УДК 517.9

© **М. Г. Мишина**
m-mishina@mail.ru

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ [1]

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, задача Коши, вольтерровый по А. Н. Тихонову оператор, приближенное решение.

Abstract. We offer a method of approximate solution of abstract functional-differential equation in arbitrary Banah functional spaces. The method is based on substitution an operator of volterra on a close operator, which possesses a property of $\tau-$kvasivolterrovosty. If approximate operator will be chosen properly then from this method we can get new and known methods of solution of concrete functional-differential equations.

Введение

Как правило, решения функционально-дифференциальных уравнений не сводятся к квадратурам. В то же время, интенсивное использование функционально-дифференциальных уравнений в математических моделях требует нахождения решений либо их качественных характеристик с высокой точностью.

Здесь рассматриваетя достаточно общий метод приближенного решения абстрактного функционально-дифференциального

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 04-01-00324.

уравнения, на основании которого можно получить аналоги известных наговых методов (метода Тонелли, простого и улучшенного методов Эйлера) и новые методы.

§ 1. Обозначения

Будем предполагать, что B, D — банаховы пространства функций $y:[a,b]\to\mathbb{R}^m$, пространство D изоморфно и изометрично прямому произведению $B\times\mathbb{R}^n$. Пусть изоморфизм $D\cong B\times\mathbb{R}^n$ задан операторами

$$\begin{pmatrix}\delta\\ r\end{pmatrix}: D\to B\times\mathbb{R}^n,\quad (\Lambda,\,Y)=\begin{pmatrix}\delta\\ r\end{pmatrix}^{-1}: B\times\mathbb{R}^n\to D,$$

где $\delta: D\to B$, $\Lambda: B\to D$ вольтерровые (по А. Н. Тихонову) операторы, функционал $r: D\to\mathbb{R}^n$ обладает тем свойством, что для любых $\varepsilon>0$, $x\in D$ из $x(t)=0$ на $[a,a+\varepsilon]$ следует $rx=0$. Будем предполагать, что пространство B удовлетворяет следующему условию: для любого $\gamma\in(0,b-a)$ и для любой сходящейся последовательности $\{y_i\}\subset B$, $\|y_i-y\|_B\to 0$, из равенства $y_i(t)=0$, $i=1,2,\ldots,$ при $t\in[a,a+\gamma]$ следует $y(t)=0$ при $t\in[a,a+\gamma]$. Обозначим B_γ — пространство сужений функций из B на множество $[a,a+\gamma]$. Норму зададим формулой $\|y_\gamma\|_{B_\gamma}=\inf\|y\|_B$, где нижняя грань берется по всевозможным продолжениям $y\in B$ функции $y_\gamma\in B_\gamma$. Определим операторы $\Pi_\gamma^B: B\to B_\gamma$, $(\Pi_\gamma^B y)(t)=y(t)$ при всех $t\in[a,a+\gamma]$; $Z^B: (0,\,b-a]\times B\to\mathbb{R}$, $Z^B(\gamma,y)=\left\|\Pi_\gamma^B y\right\|_{B_\gamma}$. Доопределим отображение Z^B значением $Z^B(0,y)=\lim\limits_{\gamma\to 0+0}Z^B(\gamma,y)$. Пусть оператор $P_\gamma^B: B_\gamma\to B$ некоторым образом продолжает каждую функцию $y_\gamma\in B_\gamma$ до функции $y\in B$, определенной на всем $[a,b]$. Аналогично построим пространство D_γ и зададим операторы $\Pi_\gamma^D: D\to D_\gamma$, $Z^D: [0,\,b-a]\times D\to R$, $P_\gamma^D: D_\gamma\to D$.

§ 2. Метод решения задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши

$$\delta x = Fx, \quad rx = \alpha, \tag{2.1}$$

с вольтерровым оператором $F : D \to B$. Пусть при каждом $k = 1, 2, \ldots$ выбраны точки $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_k = b - a$, и построен оператор $F_k : D \to B$, обладающий следующим свойством: при всех $x, u \in D$ выполнено $(F_k x)(t) = (F_k u)(t)$, $t \in [a, a + \gamma_1]$, и при любых $i = 2, 3, \ldots k$, если $x(t) = u(t)$, $t \in [a, a + \gamma_{i-1}]$, то $(F_k x)(t) = (F_k u)(t)$, $t \in [a, a + \gamma_i]$. Пусть, кроме того, $\|F_k x_k - Fx\|_B \to 0$, для любой сходящейся последовательности $\{x_k\} \subset D$, $\|x_k - x\|_D \to 0$. Метод состоит в замене задачи (2.1) приближенной задачей

$$\delta x_k = F_k x_k, \quad rx_k = \alpha. \tag{2.2}$$

Решение z_k задачи (2.2) определяется равенствами:

$$\begin{array}{ll} \text{при } t \in [a, a + \gamma_1] & z_{k\gamma_1} = \Pi^D_{\gamma_1}(Y\alpha + \Lambda F_k 0), \quad 0 \in D, \\ \text{при } t \in [a, a + \gamma_2] & z_{k\gamma_2} = \Pi^D_{\gamma_2}(Y\alpha + \Lambda F_k P^D_{\gamma_1} z_{k\gamma_1}), \\ \ldots\ldots & \\ \text{при } t \in [a, a + \gamma_k] & z_{k\gamma_k} = \Pi^D_{\gamma_k}(Y\alpha + \Lambda F_k P^D_{\gamma_{k-1}} z_{k\gamma_{k-1}}). \end{array} \tag{2.3}$$

§ 3. Сходимость метода

Доказательство следующего утверждения о сходимости рассматриваемого метода основано на теоремах о непрерывной зависимости решений от параметров, полученных в [1,2].

Т е о р е м а 3.1. *Пусть существуют такие числа* $q < 1$ *и* $\tau > 0$, *что:*

1) *при всех* $x, u \in D$, $\gamma \in (0, \tau)$, $k = 1, 2, \ldots$ *выполнено неравенство*

$$Z^B(\gamma, F_k x - F_k u) \leqslant q Z^D(\gamma, x - u); \tag{3.1}$$

2) *для каждого натурального* k, *любых* $\gamma, \xi \in (0, b-a]$, *удовлетворяющих неравенствам* $\xi < \gamma < \xi + \tau$ *и всех таких* $x, u \in D$, *что* $x(t) = u(t)$ *при* $t \in [a, a+\xi]$, *выполнено неравенство* (3.1).

Тогда:

a) *при любом* $k = 1, 2, \ldots$ *«приближенная» задача* (2.2) *имеет единственное глобальное решение* z_k, *и всякое локальное решение является его частью;*

b) *краевая задача* (2.1) *имеет единственное глобальное решение* z, *и всякое локальное решение является его частью;*

c) $\|z_k - z\|_D \to 0$.

* * *

1. Жуковский Е. С. Нелинейное уравнение Вольтерра в банаховом функциональном пространстве // Изв. вузов. Математика. 2005. № 10 (521). С. 17-28.
2. Максимов В.П. О предельном переходе в краевых задачах для функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, № 11. С. 1984-1994.