Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. №2(36)

УДК 517.958:530.145.6

© **Н. И. Плетникова**
nat _ pletnikova@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ УРОВНЕЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА ГРАНИЦЕ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

Ключевые слова: уравнение Шредингера, нелокальный потенциал, собственное значение, резонанс.

Abstract. We consider the one-dimensional Schrödinger operator H_n with the non-local perturbed step potential. We prove that there exists the unique level (i.e. eigenvalue or resonance of the operator H_n) in the neighborhood of the boundary of the essential spectrum of the operator H_n .

Введение

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$H_n\psi = E\psi, \tag{0.1}$$

где $H_n = -\dfrac{d^2}{dx^2} + V_0\theta(x) + \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j(\cdot,\varphi_j)\varphi_j$, а $E \in \mathbf{C}$. Здесь $V_0 =$ const < 0 (случай $V_0 > 0$ аналогичен), $\theta(x)$ функция Хевисайда, $\lambda_j \in \mathbf{R}$ $(j = 1,\ldots,n)$, $(\psi,\varphi_j) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}}\psi\cdot\overline{\varphi_j}\,dx$. Функции $\varphi_j : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ $(j = 1,\ldots,n)$ линейно независимы и удовлетворяют для любого j неравенству вида $|\varphi_j(x)| \leqslant C_j e^{-\alpha_j|x|}$, где $\alpha_j > 2\sqrt{|V_0|}$.

С физической точки зрения $V = V_0\theta(x) + \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j(\cdot,\varphi_j)\varphi_j$ представляет собой потенциал, отвечающий поверхности; здесь $\lambda_j(\cdot,\varphi_j)\varphi_j$ — это (нелокальные) сепарабельные потенциалы.

§ 1. Основные результаты

Уравнение (0.1) рассматриваем в классе функций ψ таких, что

$$\psi \cdot \varphi_j \in L^1(\mathbf{R}), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Положим $H = -\dfrac{d^2}{dx^2} + V_0\theta(x)$, тогда

$$(H - E)\psi = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\psi, \varphi_j)\varphi_j. \tag{1.2}$$

Вид функции Грина $G(x, y, E, V_0)$ оператора H (ядро резольвенты) приведен в работе [1].

Спектр $\sigma(H)$ оператора H совпадает с существенным спектром $\sigma_{\text{ess}}(H_n)$ оператора H_n и равен $[V_0, +\infty)$.

Пусть $E \notin [V_0, +\infty)$. В этом случае уравнение (1.2) можно привести к интегральному виду

$$\psi = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\psi, \varphi_j) \int\limits_{\mathbf{R}} G(x, y, E, V_0)\varphi_j(y)\, dy. \tag{1.3}$$

Под *резонансом* оператора H_n будем понимать такое $E \in \mathbf{C}$ с $\operatorname{Im}\sqrt{E - V_0} < 0$, для которого существует решение уравнения (1.3), удовлетворяющее условию (1.1).

Уровнем E оператора H_n будем называть собственное значение или резонанс оператора (а также соответствующее E число $\varkappa = \sqrt{E - V_0}$).

Обозначим $k = \sqrt{E}$, тогда $k = \sqrt{\varkappa^2 + V_0}$. Вместо $G(x, y, E, V_0)$ будем писать $G(x, y, \varkappa)$. Определим функцию

$$F_j(x, \varkappa) = \int_{\mathbf{R}} \varkappa G(x, y, \varkappa)\varphi_j(y)\, dy.$$

Л е м м а 1.1. *Функции*

$$F_1(x, \varkappa), F_2(x, \varkappa), \ldots, F_n(x, \varkappa)$$

линейно независимы.

Л е м м а 1.2. *Для любых* $j, l = 1, \dots, n$ *функция*

$$F_{jl}(\varkappa) = \iint\limits_{\mathbf{R}^2} \varkappa G(x, y, \varkappa) \varphi_j(y) \overline{\varphi_l(x)}\, dydx$$

является аналитической функцией в некоторой достаточно малой окрестности точки $\varkappa = 0$, *причем* $F_{jl}(0) = 0$.

Запишем уравнение (1.3) в виде

$$\psi = -\frac{1}{\varkappa} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\psi, \varphi_j) F_j(x, \varkappa).$$

Отсюда

$$\psi = -\frac{1}{\varkappa} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j F_j(x, \varkappa), \quad C_j = \mathrm{const}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j F_j(x, \varkappa) = -\frac{1}{\varkappa} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \lambda_l C_l F_{jl}(\varkappa) F_j(x, \varkappa).$$

Вследствие леммы 1.1 получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -\varkappa C_1 &= \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j F_{j1}(\varkappa), \\ -\varkappa C_2 &= \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j F_{j2}(\varkappa), \\ & \vdots \\ -\varkappa C_n &= \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j F_{jn}(\varkappa) \end{cases}$$

относительно $C_1, C_2, \dots, C_n$. Определитель этой системы имеет вид

$$\Delta(\lambda, \varkappa) = \begin{vmatrix} \varkappa + \lambda_1 F_{11}(\varkappa) & \lambda_2 F_{21}(\varkappa) & \cdots & \lambda_n F_{n1}(\varkappa) \\ \lambda_1 F_{12}(\varkappa) & \varkappa + \lambda_2 F_{22}(\varkappa) & \cdots & \lambda_n F_{n2}(\varkappa) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 F_{1n}(\varkappa) & \lambda_2 F_{2n}(\varkappa) & \cdots & \varkappa + \lambda_n F_{nn}(\varkappa) \end{vmatrix},$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Положим $V_{jl}(\varkappa) = F'_{jl}(0) + \dfrac{1}{2}F''_{jl}(0)\varkappa + o(\varkappa)$. Раскладывая функцию $F_{jl}(\varkappa)$ в ряд Тейлора (учитываем, что $F_{jl}(0) = 0$), получим

$$\Delta(\lambda, \varkappa) = \varkappa^n \Delta_0(\lambda, \varkappa) =$$

$$= \varkappa^n \begin{vmatrix} 1 + \lambda_1 V_{11}(\varkappa) & \lambda_2 V_{21}(\varkappa) & \cdots & \lambda_n V_{n1}(\varkappa) \\ \lambda_1 V_{12}(\varkappa) & 1 + \lambda_2 V_{22}(\varkappa) & \cdots & \lambda_n V_{n2}(\varkappa) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 V_{1n}(\varkappa) & \lambda_2 V_{2n}(\varkappa) & \cdots & 1 + \lambda_n V_{nn}(\varkappa) \end{vmatrix}.$$

Заметим, что существование уровня оператора H_n эквивалентно выполнению равенства $\Delta_0(\lambda, \varkappa) = 0$ $(\varkappa \neq 0)$.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть вектор* $\widetilde{\lambda}$ *удовлетворяет условиям* $\Delta_0(\widetilde{\lambda}, 0) = 0$ *и* $\dfrac{\partial}{\partial\varkappa}\Delta_0(\widetilde{\lambda}, 0) \neq 0$. *Тогда для всех* λ *из малой окрестности точки* $\widetilde{\lambda} \in \mathbf{R}^n$ *существует единственный уровень* $\varkappa = \varkappa(\lambda)$ *оператора* H_n, *аналитически зависящий от* λ *и такой, что* $\lim\limits_{\lambda \to \widetilde{\lambda}} \varkappa(\lambda) = 0$.

Список литературы

1. Чубурин Ю. П. Об операторе Шредингера с малым потенциалом типа возмушенной ступеньки // Теор. и мат. физика. 1999. Т. 120, № 2. С. 277–290.