Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. №2(36)

УДК 519.866.2+519.865.3+330.105

© **А. В. Островский**
ost@tudm.unn.ac.ru

ОБ УПРАВЛЕНИИ, СТАБИЛИЗИРУЮЩЕМ НЭШЕВСКОЕ РАВНОВЕСИЕ В ОДНОЙ МОДЕЛИ КОНКУРЕНТНОГО ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

Ключевые слова: модель ценообразования, монополистическая конкуренция, (локальная) устойчивость по Нэшу, (локальная) оптимальность по Нэшу, локально-нэшевский вектор цен.

Abstract. In this paper we consider a model of price forming in the case of monopolistic competition with N sellers supplying «almost homogeneous commodity». The model is investigated numerically for $N = 2$. If each seller changes his price proportionally to the derivative of his profit with respect to the price, then a trajectory may come to the Nash non-optimal equilibrium (which is also not Pareto-optimal) or dynamical chaos. Additional price control based on the sign of the second derivative of the profit with respect to the price may lead the system to the Nash locally optimal equilibrium (which is also Pareto-optimal) for various initial conditions.

Введение

Один из подходов к моделированию ценообразования базируется на предположении о том, что в процессе ценообразования превалирует стремление продавцов к максимизации своей прибыли, а покупатели стремятся минимизировать свои расходы. В настоящей статье предложена модель ценообразования в условиях *монополистической конкуренции* [1] (на рынке действует небольшое количество продавцов-конкурентов, предлагающих «почти однородный товар»), в которой каждый продавец изменяет свою цену пропорционально производной от прибыли по цене с добавлением некоторого управления. Целью этого управления является приведение системы к равновесию, локально оптимальному по Нэшу, при различных начальных ценовых векторах.

§ 1. Модель

В статье [2] исследовалась модель ценообразования при монополистической конкуренции, в которой N продавцов предлагают на рынке «почти однородный товар». Спрос на этот товар зависит как от цен, так и от неценовых факторов (качество, местоположение торговой точки, способ хранения товара на складах и прочее). Пусть $p_i \geqslant 0$ — планируемая цена, а $u_i \geqslant 0$ — текущая цена единицы товара у i-го продавца, причем u_i следит за p_i с некоторой постоянной времени $T_i > 0$, то есть каждому продавцу требуется некоторое время для принятия решения об изменении цены ($i = \overline{1, N}$). Тогда имеем соответствующие векторы цен $p = (p_1, \ldots, p_N)$ и $u = (u_1, \ldots, u_N)$. Пусть $C_i\,(u)$ — функция спроса на товар i-го продавца ($i = \overline{1, N}$), обладающая следующими свойствами: 1) неотрицательна и ограничена; 2) непрерывна вместе с первыми производными и имеет кусочно-непрерывные вторые производные; 3) монотонно убывает по u_i (закон спроса) и не убывает по u_k при $k \neq i$ («перетекание» спроса); 4) стремится к нулю при $u_i \to +\infty$; 5) $\left| \dfrac{C_i}{\partial C_i / \partial u_i} \right| \leqslant M_i = \mathrm{const}$ (ограничение на характер убывания функций спроса: производная $\partial C_i / \partial u_i$ при $u_i \to +\infty$ может стремиться к нулю, но не быстрее, чем сама функция $C_i\,(u)$). Тогда прибыль i-го торговца от продажи товара равна $\Pi_i\,(u) = (u_i - c_i) \cdot C_i\,(u)$, где $c_i > 0$ – издержки на единицу товара (величина предложения предполагается неограниченной и поэтому в явном виде не присутствует в модели).

Назовем вектор цен $u^* = (u_1^*, \ldots, u_N^*)$ *локально оптимальным по Нэшу* (или *локально устойчивым по Нэшу, локально-нэшевским*), если в точке u^* выполняются соотношения: $\partial \Pi_i / \partial u_i = 0$,

$\partial^2\Pi_i/\partial(u_i)^2 < 0$ ($i = \overline{1,N}$) (условия локальных условных максимумов функций прибыли).

Будем считать, что стратегия каждого i-го продавца состоит в изменении цены p_i пропорционально изменению прибыли (то есть производной $\partial\Pi_i/\partial u_i$) с некоторым постоянным коэффициентом $k_i > 0$ с целью максимизации прибыли. Кроме того, будем считать, что в целях достижения локально-нэшевского вектора цен каждый i-й продавец может дополнительно управлять своей ценой с помощью слагаемого, зависящего от знака $\partial^2\Pi_i/\partial(u_i)^2$. Тогда с учетом неотрицательности цен получаем модель в виде системы $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_i &= \begin{cases} \widetilde{F}_i = k_i \dfrac{\partial \Pi_i}{\partial u_i} + \mu_i \cdot \Big(1 + \operatorname{sgn} \dfrac{\partial^2 \Pi_i}{\partial u_i^2}\Big), \\ \qquad\qquad \text{если } p_i > 0 \text{ или } \widetilde{F}_i > 0, \\ 0, \qquad\quad \text{если } p_i = 0 \text{ и } \widetilde{F}_i \leqslant 0; \end{cases} \\ T_i \dot{u}_i + u_i &= p_i, \\ &\quad \text{где } \mu_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1,N}). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

В общем случае состояния равновесия системы (1) без управления ($\mu_1 = \ldots = \mu_N = 0$) не всегда являются локально-нэшевскими.

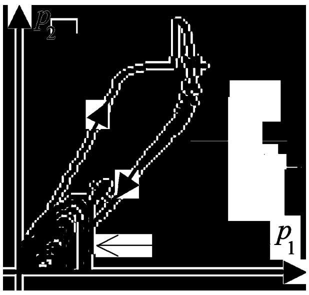
§ 2. Результаты исследования модели

Модель (1) исследовалась в [2] для случая $N = 2$ при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ (без управления) и функциях спроса следующего вида: $C_i\,(u) = A_i \exp\big[-\alpha_i u_i - f_{i,3-i}\,(u)\big]$ ($A_i > 0$, $\alpha_i > 0$), где функции $f_{i,3-i}$ брались в виде

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{i,3-i} \cdot (u_i - u_{3-i})^3 && \text{при } |u_i - u_{3-i}| \leqslant \xi; \\ &\beta_{i,3-i} \cdot \big[4\xi^3 \operatorname{sgn}(u_i - u_{3-i}) - \\ &\qquad -3\xi^4 (u_i - u_{3-i})^{-1}\big] && \text{при } |u_i - u_{3-i}| > \xi \\ &\qquad\qquad (\xi = \text{const},\ i = \overline{1,2}). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

При значениях параметров $k_1 A_1 = k_2 A_2 = 10$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$, $c_1 = c_2 = 1$, $T_1 = 10$, $T_2 = 5$ (достаточно большая инерционность) численно было установлено, что локально-нэшевское равновесие O_1 (являющееся также оптимальным по Парето) асимптотически устойчиво, но имеет очень маленькую область притяжения; бóльшая же часть траекторий приходит к другому устойчивому состоянию равновесия O_2 (не оптимальному ни по Нэшу, ни по Парето) или к динамическому хаосу (в зависимости от начальных условий).

В общем же случае в модели (1) с функциями (2), как показывают численные расчеты, можно при различных начальных условиях так изменять во времени величины μ_1 и μ_2 (оперативное управление, зависящее от текущих значений p_i и u_i), что система может прийти в локально-нэшевское равновесие O_1, даже если вначале вектор цен находился на хаотической (при $\mu_1 = \mu_2 = 0$) траектории. Пример в проекции на плоскость (p_1, p_2) (от хаоса до точки «плюс» применяется управление с $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1$; от точки «плюс» до локально-нэшевского равновесия O_1, помеченного «крестиком», — управление с $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$):



* * *

1. Казаков А. П., Минаева Н. В. Экономика. М: Изд-во ЦИПКК АП, 1996.
2. Островский А. В. Об одном классе моделей конкурентного ценообразования в рыночной экономике // Дифференциальные уравнения и процессы управления: Электронный журн. (www.neva.ru). 2000. № 2. С. 58–77.