УДК 517.5 + 517.9

© **В. И. Родионов**
rodionov@uni.udm.ru

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННЫЕ ЧЕРЕЗ ПРИСОЕДИНЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Ключевые слова: обобщенная функция, прерывистая функция

Abstract. The concept of adjoint distribution on the space of regulated functions are defined. Contrast analysis of distributions and adjoint distributions are realized.

Введение

Произвольная функция $x \in \mathrm{BV}[0,1]$ имеет производную x', понимаемую как производную почти везде, и обобщенную производную $\dot{x}$, причем суммируемая функция x' сама порождает обобщенную функцию, а равенство обобщенных функций $x' = \dot{x}$ имеет место в том и только в том случае, когда x абсолютно непрерывна [1, с. 348]. В [2] мы предлагаем конструкцию присоединенной обобщенной производной $\overset{\circ}{x}$, для которой справедливо утверждение: равенство обобщенных функций $x' = \overset{\circ}{x}$ имеет место тогда и только тогда, когда x представима в виде суммы абсолютно непрерывной функции и функции скачков [1, с. 336].

Достаточно убедительная аргументация в пользу применения присоединенных обобщенных производных продемонстрирована в [2] при исследовании импульсных систем на этапе интерпретации результатов. Поясним сказанное на примере простейшего импульсного уравнения $dx = d\theta \cdot x$, где $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда. Это уравнение, записанное в терминах обобщенных функций [1, с. 208], имеет вид $\dot{y} = 0$, где $y(t) \doteq x(t) - \int_\alpha^t x\, d\theta$, и имеет всего одно решение $x = 0$. Если же производные понимать классически, то для почти всех t должно быть выполнено $x'(t) = 0$, а семейство решений перестает быть обозримым (сюда входят константы, функции скачков, сингулярные функции [1, с. 347] и др.). В терминах присоединенных обобщенных функций [2] семейством всех решений уравнения $\overset{\circ}{y}=0$ являются функции скачков, непрерывные в нуле (в частности, семейством всех непрерывных решений является совокупность функций-констант). Мы видим, что в первом случае решений «крайне мало», во втором — «слишком много», а третий случай — компромиссный.

§ 1. Присоединенные обобщенные производные

Зафиксируем интервал $K \doteq (a,b)$ (ограниченный или неограниченный) и через $\mathrm{G} \doteq \mathrm{G}(a,b)$ обозначим пространство прерывистых функций, то есть функций $x : K \to \mathbb{C}$, обладающих конечными пределами $x(t-0) \doteq \lim\limits_{\tau \to t-0} x(\tau)$ и $x(t+0) \doteq \lim\limits_{\tau \to t+0} x(\tau)$ для всех $t \in K$. Через $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}} \doteq \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(a,b)$ обозначим пространство функций $x : K \to \mathbb{C}$ таких, что для любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset K$ сужение $x : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ принадлежит $\mathrm{G}_0[\alpha,\beta]$ (где $\mathrm{G}_0[\alpha,\beta]$ — это пространство таких функций $x : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$, что при любом $\varepsilon > 0$ множество $\{t \in [\alpha,\beta] : |x(t)| \geqslant \varepsilon\}$ состоит из конечного числа точек). Согласно включению $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}} \subset \mathrm{G}$ называем функции $x, y \in \mathrm{G}$ эквивалентными и пишем $x \sim y$, если $x - y \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$.

Через $\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}} \doteq \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}(a,b)$ обозначим пространство функций локально ограниченной вариации, а через $\mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}} \doteq \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(a,b)$ — его подпространство, состоящее из непрерывных функций. Пространство $\Gamma^{\mathrm{loc}} \doteq \Gamma^{\mathrm{loc}}(a,b)$ такое, что $\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}} \subset \Gamma^{\mathrm{loc}} \subset \mathrm{G}$, состоит из функций x, представимых в виде $x = x^c + x_c$, где $x^c \in \mathrm{C} \doteq \mathrm{C}(a,b)$ — непрерывная функция, а $x_c \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}} \doteq \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(a,b)$ — «функция скачков» (то есть для любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset K$ сужение $x_c : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ является функцией скачков).

Пространство $D \doteq D(a,b)$, состоящее из финитных функций пространства $\mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}$, называется пространством основных функций. В нем определено понятие сходящейся последовательности: говорим, что последовательность функций $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in D$, сходится к функции $\varphi \in D$ (и пишем $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$), если у всех функций φ_n и φ есть общий носитель $[\alpha, \beta] \subset K$ и $\operatorname*{Var}_{[\alpha,\beta]} (\varphi_n - \varphi) \underset{n}{\to} 0$.

Через D' обозначим пространство линейных непрерывных функционалов $\ell : D \to \mathbb{C}$ (непрерывность означает, что сходимость последовательности основных функций $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$ влечет сходимость $(\ell, \varphi_n) \underset{n}{\longrightarrow} (\ell, \varphi)$), а его элементы назовем обобщенными функциями. Если $x \in \mathrm{G}$, $y \in \Gamma^{\mathrm{loc}}$, то в D' определены линейные непрерывные функционалы $D \to \mathbb{C}$:

$$(x, \varphi) \doteq \int\limits_K \varphi(t)\, x(t)\, dt, \quad (\dot{x}, \varphi) \doteq \int\limits_K \varphi\, dx \qquad (\overset{\circ}{y}, \varphi) \doteq \int\limits_K \varphi \circ dy,$$

где второй функционал задан через интеграл Римана–Стилтьеса и называется *обобщенной производной*, а третий функционал задан через присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса и называется *присоединенной обобщенной производной.* Напомним [2], что присоединенный интеграл определен на функциях $u, v \in \Gamma^{\mathrm{loc}}$ и вычисляется по формуле $\int\limits_\alpha^\beta u \circ dv \doteq \int\limits_\alpha^\beta u^c dv^c - \int\limits_\alpha^\beta u_c\, dv_c$ (он существует тогда и только тогда, когда существует интеграл $\int\limits_\alpha^\beta u\, dv$).

Т е о р е м а 1.1. *Функция $x \in \mathrm{G}$ является решением обобщенного уравнения $(\dot{x}, \varphi) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x \sim \mathrm{const}$. Непрерывная функция $x \in \mathrm{C}$ является решением обобщенного уравнения $(\dot{x}, \varphi) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x = \mathrm{const}$. Функция $x \in \Gamma^{\mathrm{loc}}$ является решением обобщенного уравнения $(\overset{\circ}{x}, \varphi) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$. Непрерывная функция $x \in \mathrm{C}$ является решением обобщенного уравнения $(\overset{\circ}{x}, \varphi) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x = \mathrm{const}$.*

Решения уравнений $(\dot{x}, \varphi) \equiv (y, \varphi)$ и $(\overset{\circ}{x}, \varphi) \equiv (y, \varphi)$ будем называть «первообразными» функции $y \in \mathrm{G}$. В каждом из четырех случаев теоремы 1.1 имеем первообразные: $x = r + Y$, $x = Y$, $x = h + Y$, $x = Y$, где $Y(t) \doteq c + \int\limits_{\alpha}^{t} y(s)\,ds$, а $r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, $h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$ — произвольные функции (точка $(\alpha, c) \in K \times \mathbb{C}$ тоже произвольна).

Множество $X \subseteq \mathrm{G}$, оператор $\mathrm{V} : X \to \mathrm{G}$ и функция $x \in X$ порождают в D' функционал $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi) \doteq \int\limits_{K} \varphi\, d\mathrm{V}x$, а множество $X \subseteq \Gamma^{\mathrm{loc}}$, оператор $\mathrm{V} : X \to \Gamma^{\mathrm{loc}}$ и функция $x \in X$ порождают в D' функционал $(\mathring{\mathrm{V}}x, \varphi) \doteq \int\limits_{K} \varphi \circ d\mathrm{V}x$. В соответствии с теоремой 1.1 каждое из уравнений $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi) \equiv 0$ или $(\mathring{\mathrm{V}}x, \varphi) \equiv 0$ равносильно совокупностям уравнений

$$\begin{cases} (\mathrm{V}x)(t) = c + r(t) \\ x \in X \\ \forall\, c \in \mathbb{C}\ \ \forall\, r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} (\mathrm{V}x)(t) = v(t) \\ x \in X \\ \forall\, v \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}} \end{cases}.$$

Если, например, $(\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \int\limits_{0}^{t} x(s)\,ds$, то в первом случае получаем семейство решений $x(t) = c\,e^t + r(t)$, $c \in \mathbb{C}, r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, а во втором случае имеем $x(t) = h(t)\,e^t$, $h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$. При $X = \mathrm{C}$ в обоих случаях совокупность решений имеет вид $x(t) = c\,e^t$.

Решая приведенные совокупности уравнений, можно провести сопоставительный анализ решений для следующих типов уравнений: импульсные уравнения, сингулярные уравнения, функционально-дифференциальные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения, уравнения с разрывной правой частью и др.

Список литературы

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.
2. Родионов В.И. Присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса в алгебре прерывистых функций // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. 2005. Вып. 1 (31). С. 3–78.