УДК 517.5 + 517.9

© **Д. С. Пешков, В. И. Родионов**
rodionov@uni.udm.ru

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ

Ключевые слова: прерывистая функция, обобщенная функция, присоединенный интеграл, импульсное уравнение.

Abstract. The theorem about continuous dependence of initial point and parameters for solutions of linear impulse system in adjoint Riemann-Stieltjes distributions form are proved.

1°. Пусть $K \doteq [a,b]$. Банахово пространство n-мерных векторов z с элементами $z_i \in \mathrm{G} \doteq \mathrm{G}[a,b]$ обозначаем $\mathrm{G}^n \doteq \mathrm{G}^n[a,b]$ и применяем норму $\|z\| \doteq \max\limits_i |\, z_i \,|$, где $|\, x \,| \doteq \sup\limits_{t \in K} |x(t)|$ — норма в пространстве прерывистых функций G (то есть в пространстве таких функций $x : K \to \mathbb{C}$, что для всех $t \in K$ существуют пределы $x(t-0)$ и $x(t+0)$). Через $\mathrm{BV} \doteq \mathrm{BV}[a,b]$ обозначаем пространство функций ограниченной вариации, через $\mathrm{CBV} \doteq \mathrm{CBV}[a,b]$ — его подпространство, состоящее из непрерывных функций, а через $\mathrm{C} \doteq \mathrm{C}[a,b]$ — пространство непрерывных функций (очевидно, $\mathrm{C} \subset \mathrm{G}$). Пространство $\Gamma \doteq \Gamma[a,b]$ такое, что $\mathrm{BV} \subset \Gamma \subset \mathrm{G}$, состоит из функций x, представимых в виде $x = y + h$, где $y \in \mathrm{C}$, а $h \in \mathrm{H} \doteq \mathrm{H}[a,b]$ — функция скачков.

Если матрицы A, B, C таковы, что $A_{ik}, C_{\ell j} \in \mathrm{G}$, $B_{k\ell} \in \mathrm{CBV}$ и определено произведение ABC, то матричный интеграл — это матрица $\int\limits_\alpha^\beta A \cdot dB \cdot C \doteq \Big(\sum\limits_{k,\ell} \int\limits_\alpha^\beta A_{ik} \cdot dB_{k\ell} \cdot C_{\ell j} \Big)_{i,j}$ соответствующего строения. В традиционной («привычной») записи элементы матричного интеграла — это суммы интегралов Римана–Стилтьеса

$\sum\limits_{k,\ell} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(A_{ik}C_{\ell j}\big)\, dB_{k\ell}$. Если $A = E$ — единичная матрица (или $C = E$), то пишем $\int\limits_{\alpha}^{\beta} dB \cdot C$ (соответственно $\int\limits_{\alpha}^{\beta} A \cdot dB$).

2°. Квадратная матрица Q порядка n , состоящая из непрерывных функций ограниченной вариации (то есть $Q_{ij} \in \mathrm{CBV}$), вектор-столбец $f \in \mathrm{G}^n$ и точка $\alpha \in K$ порождают уравнение

$$x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} dQ \cdot x = f(t), \qquad t \in K\,, \tag{1}$$

и последовательность матриц $\big\{C^m(t,\tau),\ (t,\tau) \in K^2\big\}_{m=0}^{\infty}$ таких, что $C^0(t,\tau) \doteq E$, а прочие элементы определяются рекурсивно: $C^m(t,\tau) \doteq \int\limits_{\tau}^{t} C^{m-1}(t,s) \cdot dQ(s)$. Согласно [1] функциональный ряд $C(t,\tau) \doteq C_Q(t,\tau) \doteq C(Q;t,\tau) \doteq \sum\limits_{m} C^m(t,\tau)$ равномерно сходится в квадрате $(t,\tau) \in K^2$, а его сумма называется матрицей Коши уравнения (1). Функция $C\colon K^2 \to \mathbb{C}^{n\times n}$ непрерывна, каждое из сечений $C_{ij}(\cdot,\tau)$, $C_{ij}(t,\cdot)$ принадлежит CBV и справедливо

$$C(t,\tau) - \int\limits_{\tau}^{t} dQ(s) \cdot C(s,\tau) = E, \qquad C(t,\tau) - \int\limits_{\tau}^{t} C(t,s) \cdot dQ(s) = E,$$

$C(t,s)\,C(s,\tau) = C(t,\tau)$, где $t,s,\tau \in K$. Единственное решение уравнения (1) имеет вид $x(t) = f(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} d_sC(t,s) \cdot f(s)$.

Пусть квадратные матрицы Q и R порядка n таковы, что $Q_{ij},\ R_{ij} \in \mathrm{CBV}(K)$. Если $C_Q(t,\tau)$ — матрица Коши уравнения (1), а $C_R(t,\tau)$ — матрица Коши уравнения $x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} dR \cdot x = f(t)$, то при всех $t,\tau \in K$ справедливо тождество

$$C_R(t,\tau) - C_Q(t,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} C_Q(t,s) \cdot d\,[\,R(s) - Q(s)\,] \cdot C_R(s,\tau).$$

Прямое произведение $[a,b]^2 \times \mathrm{CBV}^{\,n\times n}[a,b] \times \mathrm{C}^n[a,b]$ обозначим через $\Omega \doteq \Omega\,[a,b]$. Всякий элемент $\omega = (t,\alpha,Q,f) \in \Omega$ порождает в $\mathbb{C}^n$ вектор $x(\omega) = x(t,\alpha,Q,f) \doteq f(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} d_sC_Q(t,s) \cdot f(s)$, причем при фиксированных значениях параметров α, Q, f функция $x = x(t,\alpha,Q,f)$, $t \in [a,b]$, является единственным решением уравнения (1). Соответствие $\omega \to x(\omega)$ порождает оператор $\Phi: (\Omega, \varrho) \to (\mathbb{C}^n, |\cdot|_{\mathbb{C}^n})$, действующий в полных метрических пространствах с метриками $|x^1 - x^2|_{\mathbb{C}^n} \doteq \max\limits_i |x_i^1 - x_i^2|$ и $\varrho(\omega^1,\omega^2) \doteq \max\big\{|t^1 - t^2|,\ |\alpha^1 - \alpha^2|,\ \max\limits_{i,j} \| Q_{ij}^1 - Q_{ij}^2\|_{\mathrm{BV}},\ \|f^1 - f^2\|\big\}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $x = x(t,\alpha,Q,f)$, $t \in K$, *— единственное решение уравнения* (1). *Оператор* $\Phi: (\Omega, \varrho) \to (\mathbb{C}^n, |\cdot|_{\mathbb{C}^n})$ *такой, что* $(t,\alpha,Q,f) \to x(t,\alpha,Q,f)$, *непрерывен.*

3°. Пусть $K \doteq (a,b)$ — интервал (возможно, неограниченный). Пространство $D \doteq D(K)$, состоящее из финитных функций пространства $\mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(K)$, называется пространством основных функций. В нем определено понятие сходящейся последовательности: говорим, что последовательность $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in D$, сходится к $\varphi \in D$ (и пишем $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$), если у всех функций φ_n и φ есть общий носитель $[\alpha,\beta] \subset K$ и $\operatorname*{Var}\limits_{[\alpha,\beta]} (\varphi_n - \varphi) \underset{n}{\to} 0$. Если $x \in \Gamma^{\mathrm{loc}} \doteq \Gamma^{\mathrm{loc}}(K)$, то определены линейные непрерывные функционалы $(x,\varphi) \doteq \int\limits_K \varphi(t)\,x(t)\,dt$ $\quad(\overset{\circ}{x},\varphi) \doteq \int\limits_K \varphi \circ dx$, где второй функционал задан через присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса и называется присоединенной обобщенной производной. Напомним [2], что $\int\limits_\alpha^\beta x \circ dy \doteq \int\limits_\alpha^\beta x^c dy^c - \int\limits_\alpha^\beta x_c dy_c$, где функции $x^c, y^c \in \mathrm{C} \doteq \mathrm{C}(K)$, $x_c, y_c \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}} \doteq \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(K)$ являются компонентами разложения функций $x, y \in \Gamma^{\mathrm{loc}}$ в суммы $x = x^c + x_c$ и $y = y^c + y_c$. Пусть $X \subseteq \Gamma^{\mathrm{loc}}$ — произвольное подмножество в пространстве прерывистых функций. Оператор $\mathrm{V}: X \to \Gamma^{\mathrm{loc}}$ и произвольная функция $x \in X$ порождают в D линейный непрерывный функционал $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x,\varphi) \doteq \int\limits_K \varphi \circ d\mathrm{V}x$, а V и произвольная правая часть $f \in \Gamma^{\mathrm{loc}}$ порождают импульсное уравнение $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x,\varphi) \equiv (\overset{\circ}{f},\varphi)$.

Т е о р е м а 2. 1. *Пусть* $\alpha \in K$, Q *— квадратная матрица порядка* n *с элементами* $Q_{ij} \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$, $\mathrm{X} \doteq \{\, x \in \Gamma_n^{\mathrm{loc}}:$ *для любых* $\beta \in K$ *существует интеграл* $\int\limits_{\alpha}^{\beta} dQ \cdot x \,\}$ *. Для оператора* $V : \mathrm{X} \to \Gamma_n^{\mathrm{loc}}$ *, где* $(\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \int\limits_{\alpha}^{t} dQ \cdot x$ *, и для любого столбца* $f \in \Gamma_n^{\mathrm{loc}}$ *семейство всех решений уравнения* $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x, \varphi) \equiv (\overset{\circ}{f}, \varphi)$ *представимо в виде*

$$x(t) = C(Q^c; t, \alpha)\, h(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} C(Q^c; t, s) \cdot df^c(s), \quad h \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}} \cap X\,.$$

2. *Совокупность* $x(t) = C(Q^c; t, \alpha)\left[\, c + \int\limits_{\alpha}^{t} C(Q^c; \alpha, s) \cdot df^c(s)\right]$, $c \in \mathbb{C}^{\,n}$ *, является семейством всех непрерывных решений уравнения, а функция* $x(t) = C(Q^c; t, \alpha)\left[\, f(\alpha) + \int\limits_{\alpha}^{t} C(Q^c; \alpha, s) \cdot df(s)\right]$ *является единственным непрерывным решением начальной задачи* $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x, \varphi) \equiv (\overset{\circ}{f}, \varphi)$, $x(\alpha) = f(\alpha)$ *, в которой* $f \in \mathrm{C}^n$.

3. *Пусть* $x = x(t, \alpha, Q, f)$, $t \in [a, b]$ *, — единственное непрерывное решение задачи* $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x, \varphi) \equiv (\overset{\circ}{f}, \varphi)$, $x(\alpha) = f(\alpha)$, $t \in [a, b]$ *, где* $\alpha \in [a, b]$, $f \in \mathrm{C}^n[a, b]$ *. Оператор* $\Phi :\ (\Omega,\ \varrho\,) \to (\,\mathbb{C}^{\,n},\ |\cdot|_{\mathbb{C}^{\,n}})$ *такой, что* $(t, \alpha, Q, f) \to x(t, \alpha, Q, f)$ *, непрерывен.*

* * *

1. Пешков Д.С., Родионов В.И. О линейных импульсных системах // Вестн. Удм. ун-та. Сер. Математика. 2006. № 1. С. 95–106.

2. Родионов В.И. Присоединенный интеграл Римана-Стилтьеса в алгебре прерывистых функций // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. 2005. Вып. 1 (31). С. 3–78.