УДК 532.542.2

© С. М. Колосов, И. Г. Русяк

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА КРИВОЛИНЕЙНОМ УЧАСТКЕ ТРУБОПРОВОДА

Ключевые слова: криволинейная система координат, консервативная форма, вязкая жидкость, неизотермическое течение, уравнения гидромеханики.

Abstract. The system of the equations of a hydromechanics for an any curvilinear site of the pipeline is resulted. The special case of a curvilinear site is considered.

Математическая модель строится на основании следующих допущений: 1) жидкость является ньютоновской и несжимаемой; 2) процесс теплопроводности в жидкости подчиняется закону Фурье; 3) вязкость, теплоемкость и теплопроводность являются известными функциями температуры; 4) плотность жидкости слабо зависит от температуры; 5) течение жидкости является ламинарным; 6) течение является стационарным как в динамическом так и в тепловом смысле. 7) отсутствует переход энергии вязкого трения в тепловую энергию жидкости - перенос тепла осуществляется только посредством конвекции и теплопроводности.

Допущения (1) и (4) позволяют считать плотность жидкости постоянной $\rho = const$. Тогда система уравнений гидромеханики в криволинейных ортогональных координатах (ξ, η, φ) принимает вид:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi} = \mathbf{B} + \mathbf{F} + \mathbf{H},$$

где

$$\mathbf{E} = J\begin{bmatrix} \rho U \\ \rho U u - \mu\left[\left(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2\right)\frac{\partial u}{\partial \xi}\right] \\ \rho U v - \mu\left[\left(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2\right)\frac{\partial v}{\partial \xi}\right] \\ \rho U w - \mu\left[\left(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2\right)\frac{\partial w}{\partial \xi}\right] \\ \rho c U T - \lambda\left[\left(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2\right)\frac{\partial T}{\partial \xi}\right] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = J\begin{bmatrix} \rho V \\ \rho V u - \mu\left[\left(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}\right] \\ \rho V v - \mu\left[\left(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2\right)\frac{\partial v}{\partial \eta}\right] \\ \rho V w - \mu\left[\left(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2\right)\frac{\partial w}{\partial \eta}\right] \\ \rho c V T - \lambda\left[\left(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2\right)\frac{\partial T}{\partial \eta}\right] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = J\begin{bmatrix} \rho W \\ \rho W u - \mu\left[\left(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2\right)\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right] \\ \rho W w - \mu\left[\left(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2\right)\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right] \\ \rho W w - \mu\left[\left(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2\right)\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right] \\ \rho c W T - \lambda\left[\left(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2\right)\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = -J\begin{bmatrix} 0 \\ p_\xi \xi_x + p_\eta \eta_x + p_\varphi \varphi_x \\ p_\xi \xi_y + p_\eta \eta_y + p_\varphi \varphi_y \\ p_\xi \xi_z + p_\eta \eta_z + p_\varphi \varphi_z \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = J\begin{bmatrix} 0 \\ \rho F_x \\ \rho F_y \\ \rho F_z \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = J\begin{bmatrix} 0 \\ \mu_\xi \mathbf{A}\nabla\xi\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \mu_\eta \mathbf{A}\nabla\eta\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \mu_\varphi \mathbf{A}\nabla\varphi\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \\ \mu_\xi \mathbf{A}\nabla\xi\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + \mu_\eta \mathbf{A}\nabla\eta\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + \mu_\varphi \mathbf{A}\nabla\varphi\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \\ \mu_\xi \mathbf{A}\nabla\xi\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} + \mu_\eta \mathbf{A}\nabla\eta\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} + \mu_\varphi \mathbf{A}\nabla\varphi\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{A} = \left[\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(\xi,\eta,\varphi)}\right], \mathbf{r} = (\xi, \eta, \varphi),\ J = \frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\varphi)} \neq 0.$ - якобиан преобразования координат, U,V,W - контравариантные составляющие скорости; u,v,w - ковариантные составляющие в декартовых координатах (x,y,z), T - температура жидкости, p - давление, физические параметры жидкости: μ - вязкость, ρ - плотность, c - удельная теплоемкость, λ - коэффициент теплопроводности.

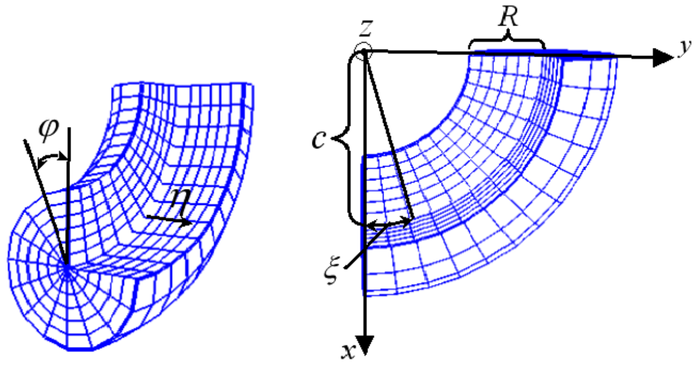

Рис. 1: Система координат на криволинейном участке канала

Связь введенной на рис. 1. системы координат (ξ, η, φ) с декартовой описывается соотношениями:

$$\xi = c \cdot arctg\left(\frac{y}{x}\right), \quad \eta = \sqrt{\left(c - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2},$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{z}{c - \sqrt{x^2 + y^2}}\right),$$

$$x = \cos\left(\frac{\xi}{c}\right) \cdot (c - \eta \cdot \cos\varphi), \quad y = \sin\left(\frac{\xi}{c}\right) \cdot (c - \eta \cdot \cos\varphi),$$

$$z = \eta \sin\varphi,$$

$$0 \le \xi \le L = \pi c/2, \quad 0 \le \eta \le R, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

$$\xi_x = \frac{-cy}{x^2+y^2}, \quad \xi_y = \frac{-cx}{x^2+y^2}, \quad \xi_z = 0,$$

$$\eta_x = \frac{-x\left(c-\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\left(c-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2}},$$

$$\eta_y = \frac{-y\left(c-\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\left(c-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2}},$$

$$\eta_z = \frac{z}{\sqrt{\left(c-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2}},$$

$$\varphi_x = \frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}\left[\left(c-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2\right]},$$

$$\varphi_y = \frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}\left[\left(c-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2\right]},$$

$$\varphi_z = \frac{\left(c-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{\left(c-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2}.$$