Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. №2(36)

УДК 517.88.7

© **О. Ю. Хворост, З. Б. Цалюк**
Hary70@mail.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, неустойчивость, асимптотическая устойчивость, тривиальное решение.

Abstract. The paper is concerned with conditions of stability and instability of integro-differential equations

Рассмотрим системы

$$x' = Ax + \int_0^t K(t-s)x(s)ds, \tag{1}$$

$$x' = Ax + \int_0^t K(t-s)x(s)ds + f(t,x) + \int_0^t G[t,s,x(s)]ds, \tag{2}$$

где A – постоянная $n \times n$ матрица, $K \in L_1[0,\infty)$, f и G непрерывны при $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, $\|x\| \leqslant r$, причём $f(t,0) \equiv 0$, $G(t,s,0) \equiv 0$. Предположим, что выполнены условия: при некоторых $a > 0$, $q_i(t)$, $Q_i(t,s)$

$$\|f(t,x)\| \leqslant q_1(t)o(\|x\|) + q_2(t)\|x\|^{1+a}, \tag{3}$$

$$\|G(t,s,x)\| \leqslant Q_1(t,s)o(\|x\|) + Q_2(t,s)\|x\|^{1+a}. \tag{4}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

Т е о р е м а 1. *Пусть существуют такие* $\alpha > 0$, $M > 0$, *что для матрицы Коши уравнения (1) справедлива оценка* $\|C(t)\| \leqslant M\exp(-\alpha t)$, $t \geqslant 0$. *Пусть, кроме того, выполнены условия (3), (4), причем функция*

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left[q_1(s) + \int\limits_0^s \exp\Big(\alpha\,(s-\tau)\Big)Q_1(s,\tau)d\tau\right]ds$$

ограничена на $[0,\infty)$, *а функция*

$$\exp(-\beta t)\left[q_2(t) + \int\limits_0^t Q_2(t,s)\exp\Big(\alpha\,(1+a)\,(t-s)\Big)ds\right] \in L_1\,[0,\infty)$$

при некотором $0 < \beta < a\alpha$, *тогда тривиальное решение системы (2) асимптотически устойчиво.*

Т е о р е м а 2. *Пусть матрица* $zI - A - \hat{K}(z)$ *необратима в некоторой точке* z_0, $Rez_0 > 0$, *причем на прямой* $z = Rez_0$ *лежит только один полюс первого порядка. Пусть выполнены условия (3) и (4), причем*

$$A(t) = q_1(t) + \int\limits_0^t Q_1(t,s)\exp\Big(-\alpha\,(t-s)\Big)ds \in L_1\,[0,\infty)\,,$$

а функция

$$B(t) = q_2(t) + \int\limits_0^t Q_2(t,s)\exp\Big(-\alpha\,(1+a)\,(t-s)\Big)ds$$

ограничена на $[0,\infty)$, *тогда тривиальное решение системы (2) неустойчиво.*