Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. №2(36)

УДК 517.997

© **Л. И. Родина**
rdl@uni.udm.ru

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕУПРЕЖДАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ [1]

Ключевые слова: локальная управляемость, неупреждающее управление, стационарный случайный процесс.

Abstract. This paper is concerned with the problem of local controllability for linear nonstationary systems with random parameters. For this type of systems we construct a non-predicting control when we use the information about system only before the current moment. The sufficient conditions of the non-predicting controllability and estimation of the probability that given system is a locally controllable on the fixed time segment are obtained.

Введение

Исследуется задача построения неупреждающего управления для линейной системы со стационарными случайными параметрами. Управление $u(t,x)$ называется *неупреждающим,* если для его построения в момент времени $t=\tau$ используется информация о поведении системы только при $t \leqslant \tau$. Рассматривается система

$$\dot{x} = A(f^t\omega)x + B(f^t\omega)u, \quad (t,\omega,x,u) \in \mathbb{R}\times\Omega\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m, \qquad (0.1)$$

где функция $t \to \xi(f^t\omega) \doteq \big(A(f^t\omega), B(f^t\omega)\big)$ переменного t кусочно-постоянна при каждом $\omega\in\Omega$. Предполагаем, что $u \in U$,

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 06-01-00258).

где U — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^m$, содержащий нуль в своей внутренности. Получены достаточные условия, при которых система (0.1) неупреждающе локально управляема на отрезке $[0, T]$.

§ 1. Основные определения и обозначения

Рассмотрим вероятностные пространства $(\Omega_i, \mathfrak{F}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, где $\Omega_1 \doteq \{\theta : \theta = (\theta_1, \dots, \theta_k, \dots), \theta_k \in [\alpha, \beta], \alpha > 0\}$, пространство $\Omega_2 \doteq \{\varphi : \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_k, \dots), \varphi_k \in \Psi\}$, $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^s$ — конечное множество матричных пар $\psi_j \doteq (A_j, B_j)$, $\mathfrak{F}_i$ — σ-алгебра, порожденная соответствующими цилиндрическими множествами, μ_i — продолжение меры $\widetilde{\mu}_i$ с алгебре цилиндрических множеств на σ-алгебру $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Рассмотрим также вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$, где $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, построение σ-алгебры $\mathfrak{F}$ и вероятностной меры μ описано в [1].

На $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2, \mu_2)$ для каждого $\theta \in \Omega_1$ введем последовательность случайных величин $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \dots)$, $\zeta_k(\omega) = \zeta_k(\varphi, \theta) = \varphi_k$, $\varphi_k \in \Psi$. Предполагаем, что ζ образует однородную *стационарную в узком смысле* цепь Маркова, которая однозначно определяется матрицей переходных вероятностей $P = (p_{ij})_{i,j=1}^s$ и начальным распределением $\pi = (\pi_i)_{i=1}^s$ (см. [2, с. 122]).

Введем последовательность $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$: $\tau_0 = 0$, $\tau_k(\theta) = \sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i$, где $\theta \in \Omega_1$. Предполагаем, что $\theta_1, \theta_2, \dots$ — независимые случайные величины, причем $\theta_2, \theta_3, \dots$ имеют одинаковое распределение $F(t)$. Величина $\nu(t) \doteq \max\{k : \tau_k \le t\}$, $t \geqslant 0$ называется процессом восстановления. Предполагаем, что $\nu(t)$ является стационарным процессом восстановления.

Пусть $f_1^t \theta = (\tau_{\nu+1} - t, \theta_{\nu+2}, \theta_{\nu+3}, \dots)$ и $f_2^t(\theta)\varphi = (\varphi_\nu, \varphi_{\nu+1}, \dots)$ — преобразования сдвига на $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, \mu_1)$ и $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2, \mu_2)$ соответственно. Известно, что $f^t\omega = f^t(\theta, \varphi) \doteq \bigl(f_1^t\theta, f_2^t(\theta)\varphi\bigr)$ — преобразование сдвига на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ сохраняет меру μ (см. [3, с. 190]).

Систему (0.1) отождествим с функцией $\xi : \Omega \to \Psi$. При фиксированом ω функция $\xi(f^t\omega)$ задает линейную детерминированную систему. Допустимые управления — ограниченные, измеримые по Лебегу функции $u_\omega : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to U$, $u_\omega(t,x_0)$ — программное, а $u_\omega(t,x)$ — позиционное управление. Решение системы (0.1) при $u = u_\omega(t,x)$, понимается в смысле А. Ф. Филиппова.

Состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$ системы $\xi(f^t\omega)$ называется *управляемым* (*неупреждающе управляемым*) *на* $[t_0,t_1]$, если существует управление $u_\omega(t,x,x_0)$ (неупреждающее управление $u(f^t\omega,x,x_0)$)такое, что соответствующее ему решение $x(t,\omega)$, удовлетворяет условию $x(t_1,\omega)=0$. Через $D_{[t_0,t_1]}(\omega)$ и $\mathfrak{D}_{[t_0,t_1]}(\omega)$ соответственно, обозначены множество управляемых и множество неупреждающе управляемых состояний системы $\xi(f^t\omega)$ на $[t_0,t_1]$.

Система ξ — *локально управляема с вероятностью* μ_0 на отрезке $[t_0,t_1]$, если $\mu\{\omega : 0 \in \mathrm{int}D_{[t_0,t_1]}(\omega)\} = \mu_0$ и *неупреждающе локально управляема* с вероятностью μ_0 на $[t_0,t_1]$, если $\mu\{\omega : 0 \in \mathrm{int}\mathfrak{D}_{[t_0,t_1]}(\omega)\} = \mu_0$.

§ 2. Построение неупреждающего управления

Обозначим через ξ_i систему $\dot{x} = A_i x + B_i u$, через $D_{[t_0,t_1]}(\xi_i)$ — множество управляемости системы ξ_i на отрезке $[t_0,t_1]$, $L(\xi_i) \doteq \mathrm{Lin}D_{[t_0,t_1]}(\xi_i)$ — пространство управляемости ξ_i, $i=1,\dots,s$. Известно, что $L(\xi_i) = \mathrm{Lin}K_i$, где $K_i = (B_i, A_iB_i, \dots, A_i^{n-1}B_i)$.

Назовем конечную последовательность $W = (\psi_{i_1},\dots,\psi_{i_k})$, $\psi_{i_j} \in \Psi$, словом W. Поставим в соответствие слову W линейные системы $\xi_{i_1},\dots,\xi_{i_k}$ и пространства управляемости этих систем $L(\xi_{i_1}),\dots,L(\xi_{i_k})$. Предположим, что для слова W найдутся подпространства $\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_{k-1}$, что любую начальную точку системы можно перевести на $\mathcal{M}_1$, затем любую точку $\mathcal{M}_i$ перевести на $\mathcal{M}_{i+1}$, а любую точку $\mathcal{M}_{k-1}$ перевести в нуль. Кроме того, для данных подпространств должны существовать такие управления, которые удерживают траекторию решения системы, выходящую из $\mathcal{M}_i$, $i=1,\dots,k-1$, в этом подпространстве до следующего момента переключения. Поскольку $u \in U$, для всех систем $\xi_1,\dots,\xi_s$ должна существовать функция $V(x) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ ($V(x) \geqslant 0$ и $V(x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$) такая, что траектории решений этих систем, начинающиеся в точке x_0, под действием соответствующих управлений все время остаются внутри гиперповерхности уровня $V(x) = V(x_0)$.

Обозначим через $\mu(T)$ вероятность того, что на $[0, T]$ появится слово W, через q_j — условную вероятность первого попадания из ψ_j в ψ_{i_1} не более чем за N шагов, $Q = \sum\limits_{j=1}^{s} p_j q_j$ — вероятность первого попадания из любого начального состояния в ψ_{i_1} не более чем за N шагов, $p = p_{i_1,i_2} \dots p_{i_{k-1},i_k}$ — условную вероятность перехода из состояния ψ_{i_1} в ψ_{i_2}, и так далее, в ψ_{i_k}.

Т е о р е м а 2.1. *Предположим, что слово* $W = (\psi_{i_1}, \dots, \psi_{i_k})$, *функция* $V \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *и подпространства* $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{k-1}$ *удовлетворяют условиям:*
а) $\mathcal{M}_\ell \subset L(\xi_{i_\ell}) + X_{i_\ell}^{-1}(\alpha)\mathcal{M}_{\ell+1}$, $\ell = 1, \dots, k-2$, $\mathcal{M}_{k-1} \subset L(\xi_{i_k})$, $\mathcal{M}_1 + L(\xi_{i_1}) = \mathbb{R}^n$;
б) $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ *и* $\min\limits_{u \in U} \left\langle \frac{\partial V(x)}{\partial x}, A_i x + B_i u \right\rangle < 0$ *для всех* $i = 1, \dots, s$ *и всех* x *из некоторой окрестности* $\dot{O}_\varepsilon$;
в) $\left\langle \frac{\partial V(x)}{\partial x}, \ell_j \right\rangle = 0$, *для всех* $x \in \mathcal{M}_j$, $\ell_j \in L(\xi_{i_j})$, $j = 1, \dots, k-1$.
г) *существуют управления* $u_\ell(x)$, *что* $A_{i_\ell} x + B_{i_\ell} u_\ell(x) \subset \mathcal{M}_\ell$ *и* $\left\langle \frac{\partial V(x)}{\partial x}, A_{i_\ell} x + B_{i_\ell} u_\ell(x) \right\rangle < 0$ *для всех* $x \in \mathcal{M}_\ell \cap \dot{O}_\varepsilon$, $\ell = 1, \dots, k-1$.

Тогда система ξ *неупреждающе управляема на* $[0, T]$ *с вероятностью* $\mu(T)$, *для которой при* $T \geqslant [r(N+3) - 2]\beta$, $r, N \geqslant 1$, *справедлива оценка* $\mu(T) \geqslant p\,Q \dfrac{1 - (q_{i_1} - p q_{i_k})^r}{1 - q_{i_1} + p q_{i_k}}$. *Если все состояния цепи Маркова образуют один класс сообщающихся состояний, то* $\mu(T) \to 1$ *при* $T \to \infty$.

Список литературы

1. Баранова О. В. О равномерной глобальной управляемости линейной системы со стационарными случайными параметрами// Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 11. С. 1843–1850.
2. Ширяев А. Н. Вероятность. Москва: Наука, 1989. 640 с.
3. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. Москва: Наука, 1980. 383 с.