УДК 519.517

© В. А. Белоусов, Н. И. Калядин

ОБ ОДНОМ СУЩЕСТВЕННОМ УСЛОВИИ В РАСПОЗНАВАНИИ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ[1]

Ключевые слова: распознавание, классифицирующая функция, эталлоные множества.

Abstract. Condition which increase the efficiancy of finite sets recognition is made.

В работе указано существенное условие, наложенное на исходные данные (конечные множества), при выполнении которого удаётся эффективнее распознавать исходные множества по сравнению с комбинаторным (переборным) алгоритмом сравнения множеств.

Пусть имеется основное множество $M \rightleftharpoons \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, ..., \mathfrak{X}_m\}$ из m конечных множеств $\mathfrak{X}_i, i = \overline{1, m}, m \geqslant 2$;

$$S \rightleftharpoons \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, ..., \mathcal{N}_t\}$$

— разбиение на $t \geqslant 2$ классов множества M; $f : I_m \to I_t$ — классифицирующая функция, распределяющая номера элементов основного множества M по номерам классов из S,

$$I_m \rightleftharpoons \{1, 2, ..., m\}, \quad I_t \rightleftharpoons \{1, 2, ..., t\}.$$

Обозначим через $P_i(\mathfrak{X})$ характеристическую функцию

$$P_i(\mathfrak{X}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathfrak{X} \in \mathcal{N}_i; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 03-01-00-255, 04-01-96016).

индексные множества $\mathfrak{D}_j$:

$$\mathfrak{D}_j \rightleftharpoons \{i\colon\ f(i) = j\}, \quad j = \overline{1,t};$$

$\mathcal{E}_k$ — эталонные множества, полученные по алгоритму эталонирования [1], $k = \overline{1,t}$.

Пусть

$$R_i(\mathfrak{X}) \rightleftharpoons \begin{cases} 1, \text{ если } \mathcal{E}_i \bigcap \mathfrak{X} \neq \varnothing, i = \overline{1,t}, \\ 0, \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

$$q_{ij} \rightleftharpoons \begin{cases} 1, \text{ если } \mathcal{E}_i \bigcap\limits_{k \in \mathfrak{D}_j} \mathfrak{X}_k \neq \varnothing, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Л е м м а 1. *Пусть* $(\forall i \in \mathcal{I}_t)(\forall \mathfrak{X} \in M)[\mathfrak{X} \neq \varnothing]$. *Тогда*

$$(\forall \mathfrak{X} \in M)[P_i(\mathfrak{X}) \Rightarrow R_i(\mathfrak{X})].$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* $(\forall \mathfrak{X} \in M)[\mathfrak{X} \neq \varnothing]$. *Если*

$$(\forall i \neq j \in \mathcal{I}_t)[q_{ij} = 1 \Rightarrow q_{ji} = 0], \text{ *то*}$$

$$[P_i(\mathfrak{X}) = R_i(\mathfrak{X}) \& \neg(\bigvee_{j \in \mathcal{I}_t \setminus \{i\}} R_j(\mathfrak{X}) \& q_{ij})].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.
($\rightarrow$). Пусть $\mathfrak{X} \in \mathcal{N}_i$, то есть $P_i(\mathfrak{X}) = 1$.

Покажем, что
$[P_i(\mathfrak{X}) = R_i(\mathfrak{X}) \& \neg(\bigvee\limits_{j \in \mathcal{I}_t \setminus \{i\}} R_j(\mathfrak{X}) \& q_{ij})] = 1.$

В самом деле $(\forall i \in \mathcal{I}_t)(\forall \mathfrak{X} \in M)[P_i(\mathfrak{X}) \Rightarrow R_i(\mathfrak{X})]$ в силу леммы 1. Отсюда $R_i(\mathfrak{X}) = 1$, то есть $\mathcal{E}_i \cap \mathfrak{X} \neq \varnothing$. Покажем, что $(\bigvee\limits_{k \in \mathcal{I}_t \setminus \{i\}} R_k(\mathfrak{X}) \& q_{ik}) = 0$. Тогда, если $(\forall i \neq j)[R_j(\mathfrak{X}) = 0]$, то $(\bigvee\limits_{k \in \mathcal{I}_t \setminus \{i\}} R_k(\mathfrak{X}) \& q_{ik}) = 0$ независимо от q_{ik}, $k \in \mathcal{I}_t \setminus \{i\}$.

Предположим противное, то есть $(\exists i \neq j)[R_j(\mathfrak{X}) = 1]$, а значит $\mathfrak{X} \bigcap \bigcup\limits_{k \in \mathfrak{D}_j} \mathfrak{X}_k \neq \varnothing$. Но $\mathfrak{X} \subseteq \bigcup\limits_{k \in \mathfrak{D}_j} \mathfrak{X}_k$. Следовательно, $\mathcal{E}_i \bigcap\limits_{k \in \mathfrak{D}_j} \mathfrak{X}_k \neq \varnothing$, то есть $q_{ij} = 1$.

По условию теоремы имеем $q_{ij} = 0$. Значит $(R_j(\mathfrak{X}) \& q_{ij}) = 0$. Пусть $j_1, j_2, .., j_k, ..., j_r$ все такие индексы, что $R_{j_k}(\mathfrak{X}) = 1$, $(k = \overline{1, r})$. Отсюда $(R_{j_k}(\mathfrak{X}) \& q_{ij_k}) = 0$ по тем же соображениям.

С другой стороны, для $j \in \mathfrak{I}_t \setminus \{j_1, j_2, ..j_r, i\}$ $(R_j(\mathfrak{X}) \& q_{ij}) = 0$ в силу того, что $R_j(\mathfrak{X}) = 0$.

Отсюда следует, что $(\bigvee\limits_{j \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_j(\mathfrak{X}) \& q_{ij}) = 0$.

Поэтому заключаем, что

$$R_i(\mathfrak{X}) \& \neg (\bigvee_{j \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_j(\mathfrak{X}) \& q_{ij}) = 1.$$

$(\leftarrow)$. Положим, что $P_i(\mathfrak{X}) = 0$. Покажем, что тогда

$$R_i(\mathfrak{X}) \& \neg (\bigvee_{j \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_j(\mathfrak{X}) \& q_{ij}) = 0.$$

Возможны два случая: $1) R_i(\mathfrak{X}) = 0$; $2) R_i(\mathfrak{X}) = 1$.

В первом случае $R_i(\mathfrak{X}) \& \neg (\bigvee\limits_{j \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_j(\mathfrak{X}) \& q_{ij}) = 0$ независимо от q_{ij}. Рассмотрим второй случай.

Положим, что $R_i(\mathfrak{X}) = 1$, то есть $\mathcal{E}_i \bigcap \mathfrak{X} \neq \varnothing$. Поскольку $P_i(\mathfrak{X}) = 0$, а $S \rightleftharpoons \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, ..., \mathcal{N}_t\}$ — разбиение на t $(t \geqslant 2)$ классов исходного множества M, то существует такое $j \neq i$, что $P_j(\mathfrak{X}) = 1$. Тогда в силу леммы 1 $R_j(\mathfrak{X}) = 1$. Но $\mathfrak{X} \subseteq \bigcup\limits_{k \in \mathfrak{D}_j} \mathfrak{X}_k$. Отсюда $\mathcal{E}_i \bigcap \bigcup\limits_{k \in \mathfrak{D}_j} \mathfrak{X}_k \neq \varnothing$, то есть $q_{ij} = 1$. Отсюда

$$R_j(\mathfrak{X}) \& q_{ij} = 1,$$

то есть $(\bigvee\limits_{k \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_k(\mathfrak{X}) \& q_{ik}) = 1$. Следовательно,

$$R_i(\mathfrak{X}) \& \neg (\bigvee_{j \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_j(\mathfrak{X}) \& q_{ij}) = 0.$$

Объединяя прямое и обратное доказательство убеждаемся в справедливости теоремы 1.

Анализ применимости условия $(\forall i \neq j \in \mathfrak{I}_m)[q_{ij} = 1 \Rightarrow q_{ji} = 0]$ в ранней работе авторов [2] при определении классов разбиения конечных семейств конечных множеств показал: оно может являться самостоятельным и существенным условием в распознавании конечних множеств [3], что и отражено в теореме 1.

Список литературы

1. Белоусов В.А., Калядин Н.И. Алгоритм построения эталонных множеств при сильном слипании множеств в обучении// Тез. второй междунар. конф. «Математические алгоритмы». Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1995. С. 8.
2. Белоусов В.А., Калядин Н.И. О некоторых классах разбиений конечных семейств конечных множеств// Автоматические устройства учета и контроля: Межвуз. сб. ИМИ. Ижевск, 1976. Вып. 11. С. 84-94.
3. Белоусов В.А., Калядин Н.И. О задаче классификации множеств натуральных чисел// Тез. докл. III конф. РОАИ. Н.Новгород, 1997. Ч.I. С. 94-97.