций $x : [0,T] \to R^n$. В этом случае $B = L^n[0,T]$ — пространство суммируемых по Лебегу функций $z : [0,T] \to R^n$ с обычной нормой,

$$x(t) = \int_0^t z(s)\,ds\ +\ \beta,\ \ (\Lambda z)(t) = \int_0^t z(s)\,ds\,;\ \ Y\beta = \beta,$$

$$z(t) = \delta\, x\ =\ \dot{x}\,;\ \beta\ =\ r\, x\ =\ x(0).$$

2. Пространство $DS^n(m) = DS^n[0, t_1, ..., t_m, T]$ [4] кусочно абсолютно непрерывных функций $x : [0,T] \to R^n,$ представимых в

виде
$$x(t)=\int_0^t z(s)\,ds\,+\,x(0)\,+\,\sum_{k=1}^{m}\chi_{[t_k,T]}(t)\Delta x(t_k),$$
где $\chi_{[t_k,T]}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[t_k,T]$, $\{t_1,...,t_m\}$ — фиксированный упорядоченный набор различных внутренних точек отрезка $[0,T]$, $\Delta x(t_k)=x(t_k)-x(t_k-0)$. Здесь $DS^n(m)\simeq L^n\times R^{n+nm}$, компоненты изоморфизма J и оператора J^{-1} определяются равенствами
$$(\Lambda z)(t)\,=\,\int_0^t z(s)\,ds\,;\;(Y\beta)(t)\,=\,Y(t)\beta;$$
$$Y(t)\,=\,(E_n,\,\chi_{[t_1,T]}E_n\,...\,\chi_{[t_k,T]}E_n),$$
E_n — единичная $n\times n$–матрица, $z=\delta x=\dot{x}\,;\,\beta=rx=col\big(x(0),\Delta x(t_1),...,\Delta x(t_m)\big)$.

Обратимость матрицы Γ, как грубое свойство, может быть установлена, если удается построить такую обратимую матрицу $\widetilde{\Gamma}$, что
$$||\Gamma-\widetilde{\Gamma}||<1/||\widetilde{\Gamma}^{-1}||. \tag{0.3}$$

Эффективная проверка этого неравенства требует аппроксимации элементов $\lambda_i\in H$. При этом из определения λ_i следует, что для его аппроксимации целесообразно воспользоваться аппроксимациями $\tilde{\ell}_i$, $\widetilde{G}$, $\widetilde{F}$ операторов ℓ_i, G, F соответственно. Конкретные схемы аппроксимации определяются спецификой пространств D, H и самих операторов. Рассмотрим в качестве примера случай $D=AC([0,T],R^n)$, $H=L_2([0,T],R^m)$,
$$(\mathcal{L}x)(t)=\dot{x}(t)-\int_0^t K(t,s)\dot{x}(s)\;ds+A(t)x(0),\;\;(Fu)(t)=F(t)u(t),$$
$$\ell_i x=\int_0^T\,\phi_i(s)\dot{x}(s)\,ds\;+\;\psi_i x(0).$$

В этом случае при аппроксимации λ_i можно исходить из представления

$$\lambda_i(t) = \int_t^T \phi_i(s) P(s,t)\, ds\, F(t),$$

где $P(t,s)$ - резольвентное ядро, соответствующее ядру $K(t,s)$.

ДВЭ, ориентированный на установление разрешимости задачи (0.2), содержит следующие основные этапы: 1) аппроксимация исходной задачи в классах так называемых *вычислимых* [1, 2] операторов, допускающих осуществление вычислительных процедур с гарантированной точностью, 2) построение элементов матрицы $\widetilde{\Gamma}$, 3) исследование $\widetilde{\Gamma}$ на обратимость, 4) проверка неравенства (0.3). В случае невыполнения неравенства (0.3) приходится возвращаться к пункту 1), строить более точную аппроксимацию исходной задачи и повторять пункты 2)–4). Условия, при которых вычислительный эксперимент оказывается (теоретически) успешным, формулируются для конкретных пространств, операторов и схем аппроксимации (см. [2]).

В заключение отметим, что прикладные задачи управления, допускающие запись в общей форме (0.2), возникают, в частности, в математической экономике. К таким задачам относятся, например задача управления инструментами деятельности коммерческого банка [5] и задача о построении программы инвестирования многоотраслевого производственного комплекса с привлечением банковских кредитов [6, 7]. В этих задачах различные режимы управления (в том числе, импульсные режимы, порождающие траектории из пространства $DS^n[0, t_1, ..., t_m, T]$)имеют естественный содержательный смысл.

Список литературы

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Элементы современной теории функционально–дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютерн. иссл., 2002. 384 с.
2. Румянцев А. Н. Доказательный вычислительный эксперимент в исследовании краевых задач. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1999. 174 с.
3. Максимов В. П. Арифметика рациональных чисел и компьютерное исследование интегральных уравнений// Соросовский Образовательный Журнал. 1999. № 3. С. 121–126.
4. Анохин А. В. О линейных импульсных системах для функционально–дифференциальных уравнений// Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1037–1040.
5. Колчанов А. П.,Румянцев А. Н. Задача оптимального управления финансовыми ресурсами коммерческого банка и конструктивный метод ее решения // Вестн. Нижегород. ун-та. Сер. Мат. моделирование и оптимальное управление. 2005. № 2(29), С. 124–131.
6. Максимов П. В. Моделирование и вычислительный эксперимент в задаче банковского кредитования программы развития многоотраслевой производственной системы // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: Тез. докл. междунар. конф. / Воронеж. гос. ун-т. Воронеж, 2005. С. 11.
7. Максимов В. П., Фадеева Л. Н. К задаче о достижимости показателей экономического развития // Развитие экономико–математического моделирования: Сб. науч. тр. М.: Изд-во Моск. ун-та. 2005. С. 61–70.